

А. В. Шанин, А. И. Корольков

**ГРАНИЧНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ И  
ЗАДАЧА О ДИФРАКЦИИ НА ИСКРИВЛЕННОЙ  
ПОВЕРХНОСТИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО  
УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ**

**§1. ВВЕДЕНИЕ**

Впервые задача о дифракции плоской волны на искривленной поверхности была рассмотрена В. А. Фоком [1] с помощью метода параболического уравнения для случая распространения радиоволн вдоль сферической поверхности (поверхности земли). В. А. Фоком было получено решение в виде контурного интеграла от функций Эйри, а также показано, что вблизи границы свет-тень (так называемая зона Фока) возникают волны соскальзывания. Позже в рамках того же подхода [2, 3] была исследована задача дифракция на произвольном гладком выпуклом теле, для чего параболическое уравнение записывалось в лучевых координатах. Волновые поля вблизи поверхности также представляются в виде интегралов от функций Эйри. В работе [4] были вычислены поправки к асимптотике Фока для случая круглого цилиндра и сферы.

В последние годы вышло достаточное количество работ, посвященных дифракции на вытянутых телах [5–11]. Эти работы по-разному обобщают результаты В. А. Фока для случая, когда поверхность接收ителя имеет два радиуса кривизны, один из которых асимптотически мал по сравнению с другим. Данная задача породила сложные вопросы. Нам представляется наиболее важным вопрос о том, при каких условиях и в какой мере можно считать распространение вдоль искривленной поверхности лучевым. Мы ставим перед собой задачу

---

*Ключевые слова:* метод граничного интегрального уравнения, параболическое уравнение, дифракция на искривленных поверхностях, интеграл Фока.

Аналитические результаты получены при поддержке гранта РФФИ № 14-02-00573 и гранта Президента Российской Федерации НШ-7062.2016.2. Численное моделирование выполнено при поддержке гранта РНФ № 14-22-00042.

разобраться в этом. Настоящая статья представляет собой подготовительные шаги в данном направлении.

Авторам представляется, что ключом к пониманию процесса дифракции на вытянутых телах может стать граничное интегральное уравнение, записанное для параболического уравнения. Такое уравнение в геодезических координатах известно [12], и оно имеет тип Вольтерра. В настоящей статье предлагается вывод и анализ граничного интегрального уравнения непосредственно для параболического уравнения теории дифракции (ПУТД), причем все выкладки делаются в декартовых координатах.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 ставится двумерная параболическая задача дифракции на гладкой кривой, играющей роль границы с граничными условиями Дирихле или Неймана. Обсуждается вопрос постановки граничных условий Неймана для ПУТД. В разделе 3 описывается важная для дальнейшего изложения симметрия параболического уравнения – параболический поворот. В разделе 4 с помощью формулы Грина для параболического уравнения выводится граничное интегральное уравнение, сходное с уравнением Хонга [12]. В разделе 5 с помощью граничного интегрального уравнения рассматривается простейшая нетривиальная задача дифракции – задача о дифракции на параболе с граничными условиями Неймана. Показано, что можно свести задачу к уравнению с разностным ядром и решить с помощью преобразования Фурье. Решение оказывается совпадающим с классическим решением В. А. Фока для дифракции на цилиндре. В разделе 6 интегральное уравнение для задачи о дифракции на параболе решается итерационным методом. В разделе 7 показана эффективность численного решения граничного интегрального уравнения. В разделе 8 приведены основные формулы для граничных условий Дирихле.

## §2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на плоскости  $(x, y)$  лежит гладкая кривая  $\Gamma$ , задаваемая однозначной гладкой функцией  $y = f(x)$ . Эта кривая представляет собой границу рассеивателя. Пусть выше этой кривой (при  $y > f(x)$ ) для поля  $u(x, y)$  выполняется параболическое уравнение теории дифракции

$$\left(2ik\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(x, y) = 0, \quad (1)$$

где  $k$  – параметр (волновое число). Будем искать решение этого уравнения, непрерывное на  $\Gamma$ . Пусть поле удовлетворяет граничному условию Дирихле

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma \quad (2)$$

или Неймана

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} - ikf'(x)u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma \quad (3)$$

в последнем равенстве штрих означает производную по аргументу.

