Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 452, 2016 г.

Е. Ю. Воронецкий

НОРМАЛИЗАТОРЫ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ НАДГРУПП $\mathrm{Ep}(2, A)$

В данной статье находятся нормализаторы в группе $\mathrm{GL}(2, A)$ подгрупп $\mathrm{EEp}(2, A, I) = \mathrm{Ep}(2, A)\,\mathrm{E}(2, A, I)$ для кольца A с инволюцией и системой ортогональных идемпотентов, удовлетворяющего естественному ограничению на ранг. Здесь $\mathrm{Ep}(2, A)$ – элементарная симплектическая подгруппа, вложенная в $\mathrm{GL}(2, A)$, а $\mathrm{E}(2, A, I)$ – относительная элементарная подгруппа уровня I группы $\mathrm{GL}(2, A)$, $I \trianglelefteq A$ – двусторонний самосопряжённый идеал.

Этот результат нужен для полного решения задачи об описании надгрупп $\mathrm{Ep}(2, A)$ в $\mathrm{GL}(2, A)$. Данная задача была поставлена в статье Николая Вавилова и Виктора Петрова [1], проблема 2 (см. также обзор [3], проблема 19). Частный случай доказываемого утверждения (например, если $A = \mathrm{M}(n, B)$, B – коммутативное кольцо, а инволюция – обычное транспонирование) можно найти в той же статье [1]. Ещё более общее утверждение, не являющееся частным случаем нашего, доказано в другой статье В. Петрова [6].

Основным утверждением, доказываемым в настоящей статье, является

Теорема 1. *Пусть A – кольцо с идемпотентами и инволюцией, удовлетворяющее локальному условию стабильности (определения будут даны ниже). Кроме того, пусть 2 не является делителем нуля в A или все элементы вида $e_i a e_i$ самосопряжены (e_i – зафиксированные идемпотенты). Тогда для любого самосопряжённого идеала $I \trianglelefteq A$ нормализатор $\mathrm{EEp}(2, A, I)$ в $\mathrm{GL}(2, A)$ равен*

$$\{g \in \mathrm{GL}(2, A) \mid g + I \in \mathrm{GSp}(2, A/I)\}\},$$

где $\mathrm{GSp}(2, A/I)$ – полная симплектическая группа.

Кроме того, получено ещё несколько близких результатов – соответствующие обобщения теоремы Суслина $\mathrm{E}(n, R, I) \trianglelefteq \mathrm{GL}(n, R)$ и стандартной коммутационной формулы

$$[\mathrm{E}(n, R), \mathrm{GL}(n, R, I)] = \mathrm{E}(n, R, I)$$

Ключевые слова: симплектическая группа, унитарная группа.

для коммутативного R.

Предложение 1. *Пусть в кольце R зафиксирована полная система из $n \geqslant 3$ попарно ортогональных идемпотентов, причём каждый из этих идемпотентов порождает R как двусторонний идеал. Кроме того, пусть R удовлетворяет локальному условию стабильности. Тогда для любого $I \trianglelefteq A$ выполнено $\mathrm{E}(R, I) \trianglelefteq \mathrm{GL}(R)$ и даже $[\mathrm{E}(R, I), \mathrm{GL}(R)] = \mathrm{E}(R, I)$.*

Предложение 2. *Пусть A – кольцо с полной системой из $n \geqslant 2$ попарно ортогональных идемпотентов, причём каждый из этих идемпотентов порождает A как двусторонний идеал и A удовлетворяет локальному условию стабильности. Тогда для любого двустороннего идеала $I \trianglelefteq A$ $[\mathrm{E}(2, A), \mathrm{GL}(2, A, I)] = \mathrm{E}(2, A, I)$.*

Статья устроена следующим образом: в §1 мы дадим определения всех групп и условия стабильности, в §2 докажем простейшие свойства относительных элементарных подгрупп. §3 посвящена выведу ряда следствий из условия стабильности. Потом в §4 будет приведено доказательство предложений 1 и 2, а в §5 – доказательство теоремы 1.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Н. А. Вавилову.

§1. Определения

Будем предполагать, что все рассматриваемые кольца ассоциативные и имеют единицу. Под инволюцией в кольце R мы понимаем антиавтоморфизм порядка 2. Через $\mathrm{M}(n, R)$ будем обозначать кольцо матриц размера $n \times n$ над кольцом R, через $\mathrm{GL}(n, R)$ – группу обратимых матриц размера $n \times n$ над кольцом R. Другими словами, $\mathrm{GL}(n, R) = \mathrm{M}(n, R)^*$, где через R^* обозначена группа обратимых элементов кольца R. Через $\mathrm{GL}(R)$ будем обозначать просто R^*, а для двустороннего идеала $I \trianglelefteq R$ определим $\mathrm{GL}(R, I)$ как ядро естественного гомоморфизма $\mathrm{GL}(R) \to \mathrm{GL}(R/I)$.

Для кольца R с инволюцией $r \mapsto \overline{r}$ положим $\mathrm{H}(R) = \{r \in R \mid r = \overline{r}\}$ и $\mathrm{AH}(R) = \{r \in R \mid r + \overline{r} = 0\}$ – множества эрмитовых и антиэрмитовых элементов, для идеала $I \trianglelefteq R$ с $\overline{I} = I$ аналогично определим $\mathrm{H}(I)$ и $\mathrm{AH}(I)$. Для произвольного кольца R через $\mathrm{C}(R)$ обозначим его центр, это же обозначение будем использовать для центра группы. Через $\mathrm{N}_G(H)$ и $\mathrm{C}_G(H)$ будем обозначать нормализатор и централизатор подгруппы H в группе G соответственно.

В дальнейшем нам понадобится несколько групповых тождеств, которые мы будем использовать без специального указания. А именно, это тождества

$$[xy, z] = {}^x[y, z][x, z],$$
$$[x, yz] = [x, y] \cdot {}^y[x, z],$$

тождество Холла

$$[[x, y], {}^y z] \cdot [[y, z], {}^z x] \cdot [[z, x], {}^x y] = 1$$

и тождество Холла–Витта

$${}^x[[x^{-1}, y], z] \cdot {}^z[[z^{-1}, x], y] \cdot {}^y[[y^{-1}, z], x] = 1.$$

Подробнее про них написано в [2]. Также по индукции из первого тождества можно получить

$$[a_1 \dots a_n, b] = {}^{a_1 \dots a_{n-1}}[a_n, b] \cdot {}^{a_1 \dots a_{n-2}}[a_{n-1}, b] \cdot \dots \cdot [a_1, b],$$

а из второго –

$$[a, b_1 \dots b_n] = [a, b_1] \cdot {}^{b_1}[a, b_2] \cdot \dots \cdot {}^{b_1 \dots b_{n-1}}[a, b_n].$$

Теперь перейдём к новым обозначениям. Под кольцом с идемпотентами мы будем понимать кольцо R, в котором зафиксирована полная система из $n \geqslant 3$ попарно ортогональных идемпотентов $e_1, \dots, e_n$ (обычно мы их будем обозначать именно так), причём каждый из этих идемпотентов порождает R как двусторонний идеал, то есть для каждого e_i найдутся $\{a_k\}_{k=1}^{m_i}$ и $\{b_k\}_{k=1}^{m_i}$ из R, удовлетворяющие соотношению $1 = \sum\limits_{k=1}^{m_i} a_k e_i b_k$. Ясно, что факторизация по двустороннему идеалу и локализация по мультипликативному подмножеству центра сохраняют структуру кольца с идемпотентами. Для кольца с идемпотентами A на кольце $R = \mathrm{M}(2, A)$ заведём структуру кольца с идемпотентами: в качестве фиксированных идемпотентов возьмём

$$E_i = \begin{cases} \left(\begin{smallmatrix} e_i & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), & 1 \leqslant i \leqslant n, \\ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_{-i} \end{smallmatrix}\right), & -n \leqslant i \leqslant -1, \end{cases}$$

где $e_1, \dots, e_n$ – фиксированные идемпотенты A. Для такой пары (A, R) кольцо A мы обычно будем вкладывать в R через $a \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$. В дальнейшем мы постоянно будем пользоваться естественной биекцией между двусторонними идеалами A и R (а именно, $I \trianglelefteq A \mapsto \left(\begin{smallmatrix} I & I \\ I & I \end{smallmatrix}\right) \trianglelefteq R$).

