Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 452, 2016 г.

А. И. Генералов, А. А. Зайковский

О ПРОИЗВОДНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ АЛГЕБР ПОЛУДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА С ДВУМЯ ПРОСТЫМИ МОДУЛЯМИ

§1. Резольвента

К. Эрдман в работе [1] ввела некоторые семейства алгебр ручного типа представления, связанные с ручными блоками групповых алгебр, и получила классификацию таких алгебр с точностью до Морита-эквивалентности. Позднее для этих же алгебр была получена классификация с точностью до производной эквивалентности (см. [2]). Однако обе классификации не полны в том смысле, что для некоторых пар представителей соответствующих классов эквивалентности остаётся не доказанным, что они представляют различные классы. В частности, такие вопросы не были решены для алгебр полудиэдрального типа из серий $SD(2\mathcal{B})_1$ и $SD(2\mathcal{B})_2$ (в обозначениях из [1]).

В настоящей работе мы, основываясь на вычислении групп когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^n(R)$ при $n \leqslant 3$ для алгебр из серии $SD(2\mathcal{B})_1$, получаем, что алгебры из указанных серий с одинаковыми значениями параметров не производно эквивалентны. Для проведения соответствующих вычислений строится начальный отрезок минимальной проективной бимодульной резольвенты для алгебр серии $SD(2\mathcal{B})_1$. Используя этот отрезок резольвенты, мы вычисляем группы $\mathrm{HH}^n(R)$, $n \leqslant 3$, а затем сравниваем полученные результаты с аналогичными результатами для алгебр серии $SD(2\mathcal{B})_2$ из работ [3–5]. Это сравнение показывает, что алгебры из серии $SD(2\mathcal{B})_1$ не могут быть производно эквивалентны алгебрам из серии $SD(2\mathcal{B})_2$, имеющим те же параметры.

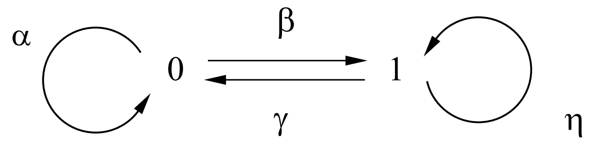
Отметим, что авторы уже располагают полным описанием упомянутой выше бимодульной резольвенты, и соответствующие результаты будут опубликованы позднее.

Ключевые слова: группы когомологий Хохшильда, алгебры полудиэдрального типа, бимодульная резольвента.

§2. Формулировка основного результата

Алгебры $SD(2\mathcal{B})_1(k,s,c)$ серии $SD(2\mathcal{B})_1$ над алгебраически замкнутым полем K произвольной характеристики p описываются с помощью следующего колчана с соотношениями:

$Q^{(\mathcal{B})}$:



$$\left.\begin{aligned} \beta\gamma=\gamma\eta=\eta\beta=0,\ \alpha^2=\gamma\beta(\alpha\gamma\beta)^{k-1}+c(\alpha\gamma\beta)^k,\\ \eta^s=(\beta\alpha\gamma)^k,\ (\gamma\beta\alpha)^k=(\alpha\gamma\beta)^k, \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

где $k,s\in\mathbb{N}$, $s\geqslant 2$, $c\in K$ (композицию путей мы записываем справа налево). Отметим, что если $\operatorname{char} K\neq 2$, то можно считать, что $c=0$ (достаточно α заменить на $\alpha-\frac{1}{2}c\gamma\beta(\gamma\beta\alpha)^{k-1}$).

Алгебры $SD(2\mathcal{B})_2(k,s,c)$, составляющие серию $SD(2\mathcal{B})_2$, описываются с помощью того же колчана $Q^{(\mathcal{B})}$ и следующих соотношений на нём:

$$\left.\begin{aligned} \eta\beta=\beta\alpha(\gamma\beta\alpha)^{k-1},\ \gamma\eta=\alpha\gamma(\beta\alpha\gamma)^{k-1},\ \beta\gamma=\eta^{s-1},\\ \alpha^2=c(\alpha\gamma\beta)^k,\ \eta^2\beta=0,\ \eta^2\gamma=0, \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

где $k,s\in\mathbb{N}$, $s\geqslant 3$, $c\in K$. Как и для серии $SD(2\mathcal{B})_1(k,s,c)$, при $p\neq 2$ можем считать, что $c=0$. Напомним, что когомологии Хохшильда $\mathrm{HH}^n(R)$, $n\in\mathbb{N}$, для алгебр $SD(2\mathcal{B})_2(k,s,c)$ были вычислены в [3–5].

Основной результат работы – это следующее описание групп когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^n(R)$, $n\leqslant 3$, для алгебр из серии $SD(2\mathcal{B})_1$.

Теорема 2.1. *Пусть* $R=SD(2\mathcal{B})_1(k,s,c)$, *где* $k,s\in\mathbb{N}$, $s\geqslant 2$, $c\in K$.

(I) *Тогда* $\dim_K \mathrm{HH}^0(R)=k+s+2$.

