Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 452, 2016 г.

А. И. Генералов

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБР ПОЛУДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА. VII. АЛГЕБРЫ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

§1. Введение

В работах [1] и [2] были вычислены группы когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^n(R)$ для значительной части алгебр серии $SD(2\mathcal{B})_2$ из классификации К. Эрдман [3]. В настоящей работе мы описываем группы когомологий Хохшильда для оставшихся алгебр этой серии (а именно, для "малого" значения одного из натуральных параметров, содержащихся в определении этих алгебр).

Напомним, что в [1, 2] когомологии Хохшильда вычислялись с использованием предварительно построенной бимодульной резольвенты рассматриваемых алгебр. Это описание резольвенты непосредственно не распространяется на алгебры с "малым параметром", исследуемые в настоящей работе, и мы также начинаем наши вычисления с построения соответствующей резольвенты. Аналогично работе [4] это построение начинается с некоторых эмпирических вычислений, которые позволяют сформулировать гипотезу о виде разыскиваемой резольвенты, которая затем обосновывается теоретически.

Отметим, что эта работа продолжает серию статей [1, 2, 5–8], посвящённых вычислениям когомологий Хохшильда для алгебр полудиэдрального типа, в которых используется подход работы [4]. Подобные вычисления содержатся в сериях статей автора и его учеников для алгебр диэдрального [9–13] и кватернионого типов [14–17] соответственно, для самоинъективных алгебр конечного типа представлений [19–30], для алгебр Лю–Шульца, а также для целочисленных групповых колец диэдральных и полудиэдральных групп [31, 32] (см. также [33, 34]).

Кратко опишем структуру работы. В разделе 2 приводится формулировка основного результата работы – теоремы 2.1, в которой для рассматриваемой серии алгебр полудиэдрального типа описываются

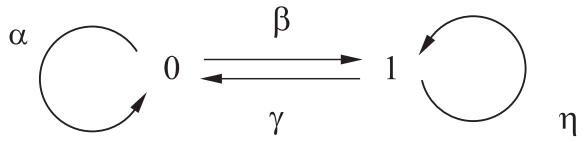
Ключевые слова: группы когомологий Хохшильда, алгебры полудиэдрального типа, бимодульная резольвента.

группы когомологий Хохшильда. В разделе 3 для исследуемых алгебр строится минимальная проективная бимодульная резольвента. Наконец, используя эту резольвенту, в разделе 4 мы вычисляем группы $\mathrm{HH}^n(R)$.

§2. Формулировка основного результата

Алгебры $R_{k,t,c}$ серии $SD(2\mathcal{B})_2$ над алгебраически замкнутым полем K произвольной характеристики p описываются с помощью следующего колчана с соотношениями:

$Q^{(\mathcal{B})}$:



$$\left.\begin{array}{c}\eta\beta=\beta\alpha(\gamma\beta\alpha)^{k-1},\ \ \gamma\eta=\alpha\gamma(\beta\alpha\gamma)^{k-1},\ \ \beta\gamma=\eta^{t-1},\\ \alpha^2=c(\alpha\gamma\beta)^k,\ \ \eta^2\beta=0,\ \ \gamma\eta^2=0,\end{array}\right\}\tag{2.1}$$

где $k,t\in\mathbb{N}$, $t\geqslant 3$, $c\in K$ (композицию путей мы записываем справа налево). Отметим, что если $\operatorname{char}K\neq 2$, то можно считать, что $c=0$ (достаточно α заменить на $\alpha-\frac{1}{2}c\gamma\beta(\gamma\beta\alpha)^{k-1}$).

В настоящей работе мы исследуем такие алгебры при $k=1$ (случай $k\geqslant 2$ исследовался, как говорилось выше, в [1, 2, 7]).

Основной результат работы – это следующее описание групп когомологий Хохшильда для рассматриваемой серии алгебр.

Теорема 2.1. *Пусть $R=R_{1,t,c}$, где $t\in\mathbb{N}$, $t\geqslant 3$, $c\in K$.*

(I) *Тогда* $\dim_K\mathrm{HH}^0(R)=t+3$.

(II) *Предположим дополнительно, что $p=2$. Тогда*

$$\begin{aligned}\dim_K\mathrm{HH}^1(R)&=\dim_K\mathrm{HH}^2(R)\\ &=\begin{cases}t+3, & \text{если } c=0 \text{ и } t \text{ нечётно},\\ t+2, & \text{если } t \text{ чётно},\\ t+1, & \text{если } c\neq 0 \text{ и } t \text{ нечётно};\end{cases}\end{aligned}$$

$$\dim_K\mathrm{HH}^3(R)=\begin{cases}t+5, & \text{если } c=0,\\ t+3, & \text{если } c\neq 0;\end{cases}$$

$$\dim_K \mathrm{HH}^4(R) = \begin{cases} t+7, & \textit{если } c=0; \\ t+4, & \textit{если } c\neq 0; \end{cases}$$

$$\dim_K \mathrm{HH}^5(R) = \begin{cases} t+9, & \textit{если } c=0 \textit{ и } t \textit{ нечётно}, \\ t+8, & \textit{если } c=0 \textit{ и } t \textit{ чётно}, \\ t+3, & \textit{если } c\neq 0 \textit{ и } t \textit{ нечётно}, \\ t+4, & \textit{если } c\neq 0 \textit{ и } t \textit{ чётно}; \end{cases}$$

кроме того, если $n = 4m + r$, *где* m, $r \in \mathbb{N}$ *и* $2 \leqslant r \leqslant 5$, *то*

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^r(R) = \begin{cases} 8m, & \textit{если } c=0; \\ 2m, & \textit{если } c\neq 0. \end{cases}$$

(III) *Пусть* $p \neq 2$. *Тогда*

$$\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \dim_K \mathrm{HH}^2(R) = t+1;$$

$$\dim_K \mathrm{HH}^3(R) = \begin{cases} t+2, & \textit{если } p \textit{ не делит } t, \\ t+3, & \textit{если } p \textit{ делит } t; \end{cases}$$

$$\dim_K \mathrm{HH}^4(R) = \begin{cases} t+3, & \textit{если } p \textit{ не делит } t, \\ t+4, & \textit{если } p \textit{ делит } t; \end{cases}$$

кроме того, если $n = 4m + r$, *где* $m, r \in \mathbb{N}$ *и* $1 \leqslant r \leqslant 4$, *то*

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^r(R) = 2m.$$

Из теоремы 2.1 немедленно вытекает следующее утверждение, дополняющее классификацию К. Эрдман, представленную в книге [3].