Кольцом с идемпотентами и инволюцией будем называть кольцо с идемпотентами, в котором также есть инволюция, оставляющая все фиксированные идемпотенты на месте. Нетрудно видеть, что факторизация по двустороннему самосопряжённому идеалу и локализация по самосопряжённому мультипликативному подмножеству центра сохраняют структуру кольца с идемпотентами и инволюцией. Для каждого кольца с идемпотентами и инволюцией A на кольце $R = \mathrm{M}(2, A)$ мы заведём структуру кольца с идемпотентами и инволюцией: идемпотенты были определены выше, а инволюцию зададим формулой

$$\overline{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)} = \left(\begin{smallmatrix} \overline{d} & -\overline{b} \\ -\overline{c} & \overline{a} \end{smallmatrix}\right),$$

где $a \mapsto \overline{a}$ – инволюция на A. Биекция между идеалами A и R также индуцирует биекцию между самосопряжёнными двусторонними идеалами этих колец.

В качестве основного примера кольца с идемпотентами и инволюцией будем рассматривать кольцо $\mathrm{M}(n, B)$, где $n \geqslant 3$, B – коммутативное кольцо, $e_i = e_{i,i}$ – стандартные матричные единицы, а инволюция является сопряжением.

Пусть дано кольцо R с идемпотентами, но без выделенной инволюции. Будем говорить, что R удовлетворяет условию стабильности, если для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ и $u \in R$ существует такое $a \in R$, что пересечение максимальных собственных R-подмодулей Re_1, содержащих $(1 - e_i)(1 + ae_i)ue_1$, также содержит и $e_i ue_1$. Будем говорить, что R удовлетворяет локальному условию стабильности, если для каждого максимального идеала $M \lhd \mathrm{C}(R)$ существует мультипликативное подмножество $S \subseteq \mathrm{C}(R) \setminus M$, для которого $S^{-1}R$ удовлетворяет условию стабильности.

Предположим теперь, что R – кольцо с идемпотентами и инволюцией. В этом случае будем говорить, что R удовлетворяет локальному условию стабильности, если для любого максимального идеала $M \lhd \mathrm{H}(\mathrm{C}(R))$ найдётся такое мультипликативное подмножество $S \subseteq \mathrm{H}(\mathrm{C}(R)) \setminus M$, что $S^{-1}R$ удовлетворяет условию стабильности.

Нетрудно видеть, что для кольца $R = \mathrm{M}(n, B)$ с идемпотентами $e_{i,i}$ без инволюции условие стабильности в точности означает, что $\mathrm{asr}(B) \leqslant n - 1$, где $\mathrm{asr}(B)$ – абсолютный стабильный ранг B. Локальное же условие стабильности означает, что $\mathrm{lasr}(B) \leqslant n - 1$, где $\mathrm{lasr}(B)$ – локальный абсолютный стабильный ранг B. Если B коммутативно, то, как известно, локальное условие стабильности заведомо выполнено.

Перейдём теперь к определению различных групп. Если R – кольцо с идемпотентами, $I \trianglelefteq R$ – двусторонний идеал, то положим

$$\mathrm{E}(I) = \langle t_{i,j}(a) \mid i \neq j, a \in I \rangle,$$

где $t_{i,j}(a) = 1 + e_i a e_j$ – элементарная трансвекция, и

$$\mathrm{E}(R, I) = {}^{\mathrm{E}(R)}\,\mathrm{E}(I).$$

Группа $\mathrm{E}(R) = \mathrm{E}(R, R)$ называется элементарной подгруппой $\mathrm{GL}(R)$, а $\mathrm{E}(R, I)$ – относительной элементарной подгруппой уровня I.

Пусть A – кольцо с идемпотентами и инволюцией, $R = \mathrm{M}(2, A)$. Тогда можно определить симплектическую группу

$$\mathrm{Sp}(R) = \mathrm{Sp}(2, A) = \{g \in \mathrm{GL}(R) \mid g^{-1} = \overline{g}\}.$$

Полной симплектической группой назовём

$$\mathrm{GSp}(R) = \mathrm{GSp}(2, A) = \{g \in \mathrm{GL}(R) \mid g\overline{g} = \overline{g}g \in \mathrm{C}(R)\}.$$

Ясно, что это подгруппа в $\mathrm{GL}(R)$, содержащая $\mathrm{Sp}(R)$. Для самосопряжённого идеала $I = \overline{I} \trianglelefteq R$ также определим группу

$$\mathrm{CGSp}(R, I) = \{g \in \mathrm{GL}(R) \mid g + I \in \mathrm{GSp}(R/I)\}.$$

Пусть опять A – кольцо с идемпотентами и инволюцией, $R = \mathrm{M}(2, A)$. Определим элементарные симплектические трансвекции

$$T_{i,j}(a) = 1 + E_i a E_j - E_{-j} \overline{a} E_{-i} \text{ при } a \in R,\ i \neq \pm j;$$
$$T_i(a) = 1 + E_i a E_{-i} \text{ при } a \in \mathrm{AH}(R).$$

Ясно, что $\overline{T_{i,j}(a)} = T_{i,j}(a)^{-1} = T_{-j,-i}(\overline{a}) = T_{i,j}(-a)$ и $\overline{T_i(b)} = T_i(b)^{-1} = T_i(-b)$ при условии, что $i \neq \pm j$ и $a \in R, b \in \mathrm{AH}(R)$. Далее, определим элементарную симплектическую группу

$$\mathrm{Ep}(R) = \mathrm{Ep}(2, A) = \langle T_{i,j}(a), T_i(b) \mid i \neq \pm j, a \in R, b \in \mathrm{AH}(R) \rangle \leqslant \mathrm{GL}(R).$$

Заметим, что это подгруппа в $\mathrm{Sp}(R)$. Наконец, для двустороннего самосопряжённого идеала $I = \overline{I} \trianglelefteq R$ определим группу

$$\mathrm{EEp}(R, I) = \mathrm{EEp}(2, A, I) = \mathrm{Ep}(R)\,\mathrm{E}(R, I).$$

Это, действительно, группа согласно леммам 3 и 4.

§2. Элементарные трансвекции

В этом разделе R – кольцо с идемпотентами.

Лемма 1. *Выполнены следующие коммутационные соотношения*:

(1) $t_{i,j}(a)t_{i,j}(b) = t_{i,j}(a+b)$ *при* $i \neq j$;
(2) $[t_{i,j}(a), t_{k,l}(b)] = 1$ *при* $i \neq j \neq k \neq l \neq i$;
(3) $[t_{i,j}(a), t_{j,k}(b)] = t_{i,k}(ae_jb)$ *при* $i \neq j \neq k \neq i$;
(4) $[t_{i,j}(a), t_{k,i}(b)] = t_{k,j}(-be_ia)$ *при* $i \neq j \neq k \neq i$.

Доказательство.

(1) $t_{i,j}(a)t_{i,j}(b) = (1+e_iae_j)(1+e_ibe_j) = 1+e_i(a+b)e_j+e_iae_je_ibe_j = t_{i,j}(a+b)$.
(2) $[t_{i,j}(a), t_{k,l}(b)] = (1+e_iae_j+e_kbe_l)(1-e_iae_j-e_kbe_l) = 1$.
(3) $[t_{i,j}(a), t_{j,k}(b)] = (1+e_iae_j+e_jbe_k+e_iae_jbe_k)(1-e_iae_j-e_jbe_k+e_iae_jbe_k) = 1+2e_iae_jbe_k-e_iae_jbe_k = t_{i,k}(ae_jb)$;
(4) $[t_{i,j}(a), t_{k,i}(b)] = (1+e_iae_j+e_kbe_i)(1-e_iae_j-e_kbe_i) = 1-e_kbe_iae_j = t_{k,j}(-be_ia)$. □

Следующая лемма взята из [2], теорема 11.

Лемма 2. *Для* $I \trianglelefteq R$ *группа* $\mathrm{E}(R, I)$ *порождена элементами*

$$z_{i,j}(a,b) = {}^{t_{j,i}(b)}t_{i,j}(a), \quad a \in I, \quad b \in R, \quad i \neq j.$$

Доказательство. Ясно, что $\mathrm{E}(I)$ порождается $z_{i,j}(a,b)$, поэтому достаточно доказать, что элементы вида ${}^{t_{p,q}(c)}z_{i,j}(a,b)$ представляются в виде произведения элементов вида $z_{i,j}(a,b)$. Если p, q, i и j все различны или если $p=j$ и $q=i$, то это очевидно.

Если $p=j$ и $q \neq i$, то

$$\begin{aligned} {}^{t_{j,q}(c)}z_{i,j}(a,b) &= {}^{t_{j,i}(b)}t_{i,q}(-ae_jc) \cdot z_{i,j}(a,b) \\ &= t_{j,q}(-be_iae_jc)t_{i,q}(-ae_jc)z_{i,j}(a,b), \end{aligned}$$

все три сомножителя имеют требуемый вид. Аналогично разбирается случай $p \neq j$, $q = i$.