Поле  $u$  (относящееся к (1)) записывается в виде суммы падающего и рассеянного полей

$$u(x, y) = u_{\text{in}}(x, y) + u_{\text{sc}}(x, y),$$

где  $u_{\text{in}}$  – плоская волна в смысле ПУТД;

$$u_{\text{in}}(x, y) = \exp \left\{ -ik\theta_{\text{in}}y - ik \frac{\theta_{\text{in}}^2}{2} x \right\}. \quad (4)$$

Здесь  $\theta_{\text{in}}$  – угол падения.

Постановка задачи должна быть дополнена условием излучения. Сформулируем его в виде принципа предельного поглощения. А именно, будем рассматривать семейство задач с комплексными  $k$ . Будем считать, что мнимая часть  $k$  (она соответствует поглощению в среде) положительна, мала и стремится к нулю. Решение для действительного  $k$  будем искать как предел решений для таких комплексных  $k$ . Для каждого фиксированного комплексного  $k$  будем искать решение  $u_{\text{sc}}$ , которое для каждого значения  $x$  убывает при  $y \rightarrow \infty$ . Заметим, что при выборе  $\text{Im}[\theta_{\text{in}}] = 0$ ,  $\text{Im}[k] > 0$  падающая волна экспоненциально убывает в область *отрицательных*  $x$  и  $y$ . Этот факт используется при выводе интегрального уравнения.

Заметим, что имеется альтернативный способ постановки задачи для ПУТД. Вместо задания падающей волны и условий излучения можно задать рассеянное поле на какой-либо прямой  $x = X$ . Такая постановка очень важна, поскольку она позволяет при рассмотрении дифракции на вытянутом теле исключить участки с большой кривизной. Специально для этого ниже выводится интегральное уравнение (20). Авторы планируют обратиться к этой теме в одной из следующих работ.

**Замечание. Мотивация работы.** Как известно, ПУТД (1) служит приближением для решения уравнения Гельмгольца

$$\Delta \tilde{u} + k^2 \tilde{u} = 0$$

при условии, что волна распространяется под небольшим углом к оси  $x$ . Физическая полевая переменная  $\tilde{u}$  при этом выражается через  $u$  как

$$\tilde{u}(x, y) = e^{ikx} u(x, y). \quad (5)$$

Считается, что зависимость  $u(x, y)$  от  $x$  медленная по сравнению с экспоненциальным множителем.

Границное условие (3) соответствует условию Неймана в следующем смысле. Пусть граница располагается под малым углом к оси  $x$ , т. е.  $f'(x) \ll 1$  (в противном случае параболическое приближение нельзя применять). В таком случае нормальная производная поля в некоторой точке границы  $\Gamma$  записывается как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}(x, y)}{\partial n} &= \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \left( \frac{\partial \tilde{u}(x, y)}{\partial y} - f'(x) \frac{\partial \tilde{u}(x, y)}{\partial x} \right) \\ &\approx e^{ikx} \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} - ik f'(x) u(x, y) \right). \end{aligned}$$

Очевидно, в скобках стоит правая часть (3).

Выражение (4) получено следующим образом. Падающая волна для уравнения Гельмгольца есть

$$\tilde{u}_{\text{in}} = \exp\{ik(x \cos \theta_{\text{in}} - y \sin \theta_{\text{in}})\}.$$

Применим к этому выражению приближения  $\sin \theta_{\text{in}} \approx \theta_{\text{in}}$  и  $\cos \theta_{\text{in}} \approx 1 - (\theta_{\text{in}})^2/2$ . Кроме того, учтем (5). В результате получим (4).