Следствие 2.2. *Пусть* $p = 2$. *Тогда алгебра* $R_{1,t,c}$, *где* $c \neq 0$, *не является производно эквивалентной* (*и, в частности, не Морита-эквивалентна*) *алгебре* $R_{1,t,0}$.

Замечание 2.3. Сравнение теоремы 2.1 с результатами в [1, теорема 1.1] и в [2, теорема 3.1] показывает, что приведённые выше формулы для размерностей групп $\mathrm{HH}^n(R)$ "вкладываются" (при $k = 1$) в соответствующие формулы из [1] (при $p = 2$) и [2] (при $p \neq 2$) во всех случаях, за исключением, когда $p = 2$ и $c = 0$.

§3. Резольвента

Пусть $R = R_{1,t,c}$ – алгебра, определённая в разделе 2. Через e_i, $i = 0, 1$, обозначим идемпотенты алгебры R, соответствующие вершинам колчана $Q^{(\mathcal{B})}$. Тогда

$$P_{ij} = \Lambda(e_i \otimes e_j),\ i, j \in \{0, 1\},$$

составляют полное множество представителей главных неразложимых левых Λ-модулей, где $\Lambda = R^e$.

Умножение справа на элемент $w \in \Lambda$ индуцирует эндоморфизм w^* левого Λ-модуля Λ, кроме того, если $w \in (e_i \otimes e_j)\Lambda(e_k \otimes e_l)$, то w^* индуцирует гомоморфизм $w^* \colon P_{ij} \to P_{kl}$; в дальнейшем ради простоты мы будем часто гомоморфизм умножения (справа) на $w \in \Lambda$ также обозначать через w.

Стандартным базисом алгебры R будем называть множество

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{00} \cup \mathcal{B}_{10} \cup \mathcal{B}_{01} \cup \mathcal{B}_{11}, \tag{3.1}$$

где

$$\mathcal{B}_{00} = \{e_0, \alpha, \gamma\beta, \alpha\gamma\beta\},\ \mathcal{B}_{10} = \{\beta,\ \beta\alpha\},$$
$$\mathcal{B}_{01} = \{\gamma,\ \alpha\gamma\},\ \mathcal{B}_{11} = \{\eta^i \mid 0 \leqslant i \leqslant t\}.$$

В категории (левых) Λ-модулей построим комплекс $Q_\bullet$. Положим

$$Q_0 := P_{00} \oplus P_{11},$$
$$Q_1 := Q_2 := \Lambda = P_{00} \oplus P_{10} \oplus P_{01} \oplus P_{11},$$
$$Q_3 := P_{00}^2 \oplus P_{11}$$

и далее для $n \geqslant 4$ рекурсивно определяем

$$Q_n := P_{00}^2 \oplus Q_{n-4}. \tag{3.2}$$

Введем сокращенное обозначение $\widetilde{\alpha} := \alpha - c\gamma\beta$ и рассмотрим гомоморфизмы $d_i^Q \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{i+1}, Q_i)$, $0 \leqslant i \leqslant 4$, определяемые матрицами:

$$d_0^Q = \begin{pmatrix} \alpha \otimes e_0 - e_0 \otimes \alpha & \beta \otimes e_0 & -e_0 \otimes \gamma & 0 \\ 0 & -e_1 \otimes \beta & \gamma \otimes e_1 & \eta \otimes e_1 - e_1 \otimes \eta \end{pmatrix},$$

$$d_1^Q = \begin{pmatrix} \star & \beta \otimes e_0 & -e_0 \otimes \gamma & 0 \\ -c\gamma \otimes \alpha & \star & 0 & e_1 \otimes \gamma \\ -ce_0 \otimes \beta\alpha & 0 & \star & \beta \otimes e_1 \\ 0 & -e_1 \otimes \beta & \gamma \otimes e_1 & -\sum\limits_{i=0}^{t-2} \eta^i \otimes \eta^{t-2-i} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}(d_1^Q)_{11} =&\widetilde{\alpha}\otimes e_0 + e_0\otimes\alpha,\\ (d_1^Q)_{22} =&e_1\otimes\alpha - \eta\otimes e_0,\\ (d_1^Q)_{33} =&e_0\otimes\eta - \alpha\otimes e_1;\end{aligned}$$

$$d_2^Q = \begin{pmatrix} \alpha\otimes e_0 - e_0\otimes\alpha & \gamma\beta\otimes e_0 - e_0\otimes\gamma\beta & 0\\ -c\gamma\otimes\alpha & \star & e_1\otimes\gamma\\ -ce_0\otimes\beta\alpha & -e_0\otimes\beta\alpha - \alpha\otimes\beta & \beta\otimes e_1\\ 0 & \star & \eta\otimes e_1 - e_1\otimes\eta \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}(d_2^Q)_{22} &= -\alpha\gamma\otimes e_0 - \gamma\otimes\alpha - c\gamma\otimes\gamma\beta,\\ (d_2^Q)_{42} &= c(\gamma\otimes\beta\alpha - \alpha\gamma\otimes\beta);\end{aligned}$$

$$d_3^Q = \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}\otimes e_0 + e_0\otimes\alpha & \gamma\beta\otimes e_0 - e_0\otimes\gamma\beta & 0 & 0\\ -ce_0\otimes\alpha & -\alpha\otimes e_0 + e_0\otimes\alpha & \star & \star\\ -c^2\gamma\otimes\beta\alpha & c(\gamma\otimes\beta\alpha - \alpha\gamma\otimes\beta) & \star & \star \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