(II) *Предположим дополнительно, что* $p=2$. *Тогда*

$$\dim_K \mathrm{HH}^1(R)=\dim_K \mathrm{HH}^2(R)=\begin{cases} k+s+3, & \textit{если } k \textit{ и } s \textit{ чётны},\\ k+s+1, & \textit{если } c\neq 0,\ \textit{а } k \textit{ и } s \textit{ нечётны},\\ k+s+2 & \textit{в остальных случаях}; \end{cases}$$

$$\dim_K \mathrm{HH}^3(R)=\begin{cases} k+s+3, & \textit{если } k \textit{ и } s \textit{ чётны},\\ k+s+2 & \textit{в остальных случаях}. \end{cases}$$

(III) *Пусть* $p = 3$. *Тогда*

$$\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \dim_K \mathrm{HH}^2(R) = \begin{cases} k+s+2, & \textit{если } k \textit{ и } s \textit{ делятся на } 3, \\ k+s, & \textit{если } k \textit{ и } s \textit{ не делятся на } 3, \\ k+s+1 & \textit{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\dim_K \mathrm{HH}^3(R) = \begin{cases} k+s+2, & \textit{если } k \textit{ и } s \textit{ делятся на } 3, \\ k+s, & \textit{если } k \textit{ и } s \textit{ не делятся на } 3, \\ k+s+1 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(IV) *Пусть* $p \notin \{2,3\}$. *Тогда*

$$\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \dim_K \mathrm{HH}^2(R) = \begin{cases} k+s+1, & \textit{если } k \textit{ и } s \textit{ делятся на } p, \\ k+s & \textit{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\dim_K \mathrm{HH}^3(R) = \begin{cases} k+s+2, & \textit{если } k \textit{ и } s \textit{ делятся на } p, \\ k+s, & \textit{если } k \textit{ и } s \textit{ не делятся на } p, \\ k+s+1 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Из теоремы 2.1 немедленно вытекает следующее утверждение, дополняющее классификацию в [2] по отношению к производной эквивалентности.

Следствие 2.2. *Для любых значений* k, s, c *алгебра* $SD(2\mathcal{B})_1(k,s,c)$ *не является производно эквивалентной алгебре* $SD(2\mathcal{B})_2(k,s,c)$.

Доказательство. Алгебры $SD(2\mathcal{B})_1(k,s,c)$ и $SD(2\mathcal{B})_2(k,s,c)$, как следует из сравнения теоремы 2.1 с результатами вычислений групп $\mathrm{HH}^n(R)$ в [3–5], имеют различающиеся когомологии Хохшильда:

а) пусть $p = 2$, тогда при $c \neq 0$ различаются размерности групп $\mathrm{HH}^1(R)$; при $c = 0$ и $k > 1$ различаются размерности групп $\mathrm{HH}^2(R)$, а при $c = 0$ и $k = 1$ различаются размерности групп $\mathrm{HH}^3(R)$;

б) если $p = 3$ и 3 делит хотя бы одно из чисел k, s, то различаются размерности групп $\mathrm{HH}^1(R)$, а при k и s, одновременно делящихся на 3, различны размерности групп $\mathrm{HH}^3(R)$;

в) наконец, при $p \notin \{2,3\}$ для алгебр

$$SD(2\mathcal{B})_1(k,s,c) \quad \text{и} \quad SD(2\mathcal{B})_2(k,s,c)$$

различаются размерности групп $\mathrm{HH}^3(R)$. □

§3. Резольвента

Пусть $R = SD(2\mathcal{B})_1(k,s,c)$ – алгебра, определённая в разделе 2. Через e_i, $i = 0,1$, обозначим идемпотенты алгебры R, соответствующие вершинам колчана $Q^{(\mathcal{B})}$. Тогда

$$P_{ij} = \Lambda(e_i \otimes e_j),\ i,j \in \{0,1\},$$

составляют полное множество представителей главных неразложимых левых Λ-модулей, где $\Lambda = R^e$.

Умножение справа на элемент $w \in \Lambda$ индуцирует эндоморфизм w^* левого Λ-модуля Λ, кроме того, если $w \in (e_i \otimes e_j)\Lambda(e_k \otimes e_l)$, то w^* индуцирует гомоморфизм $w^*\colon P_{ij} \to P_{kl}$; в дальнейшем ради простоты мы будем часто гомоморфизм умножения (справа) на $w \in \Lambda$ также обозначать через w.

Введём краткие обозначения для некоторых элементов алгебры R:

$$b := \alpha\gamma\beta,\ g := \beta\alpha\gamma,\ a := \gamma\beta\alpha.$$

Стандартным базисом алгебры R будем называть множество

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{00} \cup \mathcal{B}_{10} \cup \mathcal{B}_{01} \cup \mathcal{B}_{11}, \tag{3.1}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{00} &= \{b^{i+1},\ a^i,\ \gamma\beta b^i,\ \alpha a^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\},\\
\mathcal{B}_{10} &= \{\beta b^i,\ \beta\alpha a^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\},\\
\mathcal{B}_{01} &= \{\gamma g^i,\ \alpha\gamma g^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\},\\
\mathcal{B}_{11} &= \{\eta^i \mid 0 \leqslant i \leqslant s\} \cup \{g^i \mid 1 \leqslant i \leqslant k-1\}.
\end{aligned}$$

В категории (левых) Λ-модулей мы сейчас опишем комплекс, который окажется начальной частью минимальной Λ-проективной резольвенты алгебры R.