В настоящей работе не ставится вопрос о том насколько точно и в какой области поставленная задача моделирует задачу для уравнения Гельмгольца. Данный вопрос лучше решать для каждой конкретной физической ситуации и имея представление о том, что из себя представляет решение задачи для ПУТД. Однако приведем грубую оценку размера области  $(x, y)$  в которой ПУТД является хорошим приближением к уравнению Гельмгольца. Пусть гладкая функция  $y = f(x)$ ,  $f(0) = 0$  такова, что для некоторой величины  $\psi \ll 1$  выполняется  $-\psi < f' < \psi$ . Пусть угол падения удовлетворяет неравенству  $-\psi < \theta_{\text{in}} < \psi$ . Тогда в области

$$-1/(k\psi^3) \ll y \ll 1/(k\psi^3), \quad -1/(k\psi^4) \ll x \ll 1/(k\psi^4) \quad (6)$$

решение ПУТД будет близко к решению уравнения Гельмгольца. Данная оценка получена следующим образом. В сделанных предположениях величина  $\psi$  оценивает ширину углового спектра поля. Каждая из компонент углового спектра представляет собой плоскую волну вида

$$\exp\{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)\}.$$

В рамках параболического приближения эта волна заменяется на выражение

$$\exp\left\{ik\theta y + ikx - ik\frac{\theta^2}{2}x\right\},$$

содержащее в показателе экспоненты первые члены ряда Тейлора синуса и косинуса. Оценка следующих членов и требование, чтобы фазовые искажения, вызванные ими, были малы, и дает приведенную оценку.

### §3. ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ ПОВОРОТ

Параболическое уравнение (1), очевидно, выдерживает трансляции вдоль обеих координатных осей. Кроме того, оно выдерживает “параболический поворот”. А именно, если  $u_1(x, y)$  – решение (1) в какой-то области, то

$$u_2(x, y) = u_1(x, y - \alpha x) \exp\left\{ikay - ik\frac{\alpha^2}{2}x\right\} \quad (7)$$

для любого действительного значения параметра  $\alpha$  – также решение в области, деформированной соответствующим образом. Преобразование (7) представляет собой сдвиг и умножение на функцию, но с точки зрения решения  $\tilde{u}$  уравнения Гельмгольца это аппроксимация поворота на (малый) угол  $\alpha$ . Преобразование (7) соответствует повороту вокруг начала координат.

Заметим, что функция Грина неограниченной плоскости

$$g(x, y) = \begin{cases} (k/(2\pi ix))^{1/2} \exp\{iky^2/(2x)\} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (8)$$

переходит в себя при таком преобразовании.

Рассмотрим, как преобразование

$$\psi : (x, y) \rightarrow (x, y + \alpha x)$$

действует на граничное условие (3). Пусть граница  $\Gamma$  проходит через точку  $(0, 0)$ . Пусть функция  $u_1$  удовлетворяет граничному условию

(3) Непосредственной проверкой можно убедиться, что по построению новая функция (7) удовлетворяет условию

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} - ik(f' + \alpha)u_2 = 0 \quad (9)$$

в точке  $(0, 0)$ . С другой стороны, после преобразования  $\psi$  новая граница будет иметь тангенс угла наклона к оси  $x$ , равный  $f'(0) + \alpha$ , поэтому условие (9) представляет собой граничное условие Неймана на новой границе. То есть при преобразовании  $\psi$  неймановская граница переходит в неймановскую границу. Очевидно, что при таком преобразовании также граница Дирихле переходит в границу Дирихле.

#### §4. ВЫВОД ГРАНИЧНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА

Сформулируем теорему Грина для параболического уравнения [13]. Пусть  $\Omega$  – конечная связная односвязная область с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$  и внешней нормалью  $\mathbf{n}$ . Пусть  $v(x, y)$  – некоторое решение неоднородного уравнения

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v(x, y) = q(x, y), \quad (10)$$

а  $w(x, y)$  – некоторое решение неоднородного уравнения

$$\left( -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2ik} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w(x, y) = h(x, y) \quad (11)$$

для некоторых функций источников  $q$  и  $h$ . Введем векторные функции

$$\mathbf{v}(x, y) = \left( ikv, \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \mathbf{w}(x, y) = \left( -ikw, \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad (12)$$

где первый элемент в паре –  $x$ -компоненты, а второй –  $y$ -компоненты.