Если $p = i$, $q \neq j$, то

$${}^{t_{i,q}(c)}z_{i,j}(a,b) = {}^{t_{j,q}(-be_ic)t_{j,i}(b)t_{i,q}(c)}t_{i,j}(a) = {}^{t_{j,q}(-be_ic)}z_{i,j}(a,b),$$

и аналогично при $p \neq i$, $q = j$.

Остался случай $p = i$, $q = j$. Тогда выберем индекс $k \neq i, j$ и используем равенство $1 = \sum_r \alpha_r e_k \beta_r$:

$$\begin{aligned}
{}^{t_{i,j}(c)}z_{i,j}(a,b) = {}^{t_{i,j}(c)t_{j,i}(b)}t_{i,j}(a) &= \prod_r \bigl[{}^{t_{i,j}(c)t_{j,i}(b)}t_{i,k}(\alpha_r), {}^{t_{i,j}(c)t_{j,i}(b)}t_{k,j}(\beta_r a)\bigr] \\
&= \prod_r \bigl[{}^{t_{i,j}(c)}\bigl(t_{j,k}(be_i\alpha_r)t_{i,k}(\alpha_r)\bigr), {}^{t_{i,j}(c)}\bigl(t_{k,i}(-\beta_r a e_j b)t_{k,j}(\beta_r a)\bigr)\bigr] \\
&= \prod_r \bigl[t_{i,k}(x_r)t_{j,k}(y_r), t_{k,j}(z_r)t_{k,i}(w_r)\bigr],
\end{aligned}$$

где $x_r = ce_jbe_i\alpha_r + \alpha_r$, $y_r = be_i\alpha_r$, $z_r = \beta_r a e_j b e_i c + \beta_r a \in I$ и $w_r = -\beta_r a e_j b \in I$.

Далее,

$$\begin{aligned}
[t_{i,k}(x_r)t_{j,k}(y_r), t_{k,j}(z_r)t_{k,i}(w_r)] = {}^{t_{i,k}(x_r)}&[t_{j,k}(y_r), t_{k,j}(z_r)] \cdot [t_{i,k}(x_r), t_{k,j}(z_r)] \\
\times\, {}^{t_{k,j}(z_r)}&[t_{i,k}(x_r)t_{j,k}(y_r), t_{k,i}(w_r)] \\
= {}^{t_{i,k}(x_r)}&z_{k,j}(z_r, y_r) \cdot {}^{t_{i,k}(x_r)}t_{k,j}(-z_r) \\
\times\, &t_{i,j}(x_r e_k z_r) \cdot {}^{t_{k,j}(z_r)t_{i,k}(x_r)}t_{j,i}(y_r e_k w_r) \\
\times\, {}^{t_{k,j}(z_r)}&z_{k,i}(w_r, x_r) \cdot {}^{t_{k,j}(z_r)}t_{k,i}(-w_r).
\end{aligned}$$

Здесь все сомножители, кроме четвёртого, представляются в требуемом виде, согласно уже доказанному. Четвёртый сомножитель преобразуем:

$$\begin{aligned}
{}^{t_{k,j}(z_r)t_{i,k}(x_r)}t_{j,i}(y_r e_k w_r) &= {}^{t_{k,j}(z_r)}(t_{j,k}(-y_r e_k w_r e_i x_r)t_{j,i}(y_r e_k w_r)) \\
&= z_{j,k}(-y_r e_k w_r e_i x_r, z_r)t_{k,i}(z_r e_j y_r e_k w_r)t_{j,i}(y_r e_k w_r). \quad \square
\end{aligned}$$

Лемма 3. *Группа* $\mathrm{E}(R)$ *совершенна. Более того,* $[\mathrm{E}(R,I), \mathrm{E}(R)] = \mathrm{E}(R,I)$ *для* $I \trianglelefteq R$.

Доказательство. Ясно, что $[\mathrm{E}(R,I), \mathrm{E}(R)] \leqslant \mathrm{E}(R,I)$, поэтому достаточно доказать $\mathrm{E}(I) \subseteq [\mathrm{E}(I), \mathrm{E}(R)]$. Для фиксированных индексов $i \neq j$ и $a \in I$ выберем индекс k, отличный от i и j, тогда $1 = \sum_r \alpha_r e_k \beta_r$ для некоторых α_r и β_r. Отсюда получаем

$$t_{i,j}(a) = t_{i,j}\bigl(a \sum_r \alpha_r e_k \beta_r\bigr) = \prod_r [t_{i,k}(a\alpha_r), t_{k,j}(\beta_r)] \in [\mathrm{E}(I), \mathrm{E}(R)]. \quad \square$$

Лемма 4. *Элементы вида* $1+(1-e_i)ue_i$, *где* $u\in I$, *лежат в* $\mathrm{E}(I)$. *Также, если* $R=\mathrm{M}(2,A)$, *где* A *– кольцо с идемпотентами и инволюцией, то элементы вида* $\left(\begin{smallmatrix}1&a\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ *и элементарные симплектические трансвекции (а, значит, и вся* $\mathrm{Ep}(R)$*) лежат в* $\mathrm{E}(R)$.

Доказательство. Ясно, что $1+(1-e_i)ue_i=\prod_{j\neq i}t_{j,i}(u)$. В случае $R=\mathrm{M}(2,A)$ для элементарных трансвекций имеем: $T_{i,j}(a)=t_{i,j}(a)t_{-j,-i}(-\overline{a})$ и $T_i(b)=t_{i,-i}(b)$ при $b=\overline{b}$. Элементы вида $\left(\begin{smallmatrix}1&a\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, в свою очередь, представляются в виде $\prod_{i>0>j}t_{i,j}(a)$. □

§3. Условие стабильности

Ниже мы выведем ряд следствий из условия стабильности. Для краткости для кольца с идемпотентами R через $\mathrm{J}(x,R)$ обозначим пересечение максимальных собственных подмодулей в Re_1, содержащих x (в обозначении $\mathrm{J}(x,R)$ второй аргумент часто будет опускаться). Условие стабильности можно кратко переписать в виде

$$\forall i\quad \forall u\in R\quad \exists a\in R\quad e_iue_1\in\mathrm{J}((1-e_i)(1+ae_i)ue_1).$$

Лемма 5. *Если* R *– кольцо с идемпотентами, удовлетворяющее условию стабильности, и* $I\trianglelefteq R$ *– двусторонний идеал, то* A/I *тоже удовлетворяет условию стабильности.*

Доказательство. Зафиксируем $1\leqslant i\leqslant n$ и $u+I\in R/I$. Тогда, так как само R удовлетворяет условию стабильности, существует $a\in R$ такое, что $e_iue_1\in\mathrm{J}((1-e_i)(1+ae_i)ue_1,R)$. Заметим теперь, что $\mathrm{J}(x+I,R/I)=\mathrm{J}(x,R)+I(e_1+I)$, откуда $(e_i+I)(u+I)(e_1+I)\in\mathrm{J}((1-(e_i+I))(1+(a+I)(e_i+I))(u+I)(e_1+I),R/I)$, поэтому R/I удовлетворяет условию стабильности. □

Выведем теперь аналогичное утверждение про локальное условие стабильности.

Лемма 6. *Пусть* R *– кольцо с идемпотентами и инволюцией, удовлетворяющее локальному условию стабильности,* $I=\overline{I}\trianglelefteq R$. *Тогда* R/I *тоже удовлетворяет локальному условию стабильности. Это утверждение также верно, если* R *не имеет инволюции и* $I\trianglelefteq R$.