где

$$\begin{aligned}(d_3^Q)_{23} =&\gamma\beta\otimes e_0 + e_0\otimes\gamma\beta,\\ (d_3^Q)_{24} =&\beta\otimes\gamma,\\ (d_3^Q)_{33} =&\alpha\gamma\otimes\beta + \gamma\otimes\beta\alpha,\\ (d_3^Q)_{34} =&\sum_{i=0}^{t}\eta^i\otimes\eta^{t-i} + c\cdot\eta^{t-1}\otimes\eta^{t-1};\end{aligned}$$

$$d_4^Q = \begin{pmatrix} \alpha\otimes e_0 - e_0\otimes\alpha & \gamma\beta\otimes e_0 - e_0\otimes\gamma\beta & 0 & 0 & 0 & 0\\ -ce_0\otimes\alpha & -\widetilde{\alpha}\otimes e_0 - e_0\otimes\alpha & \star & 0 & 0 & \star\\ 0 & 0 & \star & \beta\otimes e_0 & -e_0\otimes\gamma & 0\\ 0 & 0 & 0 & -e_1\otimes\beta & \gamma\otimes e_1 & \star \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

где

$$\begin{aligned}(d_4^Q)_{23} =&\gamma\beta\otimes e_0 + e_0\otimes\gamma\beta,\\ (d_4^Q)_{26} =&\beta\otimes\gamma,\\ (d_4^Q)_{33} =&\alpha\otimes e_0 - e_0\otimes\alpha,\\ (d_4^Q)_{46} =&\eta\otimes e_1 - e_1\otimes\eta.\end{aligned}$$

Далее, при $t > 4$ определим дифференциалы d_n^Q, $n \geqslant 5$, рекурсивно с помощью следующих блочных матриц (соответствующих прямым разложениям $Q_i = P_{00}^2 \oplus Q_{i-4}$): для нечётных $n = 2m+1$ ($m \geqslant 2$) положим

$$d_{2m+1}^Q = \left(\begin{array}{cc|c} \widetilde{\alpha} \otimes e_0 + e_0 \otimes \alpha & \gamma\beta \otimes e_0 - e_0 \otimes \gamma\beta & \mathrm{A}^{(2m+1)} \\ -ce_0 \otimes \alpha & -\alpha \otimes e_0 + e_0 \otimes \alpha & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathrm{O}} & d_{2m-3} \end{array}\right), \quad (3.5)$$

а для чётных $n = 2m$ ($m \geqslant 3$) положим

$$d_{2m}^Q = \left(\begin{array}{cc|c} \alpha \otimes e_0 - e_0 \otimes \alpha & \gamma\beta \otimes e_0 - e_0 \otimes \gamma\beta & \mathrm{A}^{(2m)} \\ -ce_0 \otimes \alpha & -\widetilde{\alpha} \otimes e_0 - e_0 \otimes \alpha & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathrm{O}} & d_{2m-4} \end{array}\right); \quad (3.6)$$

при этом в матрицах (3.5) и (3.6) блоки $\mathrm{A}^{(2m+1)}$ и $\mathrm{A}^{(2m)}$ соответственно содержат единственный ненулевой элемент, а именно,

$$(d_{2m+1})_{23} = (d_{2m})_{23} = \gamma\beta \otimes e_0 + e_0 \otimes \gamma\beta.$$

Для $t \in \{3, 4\}$ определим дифференциалы d_5^Q, d_6^Q в матричной форме вида (3.5) и соответственно вида (3.6) (при $m = 2$ и при $m = 3$, соответственно), полагая

$$\mathrm{A}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma\beta \otimes e_0 + e_0 \otimes \gamma\beta & 0 & 0 & \star \end{pmatrix},$$

где

$$\left(\mathrm{A}^{(5)}\right)_{24} = \begin{cases} -\beta \otimes \gamma, & \text{если } t = 3, \\ -\beta\alpha \otimes \gamma, & \text{если } t = 4; \end{cases}$$

$$\mathrm{A}^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \gamma\beta \otimes e_0 + e_0 \otimes \gamma\beta & \star & \star \end{pmatrix},$$

где

$$\left(\mathrm{A}^{(6)}\right)_{22} = \begin{cases} c \cdot \gamma\beta \otimes \gamma\beta, & \text{если } t = 3, \\ c \cdot \gamma\beta\alpha \otimes \gamma\beta, & \text{если } t = 4; \end{cases}$$

$$\left(\mathrm{A}^{(6)}\right)_{23} = \begin{cases} -\beta \otimes \gamma, & \text{если } t = 3, \\ -\beta\alpha \otimes \gamma, & \text{если } t = 4; \end{cases}$$

далее вновь (как и при $t > 4$) определим дифференциалы d_n^Q, $n \geqslant 7$, рекурсивно с помощью блочных матриц вида (3.5) и (3.6), в которых матрицы $\mathrm{A}^{(2m+1)}$ и $\mathrm{A}^{(2m)}$ имеют по два ненулевых элемента, а именно,

$$\left(\mathrm{A}^{(2m+1)}\right)_{21} = \left(\mathrm{A}^{(2m)}\right)_{21} = \gamma\beta \otimes e_0 + e_0 \otimes \gamma\beta,$$
$$\left(\mathrm{A}^{(2m+1)}\right)_{23} = \left(\mathrm{A}^{(2m)}\right)_{23} = \begin{cases} -\gamma\beta \otimes \gamma\beta, & \text{если } t = 3, \\ -\gamma\beta\alpha \otimes \gamma\beta, & \text{если } t = 4. \end{cases}$$

Наконец, в качестве пополняющего отображения $\mu\colon Q_0 = P_{00} \oplus P_{11} \to R$, мы берём (для всех $t \geqslant 3$) каноническое отображение, индуцированное умножением в R: $\mu(r \otimes s) = rs$.

Теорема 3.1. *Пусть $R = R_{1,t,c}$, где $t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 3$, $c \in K$. Тогда построенная выше последовательность $Q_\bullet = \left(Q_n, d_n^Q\right)_{n\geqslant 0}$ вместе с пополняющим отображением $\mu\colon Q_0 \to R$ является минимальной Λ-проективной резольвентой алгебры R.*

Доказательство. То, что $Q_\bullet$ – комплекс и $\mu \cdot d_0 = 0$, проверяется прямыми вычислениями. Для доказательства ацикличности получающегося комплекса мы используем теорему 1 из [35]. Нам достаточно доказать, что после тензорного умножения комплекса $\mu\colon Q_\bullet \to R$ на простой R-модуль S_i мы получаем минимальную проективную резольвенту модуля S_i (такие резольвенты модулей S_i, $i = 0, 1$, описаны в [36]). Это также проверяется прямыми вычислениями; необходимые проверки оставляются читателю. □

Рассмотрим подкомплекс $X_\bullet$ комплекса $Q_\bullet$, такой, что при $n \geqslant 4$ $X_n = P_{00}^2$ – это первые два прямых слагаемых в разложении Q_n из (3.2), а для $0 \leqslant n \leqslant 3$ $X_n = Q_n$.