Положим

$$\begin{aligned}
Q_0 &:= P_{00} \oplus P_{11},\\
Q_1 &:= \Lambda = P_{00} \oplus P_{11} \oplus P_{01} \oplus P_{10},\\
Q_2 &:= P_{00} \oplus P_{11}^2 \oplus P_{10} \oplus P_{01},\\
Q_3 &:= P_{11} \oplus P_{01} \oplus P_{10} \oplus P_{00} \oplus P_{11}^2,\\
Q_4 &:= Q_0 \oplus P_{11} \oplus P_{10} \oplus P_{01} \oplus P_{11} \oplus P_{01} \oplus P_{10}.
\end{aligned}$$

Для описания дифференциалов введем следующие вспомогательные матрицы:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & e_1\otimes\beta & \gamma\otimes e_1 \\ -\beta\otimes e_1 & 0 & -e_0\otimes\eta \\ -e_1\otimes\gamma & -\eta\otimes e_0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & e_1\otimes\eta & \eta\otimes e_1 \\ \gamma\otimes e_0 & 0 & -e_1\otimes\gamma \\ -e_0\otimes\beta & -\beta\otimes e_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} 0 & -e_0\otimes\gamma & -\beta\otimes e_0 \\ \eta\otimes e_1 & 0 & e_1\otimes\beta \\ -e_1\otimes\eta & -\gamma\otimes e_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_4 = \begin{pmatrix} 0 & -e_1\otimes\beta & -\gamma\otimes e_1 \\ \beta\otimes e_1 & 0 & e_0\otimes\eta \\ -e_1\otimes\gamma & \eta\otimes e_0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\gamma g^{k-1}\otimes e_1 & -e_1\otimes g^{k-1}\beta\alpha \\ -e_1\otimes\alpha\gamma g^{k-1} & 0 & \eta^{s-1}\otimes e_0 \\ g^{k-1}\beta\alpha\otimes e_1 & -e_0\otimes\eta^{s-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & g^{k-1}\beta\alpha\otimes e_0 & e_0\otimes\alpha\gamma g^{k-1} \\ e_1\otimes\eta^{s-1} & 0 & \alpha\gamma g^{k-1}\otimes e_1 \\ \eta^{s-1}\otimes e_1 & -e_1\otimes g^{k-1}\beta\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее рассмотрим гомоморфизмы $d_i \in \mathrm{Hom}(Q_{i+1}, Q_i)$, $0 \leqslant i \leqslant 3$, определяемые матрицами:

$$d_0 = \begin{pmatrix} \alpha\otimes e_0 - e_0\otimes\alpha & 0 & -e_0\otimes\gamma & \beta\otimes e_0 \\ 0 & e_1\otimes\eta - \eta\otimes e_1 & \gamma\otimes e_1 & -e_1\otimes\beta \end{pmatrix},$$

$$d_1 = \left(A \;\middle|\; \begin{array}{c} \mathrm{O} \\ \hline R_1 \end{array} \right),$$

где A – 4×2-матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} * & \sum\limits_{i=0}^{k-1} g^i\beta\otimes\gamma g^{k-1-i} \\ 0 & \sum\limits_{i=0}^{s-1} \eta^i\otimes\eta^{s-1-i} \\ * & \sum\limits_{i=0}^{k-1} g^i\beta\alpha\otimes g^{k-1-i} \\ * & \sum\limits_{i=0}^{k-1} g^i\otimes\alpha\gamma g^{k-1-i} \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{aligned} A_{11} &= -\,\alpha\otimes e_0 - e_0\otimes\alpha + \sum_{i=0}^{k-2} a^i\gamma\beta\otimes\gamma\beta b^{k-2-i} \\ &\quad + c\sum_{i=0}^{k-1} b^i\otimes\gamma\beta b^{k-1-i}, \\ A_{31} &= \sum_{i=0}^{k-1} a^i\otimes\beta b^{k-1-i} + c\sum_{i=0}^{k-1} b^i\alpha\otimes\beta b^{k-1-i}, \\ A_{41} &= \sum_{i=0}^{k-1} a^i\gamma\otimes b^{k-1-i} + c\sum_{i=0}^{k-1} b^i\alpha\gamma\otimes b^{k-1-i}; \end{aligned}$$

$$d_2 = \left(\begin{array}{c|c} B & \mathrm{O} \\ \hline D_2 & R_2 \end{array}\right),$$

где B – 2×3-матрица вида

$$B = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ e_1\otimes\eta-\eta\otimes e_1 & \gamma\otimes e_1 & -e_1\otimes\beta \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{aligned} B_{12} &= \alpha\otimes\gamma - e_0\otimes\alpha\gamma + c\alpha\otimes\alpha\gamma - c\alpha^2\otimes\gamma \\ &\quad - c^2\alpha^2\otimes\alpha\gamma + c^2\alpha^3\otimes\gamma + c^3\alpha^3\otimes\alpha\gamma, \\ B_{13} &= \beta\alpha\otimes e_0 - \beta\otimes\alpha + c\beta\alpha\otimes\alpha; \end{aligned}$$

$$d_3 = \left(\begin{array}{c|c|c} C & -R_4 & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & D_3 & R_3 \end{array}\right),$$