Доказательство. Обозначим через π естественный гомоморфизм $R\to R/I$ и зафиксируем некоторый максимальный идеал

$$M\lhd\mathrm{H}(\mathrm{C}(R/I)).$$

Так как имеется включение $\pi(\mathrm{H}(\mathrm{C}(R))) \subseteq \mathrm{H}(\mathrm{C}(R/I))$, то

$$M' = \pi^{-1}(M) \cap \mathrm{H}(\mathrm{C}(R))$$

– некоторый собственный идеал $\mathrm{H}(\mathrm{C}(R))$. Значит, он содержится в максимальном идеале $N \lhd \mathrm{H}(\mathrm{C}(R))$. Обозначим через S' мультипликативное подмножество $\mathrm{H}(\mathrm{C}(R)) \setminus N$, для которого $S'^{-1}R$ удовлетворяет условию стабильности (такое существует по условию), а через S обозначим $\pi(S') \subseteq \mathrm{H}(\mathrm{C}(R/I)) \setminus M$. Тогда $S'^{-1}R/S'^{-1}I \cong S^{-1}(R/I)$ удовлетворяет условию стабильности по лемме 5. Если инволюции нет, то доказательство сохраняется, если считать, что $\mathrm{H}(R) = R$. $\square$

Лемма 7. *Если A – кольцо с идемпотентами, удовлетворяющее условию стабильности, то и $R = \mathrm{M}(2, A)$ (с идемпотентами $E_i = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_{-i} \end{smallmatrix}\right)$ при $-n \leqslant i \leqslant -1$ и $E_i = \left(\begin{smallmatrix} e_i & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ при $1 \leqslant i \leqslant n$) удовлетворяет условию стабильности. Это остаётся верным для локального условия стабильности вне зависимости от наличия на A инволюции.*

Доказательство. Не умаляя общности, $1 \leqslant i \leqslant n$, и пусть $u = \left(\begin{smallmatrix} u_1 & 0 \\ u_2 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in R$ (ясно, что второй столбец u не участвует в формулировке условия стабильности). Тогда, так как A удовлетворяет условию стабильности, существует $a \in A$, для которого $e_i u_1 e_1 \in \mathrm{J}((1 - e_i)(1 + ae_i)u_1 e_1, A)$. Положим $a' = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, тогда $E_i u E_1 = \left(\begin{smallmatrix} e_i u_1 e_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{J}((1-e_i)(1+ae_i)u_1 e_1, A) & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \subseteq \mathrm{J}((1 - E_i)(1 + a'E_i)uE_1, R)$. Утверждение про локальное условие стабильности отсюда следует, так как $\mathrm{C}(R) = \mathrm{C}(A)$. $\square$

Теперь докажем аналог неравенства $\mathrm{sr}(B) \leqslant n - 1$ (когда $R = \mathrm{M}(n, B)$), где $\mathrm{sr}(B)$ – стабильный ранг B.

Лемма 8. *Если R – кольцо с идемпотентами, удовлетворяющее условию стабильности, а $u \in R$ такое, что $Rue_1 = Re_1$, то для всех i существует $a \in R$, для которого $R(1 - e_i)(1 + ae_i)ue_1 = Re_1$.*

Доказательство. Так как R удовлетворяет условию стабильности, то найдётся $a \in R$, для которого $e_i ue_1 \in \mathrm{J}((1 - e_i)(1 + ae_i)ue_1)$. Тогда

$$(1 + (1 - e_i)ae_i)ue_1 = (1 - e_i)(1 + ae_i)ue_1 + e_i ue_1 \in \mathrm{J}((1 - e_i)(1 + ae_i)ue_1),$$

$$ue_1 = (1 - (1 - e_i)ae_i)(1 + (1 - e_i)ae_1)ue_1 \in \mathrm{J}((1 - e_i)(1 + ae_i)ue_1).$$

В силу $Rue_1 = Re_1$ мы получаем, что $\mathrm{J}((1 - e_i)(1 + ae_i)ue_1) = Re_1$. Если вдруг $R(1 - e_i)(1 + ae_i)ue_1 \neq Re_1$, то $R(1 - e_i)(1 + ae_i)ue_1$ содержится в максимальном собственном подмодуле Re_1 по лемме Цорна и $\mathrm{J}((1-e_i)(1+ae_i)ue_1 \neq Re_1$, противоречие. Значит, $R(1-e_i)(1+ae_i)ue_1 = Re_1$. □

Наконец, докажем аналог неравенства $\Lambda\mathrm{sr}(B) \leqslant n-1$, если $R = \mathrm{M}(n, B)$, где $\Lambda\mathrm{sr}(B)$ – Λ-стабильный ранг кольца B с форменным параметром Λ, подробнее см. в [5].

Лемма 9. *Пусть A – кольцо с идемпотентами и инволюцией, удовлетворяющее условию стабильности. Тогда для любых $u, v \in A$ из соотношения $Aue_1 + Ave_1 = Ae_1$ следует, что существует $a \in \mathrm{H}(A)$ такое, что $A(u+av)e_1 = Ae_1$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathrm{J}(x, y)$ пересечение всех максимальных собственных подмодулей Ae_1, содержащих x и y. Также положим $f_k = e_{n-k+1} + \ldots + e_n$ при $0 \leqslant k \leqslant n$. Построим последовательности $u_k \in A$ и $v_k \in A$ при $0 \leqslant k \leqslant n$, где $u_0 = u$, $v_0 = v$. Мы потребуем, чтобы для всех $0 \leqslant k < n$ $u_{k+1} = \varepsilon_k u_k + a_k v_k$, $v_{k+1} = \overline{\varepsilon_k^{-1}} v_k$ при некоторых $\varepsilon_k \in A^*$, $a_k \in \varepsilon_k \mathrm{H}(A)$ и для всех k было выполнено равенство $\mathrm{J}(f_k u_k e_1, (1-f_k)v_k e_1) = \mathrm{J}(f_k u_k e_1, v_k e_1)$.

Пусть у нас уже есть u_k, v_k и мы хотим найти u_{k+1}, v_{k+1}. Благодаря условию стабильности найдётся такое $\alpha \in A$, что

$$e_{n-k} v_k e_1 \in \mathrm{J}\big((1-e_{n-k})(1+\alpha e_{n-k})(f_k u_k + (1-f_k)v_k)e_1\big).$$

Пусть $\varepsilon_k = 1 - e_{n-k}\overline{\alpha}(1-f_{k+1})$ и $a_k = e_{n-k}\overline{\alpha} f_k + f_k \alpha e_{n-k}$. Ясно, что $\varepsilon_k a_k = a_k \in \mathrm{H}(A)$. Тогда

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= (1 - e_{n-k}\overline{\alpha}(1-f_{k+1}))u_k + (e_{n-k}\overline{\alpha} f_k + f_k \alpha e_{n-k})v_k, \\ v_{k+1} &= (1 + (1-f_{k+1})\alpha e_{n-k})v_k. \end{aligned}$$

Проверим вначале, что

$$\mathrm{J}(f_k u_{k+1} e_1, (1-f_{k+1})v_{k+1} e_1) = \mathrm{J}(f_k u_{k+1} e_1, (1-f_k)v_{k+1} e_1).$$

Ясно, что левая часть содержится в правой, а обратное включение следует из

$$\begin{aligned} e_{n-k} v_{k+1} e_1 = e_{n-k} v_k e_1 &\in \mathrm{J}\big((1-e_{n-k})(1+\alpha e_{n-k})(f_k u_k + (1-f_k)v_k)e_1\big) \\ &= \mathrm{J}\big((f_k u_k + (1-f_{k+1})v_k + (1-e_{n-k})\alpha e_{n-k} v_k)e_1\big) \\ &= \mathrm{J}\big((f_k u_{k+1} + (1-f_{k+1})v_{k+1})e_1\big). \end{aligned}$$

Из этого равенства и

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}(f_k u_{k+1} e_1, (1-f_k) v_{k+1} e_1) &= \mathrm{J}\big(f_k u_{k+1} e_1, (1 - f_k + (1 - f_{k+1}) \alpha e_{n-k}) v_k e_1\big) \\
&= \mathrm{J}\big(f_k (u_k + \alpha e_{n-k} v_k) e_1, (1 - f_k) v_k e_1\big) \\
&= \mathrm{J}(f_k u_k e_1, (1 - f_k) v_k e_1) \\
&= \mathrm{J}(f_k u_k e_1, v_k e_1) \\
&= \mathrm{J}(f_k (u_k + \alpha e_{n-k} v_k) e_1, v_k e_1) \\
&= \mathrm{J}(f_k u_{k+1} e_1, v_{k+1} e_1)
\end{aligned}$$

уже вытекает, что $\mathrm{J}(f_k u_{k+1} e_1, (1 - f_{k+1}) v_{k+1} e_1) = \mathrm{J}(f_k u_{k+1} e_1, v_{k+1} e_1)$, и окончательно $\mathrm{J}(f_{k+1} u_{k+1} e_1, (1 - f_{k+1}) v_{k+1}, e_1) = \mathrm{J}(f_{k+1} u_{k+1} e_1, v_{k+1} e_1)$.