Предложение 3.2. *Имеет место короткая точная последовательность комплексов*

$$0 \to X_\bullet \xrightarrow{\imath} Q_\bullet \xrightarrow{\pi} Q_\bullet[-4] \to 0, \tag{3.7}$$

расщепляющаяся в каждой степени.

Доказательство. Утверждение вытекает непосредственно из строения комплекса $Q_\bullet$. □

§4. Группы когомологий

Пусть по-прежнему $R = R_{1,t,c}$ – K-алгебра, определённая в разделе 2. Кроме того, при $p \neq 2$ считаем, что $c = 0$. Аналогично [1] для вычисления когомологий $\mathrm{HH}^n(R)$ алгебры R мы используем комплекс

$$\left(\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_n, R),\ \ \delta^n = \operatorname{Hom}_\Lambda(d_n^Q, R)\right)_{n\geqslant 0}, \tag{4.1}$$

где $\mu\colon Q_\bullet \to R$ – бимодульная резольвента алгебры R, построенная в разделе 3, а также используем обозначения из [1], связанные с ним, в частности, любой Λ-гомоморфизм $f\colon Q_n \to R$ отождествляется с набором своих значений на соответствующих образующих $e_i \otimes e_j$ тех $P_{ij} = \Lambda \cdot (e_i \otimes e_j)$, которые входят в разложение модуля Q_n.

Предложение 4.1. $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = t+3$, $\dim_K \operatorname{Im}\delta^0 = 2$.

Доказательство. Пространство $\operatorname{Im}\delta^0$ допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов: $\big(0, \beta\alpha, \alpha\gamma, 0\big)$, $\big(0, \beta, \gamma, 0\big)$, а тогда получаем

$$\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = \dim_K Q_0 - \dim_K \operatorname{Im}\delta^0 = (t+5) - 2 = t+3. \qquad \square$$

Далее будет удобно разбить изложение на два случая: 1) $p = 2$ и 2) $p \neq 2$. При этом мы будем давать более подробный анализ в первом случае, а во втором – обычно будем ограничиваться лишь формулировкой соответствующих результатов.

Дифференциал

$$\delta^1\colon\ \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_1, R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_2, R)$$

описывается следующим образом: для $r_{ij} \in e_i R e_j$ $(i, j \in \{0,1\})$ имеем

$$\delta^1(r_{00}, r_{10}, r_{01}, r_{11}) = (t_{00}, t_{10}, t_{01}, t_{11}),$$

где

$$\begin{aligned}
t_{00} &= \widetilde{\alpha} \cdot r_{00} + r_{00} \cdot \alpha - c\gamma \cdot r_{10} \cdot \alpha - c \cdot r_{01} \cdot \beta\alpha,\\
t_{10} &= \beta \cdot r_{00} + r_{10} \cdot \alpha - \eta \cdot r_{10} - r_{11} \cdot \beta,\\
t_{01} &= -r_{00} \cdot \gamma - \alpha \cdot r_{01} + r_{01} \cdot \eta + \gamma \cdot r_{11},\\
t_{11} &= r_{10} \cdot \gamma + \beta \cdot r_{01} - \sum_{i=0}^{t-2} \eta^i \cdot r_{11} \cdot \eta^{t-2-i}.
\end{aligned}$$

Предложение 4.2. *Пусть* $p = 2$. *Тогда*

$$\dim_K \operatorname{Im}\delta^1 = \begin{cases} 4, & \text{если } c = 0 \text{ и } t \text{ нечётно},\\ 5, & \text{если } t \text{ чётно},\\ 6, & \text{если } c \neq 0 \text{ и } t \text{ нечётно}. \end{cases}$$

Доказательство. 1) Предположим, что $c = 0$ и t нечётно. Тогда пространство $\operatorname{Im}\delta^1$ допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов:

$$\big(0, \beta, -\gamma, 0\big),\ \big(0, \beta\alpha, -\alpha\gamma, 0\big),\ \big(\mathrm{O}_3, \eta^{t-1}\big),\ \big(\mathrm{O}_3, \eta^{t}\big). \tag{4.2}$$

Действительно, рассматривая значения δ^1 на наборах вида (r_{00}, O_3) (соответственно вида $(0, r_{10}, \mathrm{O}_2)$, $(\mathrm{O}_2, r_{01}, 0)$ или (O_3, r_{11})), где r_{ij} пробегает подмножество $\mathcal{B}_{ij}$ $(i, j \in \{0, 1\})$ стандартного базиса алгебры R (см. (3.1)), мы выделяем указанный базис для пространства $\operatorname{Im}\delta^1$.

2) Предположим, что $c = 0$ и t чётно. Рассуждая аналогично предыдущему, легко получаем, что в этом случае для получения базиса пространства $\operatorname{Im}\delta^1$ к множеству, состоящему из элементов, указанных в (4.2), надо присоединить элемент $\big(\mathrm{O}_3, \eta^{t-2}\big)$.