где C – 3×2-матрица вида

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \sum\limits_{i=0}^{s-1} \eta^i \otimes \eta^{s-1-i} \\ * & \sum\limits_{i=0}^{k-1} g^i\beta\alpha \otimes g^{k-1-i} \\ * & \sum\limits_{i=0}^{k-1} g^i \otimes \alpha\gamma g^{k-1-i} \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{aligned} C_{21} &= \sum_{i=0}^{k-1} b^i\alpha \otimes \beta b^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1} a^i \otimes g^{k-1-i}\beta\alpha, \\ C_{31} &= \sum_{i=0}^{k-1} \alpha\gamma g^i \otimes b^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1} a^i\gamma \otimes \alpha a^{k-1-i} \\ &\quad - ca^{k-1}\gamma \otimes \alpha^2 + c^2a^{k-1}\gamma \otimes \alpha^3. \end{aligned}$$

Рассмотрим также пополняющее отображение $\mu\colon Q_0 = P_{00} \oplus P_{11} \to R$, индуцированное умножением в R: $\mu(r \otimes s) = rs$.

Теорема 3.1. *Пусть $R = SD(2\mathcal{B})_1(k,s,c)$, где $k,s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$, $c \in K$. Тогда построенная выше последовательность*

$$Q_4 \xrightarrow{d_3} Q_3 \xrightarrow{d_2} Q_2 \xrightarrow{d_1} Q_1 \xrightarrow{d_0} Q_0 \tag{3.2}$$

вместе с пополняющим отображением $\mu\colon Q_0 = \Lambda \to R$ совпадает с начальным отрезком минимальной Λ-проективной резольвенты алгебры R.

Доказательство. То, что последовательность (3.2) – комплекс и $\mu \cdot d_0 = 0$, проверяется прямыми вычислениями. Для доказательства ацикличности получающегося комплекса мы используем теорему 1 из [6]. Нам достаточно доказать, что после тензорного умножения комплекса $\mu\colon Q_\bullet \to R$ на простой R-модуль S_i мы получаем начальный отрезок минимальной проективной резольвенты модуля S_i (такие резольвенты модулей S_i, $i = 0, 1$, описаны в [7]). Это также проверяется прямыми вычислениями; необходимые проверки оставляются читателю. □

§4. Группы когомологий

Пусть по-прежнему $R = SD(2\mathcal{B})_1(k,s,c)$ – K-алгебра, определённая в разделе 2. Кроме того, при $p \neq 2$ считаем, что $c = 0$.

Для вычисления когомологий $\mathrm{HH}^n(R)$ алгебры R мы используем комплекс

$$\bigl(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R),\ \ \delta^n = \mathrm{Hom}_\Lambda(d_n^Q, R)\bigr)_{0\leqslant n\leqslant 3}, \tag{4.1}$$

полученный из начального отрезка бимодульной резольвенты алгебры R, построенного в разделе 3. Как и в [3], любой Λ-гомоморфизм $f\colon Q_n \to R$ отождествляется с набором своих значений на соответствующих образующих $e_i \otimes e_j$ тех $P_{ij} = \Lambda\cdot(e_i\otimes e_j)$, которые входят в разложение модуля Q_n; при этом $f(e_i\otimes e_j) \in e_iRe_j$.

Предложение 4.1. $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = k + s + 2$, $\dim_K \mathrm{Im}\,\delta^0 = 4k - 2$.

Доказательство. Ввиду [1, лемма IX.1.2] центр $Z(R) = \mathrm{Ker}\,\delta^0$ алгебры R допускает в качестве базиса следующее множество

$$\{a^i + g^i + b^i \mid 1\leqslant i\leqslant k-1\} \cup \{\eta^i \mid 1\leqslant i\leqslant s\} \cup \{1,\ \gamma\beta b^{k-1},\ a^k\}. \tag{4.2}$$

Таким образом, $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = k + s + 2$ и

$$\dim \mathrm{Im}\,\delta^0 = \dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_0, R) - \dim_K \mathrm{Ker}\,\delta^0 = 4k - 2.$$

□

Дифференциал

$$\delta^1\colon\ \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_1, R) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_2, R)$$

описывается следующим образом: для $r_{ij} \in e_iRe_j$ $(i, j \in \{0, 1\})$ имеем

$$\delta^1(r_{00}, r_{11}, r_{01}, r_{10}) = (t_{00}, t_{11}, t'_{11}, t_{10}, t_{01}),$$

где

$$\begin{aligned} t_{00} = {} & -\alpha\cdot r_{00} - r_{00}\cdot\alpha + \sum_{i=0}^{k-2} a^i\gamma\beta\cdot r_{00}\cdot\gamma\beta b^{k-2-i} \\ & + c\sum_{i=0}^{k-1} b^i\cdot r_{00}\cdot\gamma\beta b^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1} a^i\cdot r_{01}\cdot\beta b^{k-1-i} \\ & + c\sum_{i=0}^{k-1} b^i\alpha\cdot r_{01}\cdot\beta b^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1} a^i\gamma\cdot r_{10}\cdot b^{k-1-i} \\ & + c\sum_{i=0}^{k-1} b^i\alpha\gamma\cdot r_{10}\cdot b^{k-1-i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{11} &= \sum_{i=0}^{k-1} g^i\beta \cdot r_{00} \cdot \gamma g^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{s-1} \eta^i \cdot r_{11} \cdot \eta^{s-1-i} \\
&+ \sum_{i=0}^{k-1} g^i\beta\alpha \cdot r_{01} \cdot g^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1} g^i \cdot r_{10} \cdot \alpha\gamma g^{k-1-i}, \\
t'_{11} &= -\beta \cdot r_{01} - r_{10} \cdot \gamma, \\
t_{10} &= r_{11} \cdot \beta - \eta \cdot r_{10}, \\
t_{01} &= \gamma \cdot r_{11} - r_{01} \cdot \eta.
\end{aligned}$$