Наконец, имеем $\mathrm{J}(u_n e_1) = \mathrm{J}(u_n e_1, v_n e_1) = A e_1$ (правое равенство следует из $A u_k e_1 + A v_k e_1 = A e_1$ для всех k), поэтому $A u_n e_1 = A e_1$. Вспомним, что

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & \overline{\varepsilon_{n-1}}^{-1} \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & a_0 \\ 0 & \overline{\varepsilon_0}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Произведение всех квадратных матриц справа лежит в $\mathrm{Sp}(2, A)$ и является верхнетреугольной матрицей, поэтому оно имеет вид $\begin{pmatrix} \varepsilon & b \\ 0 & \overline{\varepsilon}^{-1} \end{pmatrix}$ при $\varepsilon \in A^*$, $b \in \varepsilon\,\mathrm{H}(A)$. Значит, $u_n = \varepsilon u + b v$, и можно положить $a = \varepsilon^{-1} b$. $\square$

Ясно, что последнюю лемму можно переформулировать: если A – кольцо с идемпотентами и инволюцией, удовлетворяющее условию стабильности, а $R = \mathrm{M}(2, A)$, то для всех $u \in R$ таких, что $R u E_1 = R E_1$, найдётся $a = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(R)$ такое, что $R\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} a u E_1 = R E_1$.

§4. Коммутационные формулы для $\mathrm{E}(R, I)$

В данном разделе всюду R – кольцо с идемпотентами.

Введём кольцо $R' = (1 - e_1) R (1 - e_1)$, тогда есть естественное вложение $\mathrm{GL}(R') \to \mathrm{GL}(R)$, $g \mapsto g + e_1$. Нетрудно видеть, что это гомоморфизм групп, поэтому $\mathrm{GL}(R')$ будем отождествлять с её образом в $\mathrm{GL}(R)$. Через $\mathrm{GL}(R', I)$ для $I \trianglelefteq R$ обозначим образ $\mathrm{GL}(R', R' \cap I)$ при вложении в $\mathrm{GL}(R)$.

Лемма 10. *Пусть $I \trianglelefteq R$, тогда группа $\mathrm{GL}(R')$ нормализует $\mathrm{E}(R, I)$. Более того, для $c \in \mathrm{C}(R)$ имеем:* ${}^{\mathrm{GL}(R')}\,\mathrm{E}(Ic^2) \leqslant {}^{\mathrm{E}(Rc)}\,\mathrm{E}(Ic)$.

Доказательство. Для $g+e_1 \in \mathrm{GL}(R')$ и $i \neq j \neq 1 \neq i$, $a \in I$ имеем $(g+e_1)^{-1} = h+e_1$, где $gh = 1-e_1$, и

$$^{g+e_1}t_{i,1}(ac) = (g + ge_iace_1 + e_1)(h+e_1) = 1 + ge_iace_1 \in \mathrm{E}(Ic)$$

по лемме 4, и аналогично для $t_{1,j}(ac)$. Кроме того, так как для некоторых α_r и β_r выполнено равенство $\sum_r \alpha_r e_1 \beta_r = 1$, то

$$t_{i,j}(ac^2) = \prod_r [t_{i,1}(a\alpha_r c), t_{1,j}(\beta_r c)],$$

откуда $^{g+e_1}t_{i,j}(ac^2) \in {}^{\mathrm{E}(Rc)}\,\mathrm{E}(Ic)$. Значит, $^{\mathrm{GL}(R')}\,\mathrm{E}(Ic^2) \leqslant {}^{\mathrm{E}(Rc)}\,\mathrm{E}(Ic)$. □

Лемма 11. *Пусть* $I \trianglelefteq R$, *тогда* $[\mathrm{E}(R), \mathrm{GL}(R', I)] \leqslant \mathrm{E}(R, I)$. *Более того, для* $c \in \mathrm{C}(R)$ *и* $i \neq j$ *верно включение* $[t_{i,j}(Rc^2), \mathrm{GL}(R', I)] \leqslant {}^{\mathrm{E}(Rc)}\,\mathrm{E}(Ic)$.

Доказательство. Пусть $a \in R$, $g+e_1 \in \mathrm{GL}(R', I)$, $(g+e_1)^{-1} = h+e_1$. Если $j = 1$, то

$$\begin{aligned}[t_{i,1}(ac), g+e_1] &= (g + e_1 + e_iace_1)(h + e_1 - e_iace_1)\\ &= 1 + e_iace_1 - ge_iace_1 \in \mathrm{E}(Ic),\end{aligned}$$

и аналогично в случае $i = 1$.

Иначе $1 = \sum \alpha_r e_1 \beta_r$ и

$$\begin{aligned}[t_{i,j}(ac^2), g+e_1]^{-1} &= [g+e_1, \prod_r [t_{i,1}(ac\alpha_r), t_{1,j}(c\beta_r)]]\\ &\in \prod_r {}^{\mathrm{E}(Rc)}[g+e_1, t_{i,1}(ac\alpha_r)] \cdot {}^{\mathrm{E}(Rc)}[g+e_1, t_{1,j}(c\beta_r)] \cdot\\ &\times {}^{\mathrm{E}(Rc)}[g+e_1, t_{i,1}(-ac\alpha_r)] \cdot {}^{\mathrm{E}(Rc)}[g+e_1, t_{1,j}(-c\beta_r)],\end{aligned}$$

а по уже доказанному все сомножители принадлежат $^{\mathrm{E}(Rc)}\,\mathrm{E}(Ic)$. □

Лемма 12. *Если* $I \trianglelefteq R$ *и* $c \in \mathrm{C}(R)$, *то* $^{t_{i,j}(R)}\,\mathrm{E}(Ic^2) \leqslant {}^{\mathrm{E}(Rc)}\,\mathrm{E}(Ic)$ *для* $i \neq j$.

Доказательство. Пусть $a \in R$, $b \in I$. Если $i \neq l \neq k \neq j \neq i$, то

$$^{t_{i,j}(a)}t_{k,l}(b) = t_{k,l}(b),$$

$$^{t_{i,j}(a)}t_{j,k}(bc) = [t_{i,j}(a), t_{j,k}(bc)]t_{j,k}(bc) = t_{i,k}(ae_jbc)t_{j,k}(bc) \in \mathrm{E}(Ic),$$

$$^{t_{i,j}(a)}t_{k,i}(bc) = [t_{i,j}(a), t_{k,i}(bc)]t_{k,i}(bc) = t_{k,j}(-bce_ia)t_{k,i}(bc) \in \mathrm{E}(Ic),$$

$$^{t_{i,j}(a)}t_{j,i}(bc^2) = \prod_r [{}^{t_{i,j}(a)}t_{j,k}(bc\alpha_r), {}^{t_{i,j}(a)}t_{k,i}(c\beta_r)] \in {}^{\mathrm{E}(Rc)}\,\mathrm{E}(Ic).$$

□

Лемма 13. *Если* $I \trianglelefteq R$, $c \in \mathrm{C}(R)$, $i \neq j$ *и* $p \neq q$ *– индексы,* $a \in R$, $b \in I$, $d \in R$, *то* $[t_{i,j}(ac^2), z_{p,q}(b,d)] \in {}^{\mathrm{E}(Rc)}\,\mathrm{E}(Ic)$.

Доказательство. Заметим, что

$$x(c^k) = [t_{i,j}(ac^k), z_{p,q}(b,d)] = {}^{t_{q,p}(d)}[{}^{t_{q,p}(-d)}t_{i,j}(ac^k), t_{p,q}(b)].$$

Если $i \neq p, q$ и $j \neq p, q$, то $x(1) = 1$. Разберём теперь случаи, когда $(i,j) \neq (p,q), (q,p)$.

Если $i = p$ и $j \neq q$, то

$$x(c) = {}^{t_{q,p}(d)}[t_{q,j}(-de_pac)t_{p,j}(ac), t_{p,q}(b)] = {}^{t_{q,p}(d)}t_{p,j}(be_qde_pac) \in \mathrm{E}(Ic).$$

Если $i = q$ и $j \neq p$, то $x(c) = {}^{t_{q,p}(d)}[t_{q,j}(ac), t_{p,q}(b)] = {}^{t_{q,p}(d)}t_{p,j}(-be_qac) \in \mathrm{E}(Ic)$. Аналогично, при $j = p$ и $i \neq q$ $x(c) = {}^{t_{q,p}(d)}t_{i,q}(ace_pb) \in \mathrm{E}(Ic)$.