3) Если $c \neq 0$ и t чётно, то вновь аналогично пункту 1) доказательства получаем, что пространство $\operatorname{Im}\delta^1$ допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов:

$$\begin{gathered}\big(c\gamma\beta, \beta, -\gamma, 0\big),\ \big(c\alpha\gamma\beta, \beta\alpha, -\alpha\gamma, 0\big),\\ \big(0, \beta, \gamma, (t+1)\eta^{t-2}\big), \big(c\alpha\gamma\beta, \mathrm{O}_2, \eta^{t-1}\big),\ \big(\mathrm{O}_3, \eta^{t}\big).\end{gathered}$$

4) Наконец, для $c \neq 0$ и t нечётного надо к множеству, указанному в части 3) доказательства, присоединить элемент $\big(0, \beta\alpha, \alpha\gamma, 0\big)$. □

Следствие 4.3. *Пусть* $p = 2$. *Тогда*:

(1)

$$\dim_K \operatorname{Ker}\delta^1 = \begin{cases} t+5, & \text{если } c = 0 \text{ и } t \text{ нечётно},\\ t+4, & \text{если } t \text{ чётно},\\ t+3, & \text{если } c \neq 0 \text{ и } t \text{ нечётно};\end{cases}$$

(2)

$$\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \begin{cases} t+3, & \text{если } c = 0 \text{ и } t \text{ нечётно},\\ t+2, & \text{если } t \text{ чётно},\\ t+1, & \text{если } c \neq 0 \text{ и } t \text{ нечётно}.\end{cases}$$

Доказательство. Первое утверждение следует из предложения 4.2 с учётом того, что $\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_1, R) = t + 9$, а второе получается с помощью предложения 4.1. □

Следующее утверждение доказывается аналогично предложению 4.2 (напомним, что в этом случае мы считаем, что $c = 0$).

Предложение 4.4. *Пусть* $p \neq 2$. *Тогда* $\dim_K \operatorname{Im} \delta^1 = 6$. □

Следствие 4.5. *Пусть* $p \neq 2$. *Тогда*:
(1) $\dim_K \operatorname{Ker} \delta^1 = t + 3$;
(2) $\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = t + 1$. □

Теперь мы исследуем второй дифференциал

$$\delta^2\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_2, R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_3, R).$$

Ввиду сделанных выше соглашений он описывается формулой: для $r_{ij} \in e_i R e_j$ $(i, j \in \{0, 1\})$

$$\delta^2(r_{00}, r_{10}, r_{01}, r_{11}) = (t_{00}, t'_{00}, t_{11}),$$

где (для любого p)

$$\begin{aligned} t_{00} &= \alpha r_{00} - r_{00}\alpha - c\gamma r_{10}\alpha - c r_{01}\beta\alpha, \\ t'_{00} &= \gamma\beta r_{00} - r_{00}\gamma\beta - \alpha\gamma r_{10} - \gamma r_{10}\alpha - c\gamma r_{10}\gamma\beta \\ &\quad - r_{01}\beta\alpha - \alpha r_{01}\beta + c(\gamma r_{11}\beta\alpha - \alpha\gamma r_{11}\beta), \\ t_{11} &= r_{10}\gamma + \beta r_{01} + \eta r_{11} - r_{11}\eta. \end{aligned}$$

Предложение 4.6. *Для любых* p *и* c $\dim_K \operatorname{Im} \delta^2 = 2$.

Доказательство. Легко проверяется (ср. доказательство предложения 4.2), что элементы $\big(-c\alpha\gamma\beta, -2\alpha\gamma\beta, \eta^{t-1}\big)$, $\big(\mathrm{O}_2, \eta^t\big)$ составляют базис пространства $\operatorname{Im} \delta^2$. □

Следствие 4.7. *Пусть* $p = 2$. *Тогда*:
(1) $\dim_K \operatorname{Ker} \delta^2 = t + 7$;
(2) $\dim_K \mathrm{HH}^2(R) = \begin{cases} t+3, & \text{если } c = 0 \text{ и } t \text{ нечётно}, \\ t+2, & \text{если } t \text{ чётно}, \\ t+1, & \text{если } c \neq 0 \text{ и } t \text{ нечётно}. \end{cases}$ □

Следствие 4.8. *Пусть* $p \neq 2$. *Тогда*:
(1) $\dim_K \operatorname{Ker} \delta^2 = t + 7$;
(2) $\dim_K \mathrm{HH}^2(R) = t + 1$. □

Дифференциал

$$\delta^3\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_3, R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_4, R)$$

описывается следующим образом: для $r_{00}, r'_{00} \in e_0 R e_0$, $r_{11} \in e_1 R e_1$

$$\delta^3(r_{00}, r'_{00}, r_{11}) = (t_{00}, t'_{00}, t''_{00}, t_{11}),$$

где

$$\begin{aligned}
t_{00} &= \widetilde{\alpha} r_{00} + r_{00}\alpha - c r'_{00}\alpha - c^2 \gamma r_{11} \beta \alpha, \\
t'_{00} &= \gamma\beta r_{00} - r_{00}\gamma\beta + r'_{00}\alpha - \alpha r'_{00} + c(\gamma r_{11}\beta\alpha - \alpha\gamma r_{11}\beta), \\
t''_{00} &= \gamma\beta r'_{00} + r'_{00}\gamma\beta + \alpha\gamma r_{11}\beta + \gamma r_{11}\beta\alpha, \\
t_{11} &= \beta r'_{00}\gamma + \sum_{i=0}^{t} \eta^i r_{11} \eta^{t-i} + c \cdot \eta^{t-1} r_{11} \eta^{t-1}.
\end{aligned}$$

Теперь аналогично предыдущему получаем следующее утверждение.

Предложение 4.9. *Пусть* $p = 2$. *Тогда*

$$\dim_K \operatorname{Im} \delta^3 = \begin{cases} 2, & \text{если } c = 0, \\ 4, & \text{если } c \neq 0. \end{cases}$$

Доказательство. Непосредственно проверяется, что при $c \neq 0$ базис пространства $\operatorname{Im} \delta^3$ составляют элементы

$$\big(\gamma\beta, \mathrm{O}_3\big),\ \big(\alpha\gamma\beta, \mathrm{O}_3\big),\ \big(c\alpha, \mathrm{O}_2, \eta^{t-1}\big),\ \big(\mathrm{O}_3, \eta^t\big),$$

а при $c = 0$ из этого множества надо удалить элементы

$$\big(\gamma\beta, \mathrm{O}_3\big),\ \big(\alpha\gamma\beta, \mathrm{O}_3\big). \qquad \square$$

Следствие 4.10. *Пусть* $p = 2$. *Тогда*:

(1)

$$\dim_K \operatorname{Ker} \delta^3 = \begin{cases} t + 7, & \text{если } c = 0, \\ t + 5, & \text{если } c \neq 0; \end{cases}$$

(2)

$$\dim_K \mathrm{HH}^3(R) = \begin{cases} t + 5, & \text{если } c = 0, \\ t + 3, & \text{если } c \neq 0. \end{cases} \qquad \square$$