Предложение 4.2. (1) *Пусть* $p = 2$. *Тогда*

$$\dim_K \operatorname{Im} \delta^1 = \begin{cases} 4k-1, & \text{если } k \text{ и } s \text{ чётны}, \\ 4k+1, & \text{если } c \neq 0, \text{ а } k \text{ и } s \text{ нечётны}, \\ 4k & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(2) *Пусть* $p = 3$. *Тогда*

$$\dim_K \operatorname{Im} \delta^1 = \begin{cases} 4k, & \text{если } k \text{ и } s \text{ делятся на } 3, \\ 4k+2, & \text{если } k \text{ и } s \text{ не делятся на } 3, \\ 4k+1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(3) *Пусть* $p \notin \{2,3\}$. *Тогда*

$$\dim_K \operatorname{Im} \delta^1 = \begin{cases} 4k+1, & \text{если } k \text{ и } s \text{ делятся на } p, \\ 4k+2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. 1) Предположим, что $p = 2$, и рассмотрим различные возможности для чётности k и s.

а) Пусть k и s чётны. Тогда пространство $\operatorname{Im} \delta^1$ допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов:

$$\big(\gamma\beta b^{k-1}, \mathrm{O}_4\big),\ \big(a^k, 0, g, \mathrm{O}_2\big); \tag{4.3}$$

$$\big(\alpha a^i, \mathrm{O}_4\big) \ \text{для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.4}$$

$$\big(a^i + b^i, \mathrm{O}_4\big) \ \text{для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.5}$$

$$\big(\mathrm{O}_3, \beta b^i, \gamma g^i\big) \ \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.6}$$

$$\big(\mathrm{O}_2, g^i, \mathrm{O}_2\big) \ \text{для } 2 \leqslant i \leqslant k. \tag{4.7}$$

Действительно, рассматривая значения δ^1 на наборах вида (r_{00}, O_4) (соответственно вида $(0, r_{11}, \mathrm{O}_2)$, $(\mathrm{O}_2, r_{01}, 0)$ или (O_3, r_{10})), где r_{ij} пробегает подмножество $\mathcal{B}_{ij}$ $(i, j \in \{0, 1\})$ стандартного базиса алгебры R (см. (3.1)), мы выделяем указанный базис для пространства $\operatorname{Im}\delta^1$.

б) Предположим теперь, что k чётно, а s нечётно. Рассуждая аналогично предыдущему, легко получаем, что в этом случае для получения базиса пространства $\operatorname{Im}\delta^1$ к множеству, состоящему из элементов, указанных в (4.3)–(4.7), надо присоединить элемент $\bigl(0, \eta^s, \mathrm{O}_3\bigr)$, а также заменить в нём элемент $\bigl(\mathrm{O}_3, \beta, \gamma\bigr)$ на элемент $\bigl(0, \eta^{s-1}, 0, \beta, \gamma\bigr)$.

в) Если k нечётно, а s чётно, то вновь аналогично пункту а) доказательства получаем, что для получения базиса пространства $\operatorname{Im}\delta^1$ к множеству, состоящему из элементов, указанных в (4.3)–(4.7), надо присоединить элемент $\bigl(c \cdot b^k, g^k, \mathrm{O}_3\bigr)$.

г) Предположим, наконец, что k и s нечётны. Если дополнительно имеем $c = 0$, то для получения базиса пространства $\operatorname{Im}\delta^1$ надо в множестве, указанном в пункте в) доказательства, элемент $\bigl(\mathrm{O}_3, \beta, \gamma\bigr)$ заменить на элемент $\bigl(0, \eta^{s-1}, 0, \beta, \gamma\bigr)$. Если же $c \neq 0$, то, кроме того, надо добавить элемент $\bigl(0, \eta^s, \mathrm{O}_3\bigr)$.

2) Пусть $p = 3$.

(2а) Легко проверяется, что если 3 делит k и s, то пространство $\operatorname{Im}\delta^1$ допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов:

$$\bigl(a^k, \mathrm{O}_4\bigr); \tag{4.8}$$

$$\bigl(\alpha a^i, \mathrm{O}_4\bigr) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.9}$$

$$\bigl(a^i + b^i, \mathrm{O}_4\bigr) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.10}$$

$$\bigl(\mathrm{O}_3, \beta b^i, \gamma g^i\bigr) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.11}$$

$$\bigl(\mathrm{O}_2, g^i, \mathrm{O}_2\bigr) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k. \tag{4.12}$$

(2б) Пусть 3 делит k, но не делит s. Тогда для получения базиса пространства $\operatorname{Im}\delta^1$ к множеству элементов, указанных в (4.8)–(4.12), надо присоединить элемент $\bigl(0, \eta^s, \mathrm{O}_3\bigr)$, а также заменить в нём элемент $\bigl(\mathrm{O}_3, \beta, \gamma\bigr)$ на элемент $\bigl(0, s \cdot \eta^{s-1}, 0, \beta, \gamma\bigr)$.