Наконец, если $j = q$ и $i \neq p$, то

$$x(c) = {}^{t_{q,p}(d)}[t_{i,p}(ace_qd)t_{i,q}(ac), t_{p,q}(b)] = {}^{t_{q,p}(d)}t_{i,q}(ace_qde_pb) \in \mathrm{E}(Ic).$$

В случае, когда $(i,j) = (p,q)$ или $(i,j) = (q,p)$, выберем индекс k, отличный от i и j. Тогда $1 = \sum_r \alpha_r e_k \beta_r$ и

$$\begin{aligned} x(c^2)^{-1} &= \Big[z_{p,q}(b,d), \prod_r [t_{i,k}(ac\alpha_r), t_{k,j}(c\beta_r)]\Big] \in \\ &\in \prod_r {}^{\mathrm{E}(Rc)}[z_{p,q}(b,d), t_{i,k}(ac\alpha_r)] \cdot {}^{\mathrm{E}(Rc)}[z_{p,q}(b,d), t_{k,j}(c\beta_r)] \cdot \\ &\times {}^{\mathrm{E}(Rc)}[z_{p,q}(b,d), t_{i,k}(-ac\alpha_r)] \cdot {}^{\mathrm{E}(Rc)}[z_{p,q}(b,d), t_{k,j}(-c\beta_r)] \\ &\subseteq {}^{\mathrm{E}(Rc)}\,\mathrm{E}(Ic). \end{aligned}$$

□

Лемма 14. *Если* R *удовлетворяет условию стабильности, то справедливо разложение* $\mathrm{GL}(R) = \mathrm{E}(R)\,\mathrm{GL}(R')$. *Если* $R = \mathrm{M}(2, A)$, A *удовлетворяет условию стабильности и* $I \trianglelefteq R$, *то*

$$\mathrm{GL}(R, I) = \mathrm{E}(R, I)\,\mathrm{GL}(R', I).$$

Доказательство. Докажем вначале второе утверждение. Возьмём некоторое $g \in \mathrm{GL}(R, I)$, тогда согласно леммам 10 и 11 достаточно разложить его в произведение элементов $\mathrm{E}(R, I)$ и ${}^{E(R)}\,\mathrm{GL}(R', I)$. В силу леммы 8 и $g^{-1}gE_1 = E_1$, найдётся $\alpha \in R$, для которого

$$R(1 - E_{-1})(1 + \alpha E_{-1})gE_1 = RE_1.$$

Заменив g на $(1 + (1 - E_{-1})\alpha E_{-1})g(1 - (1 - E_{-1})\alpha E_{-1}) \in \mathrm{GL}(R, I)$, получим $R(1 - E_{-1})gE_1 = RE_1$. Пусть $E_1\beta(1 - E_{-1})gE_1 = E_1$.

После этого заменим g на

$$\big(1 + (\big(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ e_1 & 0 \end{smallmatrix}\big)(gE_1 - E_1) - E_{-1}gE_1)\beta(1 - E_{-1})\big)g \in \mathrm{GL}(R, I),$$

тогда

$$E_{-1}gE_1 = \big(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ e_1 & 0 \end{smallmatrix}\big)(gE_1 - E_1).$$

Заменив g на

$$\big(1 - \big(\begin{smallmatrix} 0 & e_1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\big)\big)g\big(1 + \big(\begin{smallmatrix} 0 & e_1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\big)\big) \in \mathrm{GL}(R, I),$$

получим $E_1 g E_1 = E_1$. Но тогда $1 - (1 - E_1)gE_1, 1 - E_1 g(1 - E_1) \in \mathrm{E}(R, I)$ и $(1 - (1 - E_1)gE_1)g(1 - E_1 g(1 - E_1)) \in \mathrm{GL}(R', I)$.

Докажем теперь первое утверждение. Пусть $g \in \mathrm{GL}(R)$, тогда по лемме 8 найдётся $\alpha \in R$, для которого $R(1 - e_1)(1 + \alpha e_1)ge_1 = Re_1$. Заменив g на $(1 + (1 - e_1)\alpha e_1)g$, получим $R(1 - e_1)ge_1 = Re_1$. Пусть $e_1\beta(1 - e_1)ge_1 = e_1$, тогда после очередной замены g на $(1 - (e_1 g e_1 - e_1)\beta(1 - e_1))g$ окажется, что $e_1 g e_1 = e_1$. Окончание доказательства такое же, как и для второго утверждения. $\square$

В качестве следствий мы получаем, что $\mathrm{E}(R, I) \trianglelefteq \mathrm{GL}(R)$, если R удовлетворяет условию стабильности ($\mathrm{E}(R, I) \trianglelefteq \mathrm{E}(R)$ и

$$[\mathrm{E}(R, I), \mathrm{GL}(R')] \leqslant \mathrm{E}(R, I)$$

по лемме 10), и $[\mathrm{E}(R), \mathrm{GL}(R, I)] \leqslant \mathrm{E}(R, I)$, если $R = \mathrm{M}(2, A)$, $I \trianglelefteq R$ и A удовлетворяет условию стабильности (так как $[\mathrm{E}(R), \mathrm{GL}(R', I)] \leqslant \mathrm{E}(R, I)$ по лемме 11).

Лемма 15. *Пусть S – мультипликативное подмножество $\mathrm{C}(R)$, $I \trianglelefteq R$ – двусторонний идеал, $g \in \mathrm{GL}(R)$ и $\Psi(g) \in \mathrm{E}(S^{-1}R)\,\mathrm{GL}(S^{-1}R')$, где $\Psi\colon \mathrm{GL}(R) \to \mathrm{GL}(S^{-1}R)$ – локализация. Тогда существует $s \in S$, для которого ${}^g\,\mathrm{E}(Is) \leqslant \mathrm{E}(R, I)$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для всех $i \neq j$ найдётся такое s, что ${}^g t_{i,j}(Is) \leqslant \mathrm{E}(R, I)$. Пусть $\widehat{R} = R[x, y]$, где x коммутирует с $C(R)$, а y коммутирует с R и x. По условию $\Psi(g) = g_1 g_2$, g_1 является произведением N элементов вида $t_{p,q}(a)$, а $g_2 \in \mathrm{GL}(S^{-1}R') \leqslant \mathrm{GL}(S^{-1}\widehat{R}')$. Пусть $h(y) = {}^g t_{i,j}(xy^{2^{N+1}})$, тогда по леммам 10 и 12

$$\Psi(h(y)) \in {}^{\mathrm{E}(S^{-1}\widehat{R}y)}\,\mathrm{E}(S^{-1}(\widehat{R}x\widehat{R})y),$$

где $\widehat{R}x\widehat{R}$ – двусторонний идеал, порождённый x.

Из этого следует, что $\Psi(h(y))$ является произведением элементов вида ${}^{\prod_r t_{p'_r,q'_r}(b_r y)} t_{p,q}(ay)$, $a \in S^{-1}(\widehat{R}x\widehat{R})$, $b_r \in S^{-1}\widehat{R}$. Через s_1 обозначим общий знаменатель всех этих a и b_r, тогда $\Psi(h(s_1 y)) = \Psi(h'(y))$ для некоторого $h'(y) \in {}^{\mathrm{E}(\widehat{R}y)}\,\mathrm{E}((\widehat{R}x\widehat{R})y)$. Это значит, что существует $s_2 \in S$, для которого $h(s_1 s_2 y) = h'(s_2 y)$. Нетрудно видеть, что $s = (s_1 s_2)^{2^{N+1}}$ подходит для нашей цели. □

Предложение 1. *Если R удовлетворяет локальному условию стабильности и $I \trianglelefteq R$, то $\mathrm{E}(R,I) \trianglelefteq \mathrm{GL}(R)$.*

Доказательство. Зафиксируем $g \in \mathrm{GL}(R)$ и положим

$$J = \{c \in \mathrm{C}(R) \mid {}^{g}\,\mathrm{E}(Ic) \leqslant \mathrm{E}(R,I)\},$$

это идеал в $\mathrm{C}(R)$. Если $J \neq \mathrm{C}(R)$, то по условию есть мультипликативное подмножество $S \subseteq \mathrm{C}(R) \setminus J$, для которого $S^{-1}R$ удовлетворяет условию стабильности. По леммам 14 и 15 найдётся $s \in S$, для которого ${}^{g}E(Is) \leqslant \mathrm{E}(R,I)$, но тогда по определению J содержит s, противоречие. □

Лемма 16. *Пусть S – мультипликативное подмножество $\mathrm{C}(R)$, $I \trianglelefteq R$, $g \in \mathrm{GL}(R,I)$ и $\Psi(g) \in \mathrm{E}(S^{-1}R, S^{-1}I)\,\mathrm{GL}(S^{-1}R', S^{-1}I)$, где $\Psi\colon \mathrm{GL}(R) \to \mathrm{GL}(S^{-1}R)$ – локализация, $i \neq j$. Тогда существует $s \in S$, для которого $[t_{i,j}(Rs), g] \leqslant \mathrm{E}(R,I)$.*

Доказательство. Пусть $\widehat{R} = R[x,y], \hat{I} = I[x,y]$, где x коммутирует с $C(R)$, а y коммутирует с R и x. По условию $\Psi(g) = g_1 g_2$, g_1 является произведением N элементов вида $z_{p,q}(a,b)$ при $a \in S^{-1}I$, $b \in S^{-1}R$, а $g_2 \in \mathrm{GL}(S^{-1}R', S^{-1}I) \leqslant \mathrm{GL}(S^{-1}\widehat{R}', S^{-1}\hat{I})$. Пусть $h(y) = [t_{i,j}(xy^{2^{3N+1}}), g]$, тогда из лемм 11, 12 и 13 следует, что $\Psi(h(y)) \in {}^{\mathrm{E}(S^{-1}\widehat{R}y)}\,\mathrm{E}(S^{-1}\hat{I}y)$.