Предложение 4.11. *Пусть* $p \neq 2$. *Тогда*

$$\dim_K \operatorname{Im} \delta^3 = \begin{cases} 5, & \text{если } p \text{ не делит } t, \\ 4, & \text{если } p \text{ делит } t. \end{cases} \qquad \square$$

Следствие 4.12. *Пусть* $p \neq 2$. *Тогда*:

(1)

$$\dim_K \operatorname{Ker} \delta^3 = \begin{cases} t + 4, & \text{если } p \text{ не делит } t, \\ t + 5, & \text{если } p \text{ делит } t; \end{cases}$$

(2)

$$\dim_K \mathrm{HH}^3(R) = \begin{cases} t+2, & \textit{если } p \textit{ не делит } t, \\ t+3, & \textit{если } p \textit{ делит } t. \end{cases}$$

□

Аналогично предыдущему осуществляется описание образа дифференциалов δ^4 и δ^5, а затем и описание групп $\mathrm{HH}^4(R)$ и $\mathrm{HH}^5(R)$. Детали доказательств мы оставляем читателю.

Предложение 4.13. (а) *Пусть* $p = 2$. *Тогда*

$$\dim_K \operatorname{Im} \delta^4 = \begin{cases} 4, & \textit{если } c = 0, \\ 5, & \textit{если } c \neq 0. \end{cases}$$

(б) *Пусть* $p \neq 2$. *Тогда* $\dim_K \operatorname{Im} \delta^4 = 5$. □

Следствие 4.14. *Пусть* $p = 2$. *Тогда*:

(1)

$$\dim_K \operatorname{Ker} \delta^4(R) = \begin{cases} t+9, & \textit{если } c = 0; \\ t+8, & \textit{если } c \neq 0; \end{cases}$$

(2)

$$\dim_K \mathrm{HH}^4(R) = \begin{cases} t+7, & \textit{если } c = 0; \\ t+4, & \textit{если } c \neq 0. \end{cases}$$

□

Следствие 4.15. *Пусть* $p \neq 2$. *Тогда*:

(1) $\dim_K \operatorname{Ker} \delta^4(R) = t + 8$;

(2)

$$\dim_K \mathrm{HH}^4(R) = \begin{cases} t+3, & \textit{если } p \textit{ не делит } t, \\ t+4, & \textit{если } p \textit{ делит } t. \end{cases}$$

□

Предложение 4.16. (а) *Пусть* $p = 2$. *Тогда*

$$\dim_K \operatorname{Im} \delta^5 = \begin{cases} 4, & \textit{если } c = 0 \textit{ и } t \textit{ нечётно}, \\ 5, & \textit{если } c = 0 \textit{ и } t \textit{ чётно}, \\ 9, & \textit{если } c \neq 0 \textit{ и } t \textit{ нечётно}, \\ 8, & \textit{если } c \neq 0 \textit{ и } t \textit{ чётно}. \end{cases}$$

(б) *Пусть* $p \neq 2$. *Тогда* $\dim_K \operatorname{Im} \delta^5 = 9$. □

Замечание 4.17. Стоит заметить, что хотя формулы из предложения 4.16 справедливы для всех $t \geqslant 3$, необходимые вычисления приходится проводить отдельно для $t > 4$ и для $t = 3$, $t = 4$ соответственно. Это связано с отличиями в описании дифференциала d_5^Q для этих случаев. Некоторые из последующих вычислений также требуют раздельных вычислений для $t > 4$ и $t \in \{3, 4\}$.

Следствие 4.18. *Пусть* $p = 2$. *Тогда*:

(1)

$$\dim_K \operatorname{Ker} \delta^5(R) = \begin{cases} t+13, & \text{если } c = 0 \text{ и } t \text{ нечётно}, \\ t+12, & \text{если } c = 0 \text{ и } t \text{ чётно}, \\ t+8, & \text{если } c \neq 0 \text{ и } t \text{ нечётно}, \\ t+9, & \text{если } c \neq 0 \text{ и } t \text{ чётно}; \end{cases}$$

(2)

$$\dim_K \mathrm{HH}^5(R) = \begin{cases} t+9, & \text{если } c = 0 \text{ и } t \text{ нечётно}, \\ t+8, & \text{если } c = 0 \text{ и } t \text{ чётно}, \\ t+3, & \text{если } c \neq 0 \text{ и } t \text{ нечётно}, \\ t+4, & \text{если } c \neq 0 \text{ и } t \text{ чётно}. \end{cases}$$ □

Следствие 4.19. *Пусть* $p \neq 2$. *Тогда*:

(1) $\dim_K \operatorname{Ker} \delta^5(R) = t + 8$;

(2) $\dim_K \mathrm{HH}^5(R) = t + 3$. □

Пусть $\mathcal{X}^\bullet := \operatorname{Hom}_\Lambda(X_\bullet, R)$, где $X_\bullet$ – комплекс из предложения 3.2. Из описания бимодульной резольвенты алгебры R, построенной в разделе 3, вытекает, что дифференциалы комплекса $X_\bullet$ описываются (при любом p) так: при $m \geqslant 2$

$$d_{2m}^{X_\bullet} = \begin{pmatrix} \alpha \otimes e_0 - e_0 \otimes \alpha & \gamma\beta \otimes e_0 - e_0 \otimes \gamma\beta \\ -c \cdot e_0 \otimes \alpha & -\widetilde{\alpha} \otimes e_0 - e_0 \otimes \alpha \end{pmatrix},$$

$$d_{2m+1}^{X_\bullet} = \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha} \otimes e_0 + e_0 \otimes \alpha & \gamma\beta \otimes e_0 - e_0 \otimes \gamma\beta \\ -c \cdot e_0 \otimes \alpha & -\alpha \otimes e_0 + e_0 \otimes \alpha \end{pmatrix}.$$

Предложение 4.20. (а) *Пусть* $p = 2$. *Тогда при* $n \geqslant 4$

$$\dim_K \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) = \begin{cases} 8, & \text{если } c = 0; \\ 2, & \text{если } c \neq 0. \end{cases}$$

(б) *Пусть* $p \neq 2$. *Тогда при* $n \geqslant 4$ $\dim_K \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) = 4$.