(2в) Если 3 делит s, но не делит k, то для получения базиса пространства $\operatorname{Im}\delta^1$ надо к множеству элементов, указанных в (4.8)–(4.12) присоединить элемент $\bigl(\gamma\beta a^{k-1}, \eta^s, \mathrm{O}_3\bigr)$.

(2г) Наконец, если 3 не делит ни k, ни s, то для получения базиса пространства $\operatorname{Im}\delta^1$ надо к множеству, указанному в части (2б), присоединить элемент $\bigl(\gamma\beta b^{k-1}, \mathrm{O}_4\bigr)$.

3) Пусть $p \notin \{2,3\}$.

3а) Аналогично предыдущему устанавливаем, что в случае, когда p делит k и s, пространство $\operatorname{Im}\delta^1$ допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов:

$$\bigl(\gamma\beta b^{k-1}, \mathrm{O}_4\bigr),\ \bigl(a^k, \mathrm{O}_4\bigr); \tag{4.13}$$

$$\bigl(\alpha a^i, \mathrm{O}_4\bigr) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.14}$$

$$\bigl(a^i + b^i, \mathrm{O}_4\bigr) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.15}$$

$$\bigl(\mathrm{O}_3, \beta b^i, \gamma g^i\bigr) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.16}$$

$$\bigl(\mathrm{O}_2, g^i, \mathrm{O}_2\bigr) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k. \tag{4.17}$$

(3б) Если p делит k, но не делит s, то для получения базиса пространства $\operatorname{Im}\delta^1$ к указанному выше множеству надо присоединить элемент $\bigl(0, \eta^s, \mathrm{O}_3\bigr)$, а также заменить в нём элемент $\bigl(\mathrm{O}_3, \beta, \gamma\bigr)$ на элемент $\bigl(0, s\cdot\eta^{s-1}, 0, \beta, \gamma\bigr)$.

(3в) Далее, если p делит s, но не делит k, то для получения базиса пространства $\operatorname{Im}\delta^1$ надо к множеству элементов, указанных в (4.13)–(4.17), присоединить элемент $\bigl(0, \eta^s, \mathrm{O}_3\bigr)$.

(3г) Наконец, если p не делит ни k, ни s, то в качестве базиса $\operatorname{Im}\delta^1$ можно взять множество, указанное в пункте (3б) доказательства. □

Следствие 4.3. (1) *Пусть $p = 2$. Тогда*:

(а) $$\dim_K \operatorname{Ker}\delta^1 = \begin{cases} 5k+s+1, & \textit{если } k \textit{ и } s \textit{ чётны},\\ 5k+s-1, & \textit{если } c \neq 0,\ \textit{а } k \textit{ и } s \textit{ нечётны},\\ 5k+s & \textit{в остальных случаях;}\end{cases}$$

(б) $$\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \begin{cases} k+s+3, & \textit{если } k \textit{ и } s \textit{ чётны},\\ k+s+1, & \textit{если } c \neq 0,\ \textit{а } k \textit{ и } s \textit{ нечётны},\\ k+s+2 & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

(2) *Пусть $p = 3$. Тогда*:

(а) $$\dim_K \operatorname{Ker}\delta^1 = \begin{cases} 5k+s, & \textit{если } k \textit{ и } s \textit{ делятся на } 3,\\ 5k+s-2, & \textit{если } k \textit{ и } s \textit{ не делятся на } 3,\\ 5k+s-1 & \textit{в остальных случаях;}\end{cases}$$

(б) $\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \begin{cases} k+s+2, & \text{\textit{если k и s делятся на} } 3,\\ k+s, & \text{\textit{если k и s не делятся на} } 3,\\ k+s+1 & \text{\textit{в остальных случаях.}} \end{cases}$

(3) *Пусть* $p \notin \{2,3\}$. *Тогда*:

(а) $\dim_K \operatorname{Ker} \delta^1 = \begin{cases} 5k+s-1, & \text{\textit{если k и s делятся на p,}}\\ 5k+s-2 & \text{\textit{в остальных случаях;}} \end{cases}$

(б) $\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \begin{cases} k+s+1, & \text{\textit{если k и s делятся на p,}}\\ k+s & \text{\textit{в остальных случаях.}} \end{cases}$

Доказательство. Утверждения о размерности $\operatorname{Ker} \delta^1$ следуют из предложения 4.2 с учётом того, что $\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_1, R) = 9k+s$, а утверждения о размерности $\mathrm{HH}^1(R)$ получаются с помощью предложения 4.1. □

Теперь мы исследуем второй дифференциал

$$\delta^2 \colon \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_2, R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_3, R).$$

Ввиду сделанных выше соглашений он описывается формулой: для $r_{ij} \in e_i R e_j$ $(i, j \in \{0,1\})$

$$\delta^2(r_{00}, r_{11}, r'_{11}, r_{10}, r_{01}) = (t_{11}, t_{01}, t_{10}, t_{00}, t'_{11}, t''_{11}),$$