Значит, $\Psi(h(y))$ можно представить как произведение элементов вида ${}^{\prod_r t_{p'_r,q'_r}(b_r y)} t_{p,q}(ay)$, $a \in S^{-1}\hat{I}$, $b_r \in S^{-1}\widehat{R}$. Обозначим через s_1 общий знаменатель всех a и b_r, тогда $\Psi(h(s_1 y)) = \Psi(h'(y))$ для некоторого $h'(y) \in {}^{\mathrm{E}(\widehat{R}y)}\,\mathrm{E}(\hat{I}y)$. Следовательно, существует $s_2 \in S$, для которого $h(s_1 s_2 y) = h'(s_2 y)$. Но тогда можно взять $s = (s_1 s_2)^{2^{3N+1}}$. □

Предложение 2. *Если $R = \mathrm{M}(2,A)$, A удовлетворяет локальному условию стабильности и $I \trianglelefteq R$, то $[\mathrm{E}(R), \mathrm{GL}(R,I)] = \mathrm{E}(R,I)$.*

Доказательство. Включение $[\mathrm{E}(R), \mathrm{GL}(R,I)] \geqslant \mathrm{E}(R,I)$ было доказано в лемме 3. Так как $\mathrm{E}(R,I) \trianglelefteq \mathrm{E}(R)$, то нам достаточно доказать включение $[t_{i,j}(R), \mathrm{GL}(R,I)] \leqslant \mathrm{E}(R,I)$ для $i \neq j$.

Зафиксируем $g \in \mathrm{GL}(R,I)$. Пусть $J = \{c \in \mathrm{C}(R) \mid [t_{i,j}(Rc), g] \leqslant \mathrm{E}(R,I)\}$. Нетрудно видеть, что J – это идеал в $\mathrm{C}(R)$. Если $J \neq \mathrm{C}(R)$, то найдётся мультипликативное подмножество $S \subseteq \mathrm{C}(R) \setminus J$, для которого $S^{-1}R$ удовлетворяет условию стабильности. По леммам 14 и 16 найдётся $s \in \mathrm{C}(R) \setminus J$, для которого $[t_{i,j}(Rs), g] \leqslant \mathrm{E}(R,I)$, но тогда $s \in J$, противоречие. □

Заметим, что в предложении 2 достаточно требовать, чтобы A имело хотя бы 2 фиксированных идемпотента, а не 3 (так как хотя бы 3 идемпотента нужны в кольце R, а не в A).

§5. Группы $\mathrm{EEp}(R,I)$

Теперь будем считать, что A – кольцо с идемпотентами и инволюцией, $R = \mathrm{M}(2,A)$. Сформулируем ряд фактов про элементарную подгруппу симплектической группы, доказательству которых посвящена статья [4].

Лемма 17. *Группа* $\mathrm{Ep}(R)$ *совершенна.*

Лемма 18. $\mathrm{N}_{\mathrm{GL}(R)}(\mathrm{Ep}(R)) \leqslant \mathrm{GSp}(R) = \mathrm{N}_{\mathrm{GL}(R)}(\mathrm{Sp}(R))$.

Предложение 3. *Если A удовлетворяет локальному условию стабильности, то* $\mathrm{Ep}(R)$ *нормальна в* $\mathrm{GSp}(R)$. *Как следствие,*

$$\mathrm{N}_{\mathrm{GL}(R)}(\mathrm{Ep}(R)) = \mathrm{GSp}(R).$$

Лемма 19. *Для* $I = \overline{I} \trianglelefteq R$ *группа* $\mathrm{EEp}(R,I)$ *совершенна.*

Доказательство. В силу лемм 2 и 17 нам достаточно доказать, что элементы $z_{i,j}(a,b) = {}^{t_{j,i}(b)}t_{i,j}(a)$ лежат в $[\mathrm{EEp}(R,I), \mathrm{EEp}(R,I)]$, где $i \neq j$, $a \in I$, $b \in R$. Выберем $k \neq \pm i, \pm j$, $1 = \sum_r \alpha_r E_k \beta_r$ для некоторых α_r и β_r. Введём сокращённые обозначения $x_r = bE_i\alpha_r$ и $y_r = -\beta_r a E_j b$.

Пусть сначала $i \neq -j$, тогда

$$\begin{aligned} z_{i,j}(a,b) &= \prod_r {}^{t_{j,i}(b)}[t_{i,k}(\alpha_r), t_{k,j}(\beta_r a)] \\ &= \prod_r [t_{j,k}(x_r) t_{i,k}(\alpha_r), t_{k,i}(y_r) t_{k,j}(\beta_r a)] \\ &= \prod_r [t_{j,k}(x_r) t_{i,k}(\alpha_r) t_{-k,-j}(-\overline{x_r}) t_{-k,-i}(-\overline{\alpha_r}), t_{k,i}(y_r) t_{k,j}(\beta_r a)] \\ &= \prod_r [T_{j,k}(x_r) T_{i,k}(\alpha_r), t_{k,i}(y_r) t_{k,j}(\beta_r a)] \in [\mathrm{EEp}(R,I), \mathrm{EEp}(R,I)]. \end{aligned}$$

Если же $j = -i$, то

$$\begin{aligned} z_{i,-i}(a,b) &= \prod_r {}^{t_{-i,i}(b)}[t_{i,k}(\alpha_r), t_{k,-i}(\beta_r a)] \\ &= \prod_r [t_{-i,k}(x_r) t_{i,k}(\alpha_r), t_{k,i}(y_r) t_{k,-i}(\beta_r a)] \\ &= \prod_r [t_{-i,k}(x_r) t_{i,k}(\alpha_r) t_{-k,i}(-\overline{x_r}) t_{-k,-i}(-\overline{\alpha_r}), t_{k,i}(y_r) t_{k,-i}(\beta_r a)] \\ &= \prod_r [T_{-i,k}(x_r) T_{i,k}(\alpha_r) \cdot t_{-k,k}(\overline{x_r} E_i \alpha_r), t_{k,i}(y_r) t_{k,-i}(\beta_r a)] = \prod_r A_r. \end{aligned}$$

Для каждого сомножителя A_r воспользуемся групповыми тождествами:

$$\begin{aligned} A_r &= {}^{T_{-i,k}(x_r) T_{i,k}(\alpha_r)}[t_{-k,k}(\overline{x_r} E_i \alpha_r), t_{k,i}(y_r) t_{k,-i}(\beta_r a)] \\ &\quad \times [T_{-i,k}(x_r) T_{i,k}(\alpha_r), t_{k,i}(y_r) t_{k,-i}(\beta_r a)] \\ &= [T_{-i,k}(x_r) T_{i,k}(\alpha_r), [t_{-k,k}(\overline{x_r} E_i \alpha_r), t_{k,i}(y_r) t_{k,-i}(\beta_r a)]] \\ &\quad \times [t_{-k,k}(\overline{x_r} E_i \alpha_r), t_{k,i}(y_r) t_{k,-i}(\beta_r a)] \\ &\quad \times [T_{-i,k}(x_r) T_{i,k}(\alpha_r), t_{k,i}(y_r) t_{k,-i}(\beta_r a)]. \end{aligned}$$

Первый и третий сомножители лежат в $[\mathrm{EEp}(R,I), \mathrm{EEp}(R,I)]$ поэтому осталось показать, что $[t_{-k,k}(\overline{x_r} E_i \alpha_r), t_{k,i}(y_r) t_{k,-i}(\beta_r a)]$ лежит в коммутанте. Обозначив $\overline{x_r} E_i \alpha_r$ через z_r, имеем

$$\begin{aligned} [t_{-k,k}(z_r), t_{k,i}(y_r) t_{k,-i}(\beta_r a)] &= t_{-k,i}(z_r E_k y_r) \cdot {}^{t_{k,i}(y_r)} t_{-k,-i}(z_r E_k \beta_r a) \\ &= t_{-k,i}(z_r E_k y_r) t_{k,i}(y_r) t_{-k,-i}(z_r E_k \beta_r a) t_{k,i}(-y_r). \end{aligned}$$