Доказательство. а) Пусть $p = 2$. Если $c = 0$, то сразу ясно, что $\delta^n_{\mathcal{X}^\bullet} = 0$ (для всех $n \geqslant 4$). При $c \neq 0$ прямые вычисления показывают, что в качестве K-базиса пространства $\operatorname{Ker}\delta^{2m}_{\mathcal{X}^\bullet}$ $(m \geqslant 2)$ можно взять множество элементов

$$\big(e_0, 0\big), \big(0, \alpha\gamma\beta\big), \tag{4.3}$$

$$\big(\alpha, 0\big),\ \big(\gamma\beta, 0\big),\ \big(\alpha\gamma\beta, 0\big), \tag{4.4}$$

а для $\operatorname{Ker}\delta^{2m+1}_{\mathcal{X}^\bullet}$ $(m \geqslant 2)$ в качестве базиса можно взять множество элементов

$$\big(c\cdot\alpha, \alpha\big), \big(\gamma\beta, 0\big), \tag{4.5}$$

$$\big(\alpha, \gamma\beta\big),\ \big(\alpha\gamma\beta, 0\big),\ \big(0, \alpha\gamma\beta\big). \tag{4.6}$$

Кроме того, множество элементов, указанных в (4.6), служит базисом пространства $\operatorname{Im}\delta^{2m}_{\mathcal{X}^\bullet}$, и тогда когомологические классы элементов из (4.5) составляют базис пространства $\mathrm{H}^{2m+1}(\mathcal{X}^\bullet)$ (при $m \geqslant 2$). Аналогично множество элементов, указанных в (4.4), служит базисом пространства $\operatorname{Im}\delta^{2m+1}_{\mathcal{X}^\bullet}$, и тогда когомологические классы элементов из (4.3) составляют базис пространства $\mathrm{H}^{2m}(\mathcal{X}^\bullet)$ $(m \geqslant 2)$.

б) При $p \neq 2$ аналогично предыдущему доказывается, что для $n \geqslant 4$

$$\dim_K \operatorname{Ker}\delta^n_{\mathcal{X}^\bullet} = 6,\ \dim_K \operatorname{Im}\delta^n_{\mathcal{X}^\bullet} = 2.$$

При этом обнаруживается, что когомологические классы элементов

$$\big(e_0, 0\big),\ \big(\gamma\beta, 0\big),\ \big(0, \alpha\big),\ \big(0, \alpha\gamma\beta\big) \tag{4.7}$$

составляют базис пространства $\mathrm{H}^{2m}(\mathcal{X}^\bullet)$, а когомологические классы элементов

$$\big(0, e_0\big),\ \big(0, \gamma\beta\big),\ \big(\alpha, 0\big),\ \big(\alpha\gamma\beta, 0\big) \tag{4.8}$$

составляют базис пространства $\mathrm{H}^{2m+1}(\mathcal{X}^\bullet)$. Детали соответствующих вычислений мы оставляем читателю, при этом надо учитывать, что в этом случае мы ранее положили $c = 0$. □

Предложение 4.21. *Для* $n \geqslant 5$

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) = \begin{cases} \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R) + 8, & \textit{если } p = 2 \ \textit{ и } \ c = 0, \\ \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R) + 2 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.9}$$

Доказательство. Короткая точная последовательность (3.7) после применения функтора $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,R)$ даёт короткую точную последовательность комплексов

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet[-4],R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet,R) \xrightarrow{\imath^*} \mathcal{X}^\bullet \to 0,$$

которая, в свою очередь, приводит к длинной точной когомологической последовательности

$$\cdots \xrightarrow{\Delta^{n-1}} \mathrm{HH}^{n-4}(R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{HH}^n(R) \xrightarrow{\imath^*} \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \xrightarrow{\Delta^n} \mathrm{HH}^{n-3}(R) \xrightarrow{\pi^*} \cdots . \tag{4.10}$$

Из точности этой последовательности получаем соотношение

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R) = \dim_K \mathrm{Ker}\,\Delta^n - \dim_K \mathrm{Im}\,\Delta^{n-1}. \tag{4.11}$$

Таким образом, нам достаточно описать ядра и образы связывающих гомоморфизмов из последовательности (4.10).

Лемма 4.22. (а) *Пусть $p=2$. Тогда для любого $n \geqslant 5$* $\quad \Delta^n = 0$.

(б) *Пусть $p \neq 2$. Тогда при $n \geqslant 5$*

$$\dim_K \mathrm{Im}\,\Delta^n = 1, \quad \dim_K \mathrm{Ker}\,\Delta^n = 3. \tag{4.12}$$

Доказательство. Мы будем использовать обозначения, связанные с определением связывающих гомоморфизмов Δ^n, которые были введены в [8] (см. доказательство леммы 4.19).

а) Пусть $p=2$, и пусть $u \in \mathrm{Ker}\,\delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$ $(n \geqslant 5)$. Если $t>4$, то непосредственно убеждаемся, что для продолжения нулём $\widetilde{u} \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n,R)$ этого коцикла получаем $\delta^n(\widetilde{u})=0$, и следовательно, $\Delta^n(\mathrm{cl}\,u)=0$. При $t \in \{3,4\}$ это же рассуждение применимо к случаям, когда $n \geqslant 7$ или элемент $u \in \mathrm{Ker}\,\delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$, где $n \in \{5,6\}$, отличен от $(0,e_0)$, или элемент $u \in \mathrm{Ker}\,\delta^6_{\mathcal{X}^\bullet}$ отличен от $(c\alpha,\alpha)$. Но для $u=(0,e_0)$ (в этом случае необходимо имеем $c=0$) получаем, что $\delta^n(\widetilde{u}) \in \pi^*(\mathrm{Im}\,\delta^{n-4})$, и снова $\Delta^n(\mathrm{cl}\,u)=0$ при $n=5,6$. Для $u=(c\alpha,\alpha)$ также имеем $\delta^6(\widetilde{u}) \in \pi^*(\mathrm{Im}\,\delta^2)$, и, следовательно, $\Delta^6(\mathrm{cl}\,u)=0$.