где

$$\begin{aligned}
t_{11} &= r_{11}\eta - \eta r_{11} - r_{10}\alpha\gamma g^{k-1} + g^{k-1}\beta\alpha r_{01},\\
t_{01} &= \alpha r_{00}\gamma - r_{00}\alpha\gamma + c\alpha r_{00}\alpha\gamma - c\alpha^2 r_{00}\gamma\\
&\quad - c^2\alpha^2 r_{00}\alpha\gamma + c^2\alpha^3 r_{00}\gamma + c^3\alpha^3 r_{00}\alpha\gamma\\
&\quad + \gamma r_{11} + \alpha\gamma g^{k-1} r'_{11} - r_{01}\eta^{s-1},\\
t_{10} &= \beta\alpha r_{00} - \beta r_{00}\alpha + c\beta\alpha r_{00}\alpha - r_{11}\beta\\
&\quad - r'_{11} g^{k-1}\beta\alpha + \eta^{s-1} r_{10},\\
t_{00} &= \gamma r_{10} - r_{01}\beta,\\
t'_{11} &= r'_{11}\eta - \beta r_{01},\\
t''_{11} &= \eta r'_{11} - r_{10}\gamma.
\end{aligned}$$

Предложение 4.4. *Для любых p и c* $\dim_K \operatorname{Im} \delta^2 = 5k+s-2$.

Доказательство. Легко видеть (ср. доказательство предложения 4.2), что пространство $\operatorname{Im}\delta^2$ допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов:

$$
\begin{aligned}
&\big(0, \alpha\gamma g^i, \beta\alpha a^i, \mathrm{O}_3\,\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&\big(0, -\gamma g^i, \beta b^i, \mathrm{O}_3\,\big) \ \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&\big(\,\mathrm{O}_4, \eta^i, \eta^i\big) \ \text{ для } \ 2 \leqslant i \leqslant s;\\
&\big(\,\mathrm{O}_3, \gamma\beta b^i, \mathrm{O}_2\,\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&\big(\,\mathrm{O}_3, a^i, 0, -g^i\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k;\\
&\big(\,\mathrm{O}_3, b^i, g^i, 0\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&\big(0, \alpha\gamma g^{k-1}, -\beta\alpha a^{k-1}, 0, \eta, \eta\big), \ \big(-g^k, \mathrm{O}_2, \gamma\beta, \mathrm{O}_2\,\big).
\end{aligned}
$$

□

Следствие 4.5. *Для любых p и c*

$$\dim_K \mathrm{HH}^2(R) = \dim_K \mathrm{HH}^1(R).$$

Доказательство. Так как $\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_2, R) = 10k + 2s$, то

$$\dim_K \operatorname{Ker}\delta^2 = \dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_2, R) - \dim_K \operatorname{Im}\delta^2 = 5k + s + 2.$$

С другой стороны,

$$
\begin{aligned}
\dim_K \operatorname{Im}\delta^1 &= \dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_1, R) - \dim_K \operatorname{Ker}\delta^1\\
&= \dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_1, R) - \dim_K \mathrm{HH}^1(R) - \dim_K \operatorname{Im}\delta^0\\
&= (9k + s) - \dim_K \mathrm{HH}^1(R) - (4k - 2),
\end{aligned}
$$

откуда вытекает требуемое утверждение. □

Опишем, наконец, образ дифференциала

$$\delta^3\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_3, R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_4, R).$$

Рассуждая аналогично доказательству предложения 4.2, получаем следующее утверждение.

Предложение 4.6. (1) *Пусть $p = 2$. Тогда*

$$\dim_K \operatorname{Im}\delta^3 = \begin{cases} 5k + s - 1, & \text{если } k \text{ и } s \text{ чётны},\\ 5k + s & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

(2) *Пусть* $p \neq 2$. *Тогда*

$$\dim_K \operatorname{Im} \delta^3 = \begin{cases} 5k+s, & \textit{если } k \textit{ и } s \textit{ делятся на } p, \\ 5k+s+2, & \textit{если } k \textit{ и } s \textit{ не делятся на } p, \\ 5k+s+1 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. 1) Пусть $p = 2$.

(1а) Непосредственно проверяется, что при чётных k и s базис пространства $\operatorname{Im} \delta^3$ составляют следующие элементы:

$$\big(\,\mathrm{O}_2, g^i, \mathrm{O}_5\,\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k; \tag{4.18}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_3, \beta b^i, \gamma g^i, \mathrm{O}_3\,\big) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.19}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_5, \eta^i, \mathrm{O}_2\,\big) \text{ для } 2 \leqslant i \leqslant s; \tag{4.20}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_6, \alpha\gamma g^i, \beta\alpha a^i\big) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.21}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_6, \gamma g^i, 0\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.22}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_7, \beta b^i\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.23}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_2, \eta^{s-1}, \beta\alpha a^{k-1}, 0, \eta, \gamma, 0\big), \tag{4.24}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_2, \eta^{s-1}, 0, \alpha\gamma g^{k-1}, \eta, 0, \beta\big). \tag{4.25}$$

(1б) Если же хотя бы одно из чисел k и s нечётно, то для получения базиса пространства $\operatorname{Im} \delta^3$ к указанному выше множеству надо присоединить элемент $\big(0, \eta^s, \mathrm{O}_6\,\big)$, а также заменить в нём элемент $\big(\,\mathrm{O}_3, \beta, \gamma, \mathrm{O}_3\,\big)$ из (4.19) на элемент $\big(0, s \cdot \eta^{s-1}, 0, \beta, \gamma, \mathrm{O}_3\,\big)$.