В силу уже доказанного все сомножители лежат в $[\mathrm{EEp}(R,I), \mathrm{EEp}(R,I)]$. □

Лемма 20. *Пусть в кольце A 2 не является делителем нуля или $e_i a e_i \in \mathrm{H}(A)$ для всех $a \in A$. Тогда для любого $I = \overline{I} \trianglelefteq R$ естественный гомоморфизм $\rho\colon \mathrm{Ep}(R) \to \mathrm{Ep}(R/I)$ сюръективен.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $T_i(a) \in \rho(\mathrm{Ep}(R))$ при $a \in \mathrm{AH}(R/I)$. Не умаляя общности, считаем, что $i > 0$. Ясно, что $T_i(a) = \rho(1 + E_i a' E_{-i})$ для некоторого $a' = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in R$, $e_i \overline{\alpha} e_i - e_i \alpha e_i \in I$. Тогда или $e_i \overline{\alpha} e_i = e_i \alpha e_i$, или 2 не является делителем нуля и из $\overline{e_i \overline{\alpha} e_i - e_i \alpha e_i} = e_i \overline{\alpha} e_i - e_i \alpha e_i$ всё равно следует, что $e_i \overline{\alpha} e_i = e_i \alpha e_i$. Значит, $1 + E_i a' E_{-i} \in \mathrm{Ep}(R)$. □

Теорема 1. *Пусть A удовлетворяет локальному условию стабильности и или 2 не является делителем нуля в A, или $e_i a e_i \in \mathrm{H}(A)$ для всех $a \in A$. Тогда для любого $I = \overline{I} \trianglelefteq R$*

$$\mathrm{N}_{\mathrm{GL}(R)}(\mathrm{EEp}(R, I)) = \mathrm{CGSp}(R, I).$$

Доказательство. В доказательстве под AB и $[A, B]$ будем понимать $\{ab \mid a \in A, b \in B\}$ и $\{[a, b] \mid a \in A, b \in B\}$ соответственно, где A, B – подмножества некоторой группы.

Напомним, что по лемме 6 кольцо A/I тоже удовлетворяет локальному условию стабильности. Для краткости введём обозначения $\mathrm{GL} = \mathrm{GL}(R, I)$, $\mathrm{CGSp} = \mathrm{CGSp}(R, I)$, $\mathrm{Ep} = \mathrm{Ep}(R)$, $\mathrm{E} = \mathrm{E}(R, I)$ и $\mathrm{EEp} = \mathrm{EEp}(R, I)$. Заметим, что GL нормальна в $\mathrm{GL}(R)$ и имеется равенство $\mathrm{EEp} \cdot \mathrm{GL} = \mathrm{Ep} \cdot \mathrm{GL}$. Обозначим через ρ естественный гомоморфизм $\mathrm{GL}(R) \to \mathrm{GL}(R/I)$. Тогда по предложению 3 (и в силу леммы 20)

$$\begin{aligned} \mathrm{N}_{\mathrm{GL}(R)}(\mathrm{EEp}) \subseteq \mathrm{N}_{\mathrm{GL}(R)}(\mathrm{Ep} \cdot \mathrm{GL}) &= \rho^{-1}(\mathrm{N}_{\mathrm{GL}(R/I)}(\mathrm{Ep}(R/I))) \\ &= \rho^{-1}(\mathrm{GSp}(R/I)) = \mathrm{CGSp}\,. \end{aligned}$$

Отсюда также следует, что $[\mathrm{CGSp}, \mathrm{EEp}] \subseteq \mathrm{Ep} \cdot \mathrm{GL}$.

С другой стороны, согласно предложениям 1 и 2

$$\begin{aligned} [\mathrm{Ep} \cdot \mathrm{GL}, \mathrm{EEp}] \subseteq {}^{\mathrm{Ep}}[\mathrm{GL}, \mathrm{EEp}] \cdot [\mathrm{Ep}, \mathrm{EEp}] &\subseteq {}^{\mathrm{Ep}}([\mathrm{GL}, \mathrm{Ep}] \cdot {}^{\mathrm{Ep}}\,\mathrm{E}) \cdot \mathrm{EEp} \\ &= [\mathrm{GL}, \mathrm{Ep}] \cdot \mathrm{EEp} \subseteq [\mathrm{GL}, \mathrm{E}(R)] \cdot \mathrm{EEp} = \mathrm{E} \cdot \mathrm{EEp} = \mathrm{EEp}\,. \end{aligned}$$

Значит, $[[\mathrm{CGSp}, \mathrm{EEp}], \mathrm{EEp}] \subseteq \mathrm{EEp}$.

Далее,

$$
\begin{aligned}
[[\mathrm{CGSp}, \mathrm{EEp}], [\mathrm{CGSp}, \mathrm{EEp}]] &\subseteq [\mathrm{Ep} \cdot \mathrm{GL}, [\mathrm{CGSp}, \mathrm{EEp}]] \\
&\subseteq {}^{\mathrm{Ep}}[\,\mathrm{GL}, [\mathrm{CGSp}, \mathrm{EEp}]] \cdot [\mathrm{Ep}, [\mathrm{CGSp}, \mathrm{EEp}]] \\
&\subseteq {}^{\mathrm{Ep}}[\,\mathrm{GL}, \mathrm{E}(R)] \cdot \mathrm{EEp} = \mathrm{EEp}\,.
\end{aligned}
$$

Наконец, по лемме 19 достаточно доказать, что

$$[[\mathrm{EEp}, \mathrm{EEp}], \mathrm{CGSp}] \subseteq \mathrm{EEp}\,.$$

Для $x, y \in \mathrm{EEp}$, $z \in \mathrm{CGSp} = {}^{y^{-1}}\,\mathrm{CGSp}$, используя предыдущие результаты и $\mathrm{EEp} \subseteq \mathrm{CGSp}$, имеем

$$
\begin{aligned}
[[x, y], {}^{y}z] = [[z, x], {}^{x}y]^{-1} \cdot [[y, z], {}^{z}x]^{-1} &= [[z, x], {}^{x}y]^{-1} \cdot {}^{y}[[z, y^{-1}], {}^{y^{-1}z}x]^{-1} \\
&\in [[\mathrm{CGSp}, \mathrm{EEp}], \mathrm{EEp}]^{-1} \cdot [[\mathrm{CGSp}, \mathrm{EEp}], [\mathrm{CGSp}, \mathrm{EEp}] \cdot \mathrm{EEp}]^{-1} \\
&\subseteq \mathrm{EEp} \cdot [[\mathrm{CGSp}, \mathrm{EEp}], \mathrm{EEp} \cdot [\mathrm{CGSp}, \mathrm{EEp}]]^{-1} \\
&\subseteq \mathrm{EEp} \cdot \big([[\mathrm{CGSp}, \mathrm{EEp}], \mathrm{EEp}] \cdot [[\mathrm{CGSp}, \mathrm{EEp}], [\mathrm{CGSp}, \mathrm{EEp}]]\big)^{-1} \cdot \\
&\subseteq \mathrm{EEp} \cdot (\mathrm{EEp} \cdot \mathrm{EEp})^{-1} = \mathrm{EEp}\,. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Литература

1. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах* $\mathrm{Ep}(2l, R)$. — Алгебра и анализ, **15**, No. 4 (2003), 72–114.
2. Н. А. Вавилов, А. В. Степанов, *Линейные группы над общими кольцами* I. *Общие места.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **394** (2011), 33–139.
3. Н. А. Вавилов, А. В. Степанов, *Надгруппы полупростых групп.* — Вестник СамГУ, 3 (2008), 51–95.
4. Е. Ю. Воронецкий, *О нормальности элементарной подгруппы в* $\mathrm{Sp}(2, A)$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **443** (2016), 33–45.
5. A. Bak, Tang Guoping, *Stability for Hermitian* K_1. — J. Pure Appl. Algebra, **150** (2000), 107–121.
6. V. A. Petrov, *Overgroups of unitary groups.* — K-Theory, **29** (2003), 147–174.

Voronetsky E. Yu. Normalizers of elementary overgroups of $\mathrm{Ep}(2, A)$.

Let A be an involution ring, $e_1, \ldots, e_n$ be a full system of hermitian idempotents in A, every e_i generates A as a two-sided ideal, and $2 \in A^*$. In this paper we calculate normalizers of groups $\mathrm{Ep}(2, A) \cdot \mathrm{E}(2, A, I)$

under natural assumptions on A, where $\mathrm{Ep}(2, A)$ denotes the elementary symplectic group, $\mathrm{E}(2, A, I)$ elementary subgroups of level I.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: VoronetckiiEgor@yandex.ru

Поступило 24 октября 2016 г.