б) Пусть $p \neq 2$, и пусть $u \in \mathrm{Ker}\,\delta^{2m}_{\mathcal{X}^\bullet}$ $(m \geqslant 3)$. Из доказательства предложения 4.20 следует, что можно считать, что u – один из элементов, указанных в (4.7). Сразу ясно, что для u, отличного от $(0,\alpha)$, имеем $\Delta^n(\mathrm{cl}\,u)=0$. Пусть теперь $u=(0,\alpha)$. Тогда $\delta^{2m}_{\mathcal{X}^\bullet}(\widetilde{u}) = \big(\mathrm{O}_2, 2\alpha\gamma\beta, \mathrm{O}\big) = \pi^*(2\alpha\gamma\beta,\mathrm{O})$, при этом $\big(\alpha\gamma\beta,\mathrm{O}\big)$ не лежит в $\mathrm{Im}\,\delta^{2m-4}$,

и, следовательно, $\Delta^{2m}(\operatorname{cl} u) \neq 0$. Таким образом, получаем соотношения (4.12). В случае, когда $u \in \operatorname{Ker} \delta^{2m+1}_{\mathcal{X}^\bullet}$ $(m \geqslant 2)$, аналогично предыдущему считаем, что u – один из элементов, указанных в (4.8), и сразу замечаем, что для u, отличного от $(0, e_0)$, имеем $\Delta^n(\operatorname{cl} u) = 0$. Для $u = (0, e_0)$ имеем $\delta^{2m+1}_{\mathcal{X}^\bullet}(\widetilde{u}) = \pi^*(2\gamma\beta, \mathrm{O})$, где $\big(2\gamma\beta, \mathrm{O}\big)$ не лежит в $\operatorname{Im} \delta^{2m-3}$, потому $\Delta^{2m+1}(\operatorname{cl} u) \neq 0$, и вновь получаем соотношения (4.12). □

Теперь с использованием леммы 4.22 и соотношения (4.11) получаем требуемое равенство (4.9). □

Таким образом, теорема 2.1 полностью доказана.

Литература

1. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* III. *Серия $SD(2\mathcal{B})_2$ в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **400** (2012), 133–157.
2. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* VI. *Серия $SD(2\mathcal{B})_2$ в характеристике, отличной от* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **443** (2016), 61–77.
3. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras*, Lecture Notes in Math., v. 1428. Berlin; Heidelberg. 1990.
4. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* I: *серия $D(3\mathcal{K})$ в характеристике* 2. — Алгебра и анализ, **16** (2004), вып. 6, 53–122.
5. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* I. *Групповые алгебры полудиэдральных групп.* — Алгебра и анализ, **21** (2009), вып. 2, 1–51.
6. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **386** (2011), 144–202.
7. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* IV. *Алгебра когомологий для серии $SD(2\mathcal{B})_2(k,t,c)$ при $c = 0$.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **413** (2013), 45–92.
8. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* V. *Серия $SD(3\mathcal{K})$.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **435** (2015), 5–32.
9. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **375** (2010), 92–129.
10. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* III. *Локальные алгебры в характеристике* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер.1. Мат., мех., астрон. Вып.1 (2010), 28–38.
11. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* IV. *Серия $D(2\mathcal{B})(k,s,0)$.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **423** (2014), 67–104.

12. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, Д. Б. Романова, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* V. *Серия* $D(3\mathcal{K})$ *в характеристике, отличной от* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **430** (2014), 74–102.
13. А. И. Генералов, Д. Б. Романова, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* VI. *Серия* $D(2\mathcal{B})(k,s,1)$. — Алгебра и анализ, **27** (2015), вып. 6, 89–116.
14. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* I: *обобщенные группы кватернионов.* — Алгебра и анализ, **18** (2006), вып. 1, 55–107.
15. А. И. Генералов, А. А. Иванов, С. О. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* II. *Серия* $Q(2\mathcal{B})_1$ *в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **349** (2007), 53–134.
16. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* III. *Алгебры с малым параметром.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **356** (2008), 46–84.
17. А. А. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа: серия* $Q(2\mathcal{B})_1(k,s,a,c)$ *над полем характеристики не* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер.1. Мат., мех., астрон. Вып.1 (2010), 63–72.
18. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр Лю–Шульца.* — Алгебра и анализ, **18** (2006), вып. 4, 39–82.
19. А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **321** (2005), 36–66.
20. М. А. Качалова, *Когомологии Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **330** (2006), 173–200.
21. М. А. Пустовых, *Кольцо когомологий Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **388** (2011), 210–246.
22. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. I. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **343** (2007), 121–182.
23. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. II. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **365** (2009), 63–121.
24. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. III. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **386** (2011), 100–128.
25. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда нестандартных самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **388** (2011), 48–99.
26. Ю. В. Волков, *Алгебра когомологий Хохшильда для одной серии самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. — Алгебра и анализ, **23** (2011), вып. 5, 99–139.
27. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. IV. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **388** (2011), 100–118.
28. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. V. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **394** (2011), 140–173.
29. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. VI. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **423** (2014), 33–56.
30. М. А. Пустовых, *Кольцо когомологий Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* E_6. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **423** (2014), 205–243.

31. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда целочисленного группового кольца диэдральной группы.* I. *Чётный случай.* — Алгебра и анализ, **19** (2007), вып. 5, 70–123.
32. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда целочисленного группового кольца полудиэдральной группы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **388** (2011), 119–151.
33. T. Hayami, *Hochschild cohomology ring of the integral group ring of dihedral groups.* — Tsukuba J. Math., **31** (2007), 99–127.
34. T. Hayami, *Hochschild cohomology ring of the integral group ring of the semidihedral 2-groups.* — Algebra Colloq., **18** (2011), No. 2, 241–258.
35. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, С. О. Иванов, *О построении бимодульных резольвент с помощью леммы Хаппеля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **375** (2010), 61–70.
36. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа.* V. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **394** (2011), 194–208.

Generalov A. I. Hochschild cohomology for algebras of semidihedral type. VII. Algebras with a small parameter.

We compute the Hochschild cohomology groups for algebras of semidihedral type which are contained in the family $SD(2\mathcal{B})_2(k,t,c)$ (from the famous K. Erdmann's classification) in the case where $k=1$. In the calculation, we use the beforehand construction of the minimal bimodule resolution for algebras from the subfamily under discussion.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ageneralov@gmail.com

Поступило 8 августа 2016 г.