2) Предположим, что $p \neq 2$.

(2а) Предположим также, что p делит и k, и s. Тогда пространство $\operatorname{Im} \delta^3$ допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов:

$$\big(\,\mathrm{O}_2, g^i, \mathrm{O}_5\,\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k; \tag{4.26}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_3, \beta b^i, \gamma g^i, \mathrm{O}_3\,\big) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.27}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_5, \eta^i, \mathrm{O}_2\,\big) \text{ для } 2 \leqslant i \leqslant s; \tag{4.28}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_6, \alpha\gamma g^i, \beta\alpha a^i\big) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.29}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_6, \gamma g^i, 0\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.30}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_7, \beta b^i\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.31}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_2, \eta^{s-1}, -\beta\alpha a^{k-1}, 0, -\eta, -\gamma, 0\big),\ \big(\,\mathrm{O}_2, \eta^{s-1}, 0, \alpha\gamma g^{k-1}, \eta, 0, \beta\big), \tag{4.32}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_3, \beta\alpha a^{k-1}, \alpha\gamma g^{k-1}, 0, -\gamma, -\beta\big). \tag{4.33}$$

(2б) Если p не делит ни k, ни s, то для получения базиса пространства $\operatorname{Im}\delta^3$ к указанному выше множеству надо присоединить элементы

$$\big(a^k, \mathrm{O}_7\,\big),\ \big(0, \eta^s, \mathrm{O}_6\,\big), \tag{4.34}$$

а также заменить в нём элемент $\big(\,\mathrm{O}_3, \beta, \gamma, \mathrm{O}_3\,\big)$ из (4.27) на элемент $\big(0, s\eta^{s-1}, 0, \beta, \gamma, \mathrm{O}_3\,\big)$.

(2в) Наконец, в случае, когда p делит s, но не делит k, то для получения базиса пространства $\operatorname{Im}\delta^3$ надо в множестве, указанном в пункте (2б) доказательства, пару элементов из (4.34) заменить на элемент $\big(2a^k, \eta^s, \mathrm{O}_6\,\big)$. В случае, когда p делит k, но не делит s, в этом же множестве надо опустить элемент $\big(a^k, \mathrm{O}_7\,\big)$.

□

Следствие 4.7. (1) *Пусть $p = 2$. Тогда*:

$$\text{(а)}\ \ \dim_K \operatorname{Ker}\delta^3 = \begin{cases} 6k+2s+1, & \text{*если k и s чётны*,}\\ 6k+2s & \text{*в остальных случаях*;}\end{cases}$$

$$\text{(б)}\ \ \dim_K \mathrm{HH}^3(R) = \begin{cases} k+s+3, & \text{если } k \text{ и } s \text{ чётны},\\ k+s+2 & \text{в остальных случаях}.\end{cases}$$

(2) *Пусть $p \neq 2$. Тогда*:

$$\text{(а)}\ \ \dim_K \operatorname{Ker}\delta^3 = \begin{cases} 6k+2s, & \text{если } k \text{ и } s \text{ делятся на } p,\\ 6k+2s-2, & \text{если } k \text{ и } s \text{ не делятся на } p,\\ 6k+2s-1 & \text{в остальных случаях};\end{cases}$$

$$\text{(б)}\ \ \dim_K \mathrm{HH}^3(R) = \begin{cases} k+s+2, & \text{если } k \text{ и } s \text{ делятся на } p,\\ k+s, & \text{если } k \text{ и } s \text{ не делятся на } p,\\ k+s+1 & \text{в остальных случаях}.\end{cases}$$

Доказательство. Надо учесть, что $\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_3, R) = 11k + 3s$. □

Таким образом, теорема 2.1 полностью доказана.

Литература

1. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras.* Lecture Notes in Math., v. 1428. Berlin; Heidelberg (1990).
2. Th. Holm, *Derived equivalence classification of algebras of dihedral, semidihedral, and quaternion type.* — J. Algebra **211** (1999), 159–205.
3. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* III. *Серия* $SD(2\mathcal{B})_2$ *в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **400** (2012), 133–157.
4. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* VI. *Серия* $SD(2\mathcal{B})_2$ *в характеристике, отличной от* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **443** (2016), 61–77.
5. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* VII. *Алгебры с малым параметром.* — Зап. научн. семин. ПОМИ (2016), настоящий том.
6. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, С. О. Иванов, *О построении бимодульных резольвент с помощью леммы Хаппеля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 61–70.
7. М. А. Антипов, А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа,* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 9–36.

Generalov A. I., Zaikovskii A. A. On derived equivalence of algebras of semidihedral groups with two simple modules.

We compute the Hochschild cohomology groups of degrees not exceeding 3 for algebras of semidihedral type which form the family $SD(2\mathcal{B})_1$ (from the famous K.Erdmann's classification). In the calculation, we use the beforehand construction of the initial part of the minimal projective bimodule resolution for algebras from the family under discussion. The obtained results imply that algebras from the families $SD(2\mathcal{B})_1$ and $SD(2\mathcal{B})_2$ with the same parameters in defining relations are not derived equivalent.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: ageneralov@gmail.com

E-mail: anat097@mail.ru

Поступило 27 октября 2016 г.