Тогда выполняется равенство (формула Грина)

$$\int_{\partial\Omega} [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})w - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})v] dl = 2ik \int_{\Omega} [qw - hv] ds. \quad (13)$$

Данное утверждение проверяется путем непосредственного применения теоремы Гаусса–Остроградского.

На участке  $\partial\Omega'$  границы  $\partial\Omega$ , не параллельном оси  $y$ , введем операторы

$$N[v] = \frac{\partial v}{\partial y} - ik\beta(x)v, \quad N^*[w] = \frac{\partial w}{\partial y} + ik\beta(x)w,$$

где  $\beta(x)$  – тангенс угла наклона границы  $\partial\Omega$  к оси  $x$  в точке границы с данным  $x$ . Если участок границы  $\partial\Omega$  совпадает с участком  $\Gamma$ , то  $\beta(x) = f'(x)$ . Пусть нормаль к границе направлена вниз (имеет отрицательную проекцию на ось  $y$ ). Тогда интеграл в левой части (13) по такому участку есть

$$\int_{\partial\Omega'} ((\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})w - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})v)dl = - \int_{x_1}^{x_2} (N[v]w - N^*[w]v)dx, \quad (14)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  – абсциссы левого и правого концов интервала. Заметим, что интегрирование по длине участка границы заменено на интегрирование по  $x$ .

Пусть полное поле на  $\Gamma$  удовлетворяет граничному условию Неймана (3). Тогда на  $\Gamma$

$$N[u_{sc}] = -N[u_{in}] \quad (15)$$

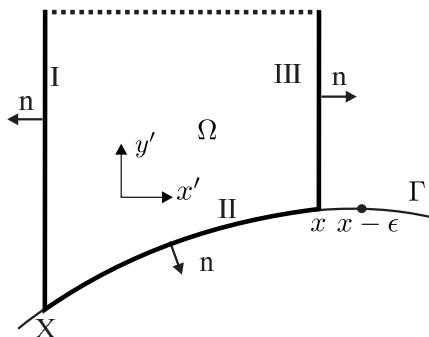


Рис. 1

Рассмотрим область, показанную на Рис. 1 для некоторых  $x$  и  $X$ . Применим формулу Грина (13) к этой области. В качестве  $v$  возьмем  $u_{sc}$ , а в качестве  $w$  функцию Грина

$$w(x', y') = g((x + \epsilon) - x', y' - f(x + \epsilon)) \quad (16)$$

для некоторого малого  $\epsilon$  (далее будем рассматривать предел  $\epsilon \rightarrow 0$ ).

Правая часть формулы Грина равна нулю. Интеграл в левой части по пунктирному участку границы обращается в нуль, если этот участок границы расположен достаточно высоко (из-за условий излучения). Остаются три участка, помеченные римскими цифрами I, II, III. Интегралы  $J_I$ ,  $J_{II}$ ,  $J_{III}$  по этим участкам легко вычисляются:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} J_I = -2ik \int_{f(X)}^{\infty} u_{sc}(X, y') g(x - X, y' - f(x)) dy' \quad (17)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} J_{II} = \int_X^x N[u_{in}](x') g(x - x', f(x') - f(x)) dx' \quad (18)$$

$$+ \int_X^x N^*[g](x - x', f(x') - f(x)) u_{sc}(x', f(x')) dx'$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} J_{III} = ik u_{sc}(x, f(x)). \quad (19)$$

Замечая, что  $J_I + J_{II} + J_{III} = 0$ , получаем “граничное интегральное уравнение”

$$U(x) = \frac{i}{k} \int_X^x N[u_{in}](x') G(x, x') dx' + \frac{i}{k} \int_X^x U(x') G_N(x, x') dx'$$

$$+ 2 \int_{f(X)}^{\infty} u_{sc}(X, y') g(x - X, y' - f(x)) dy', \quad (20)$$

где

$$U(x) = u_{sc}(x, f(x)),$$

$$G(x, x') = g(x - x', f(x') - f(x)),$$

$$G_N(x, x') = g_y(x - x', f(x') - f(x)) + ik f'(x') g(x - x', f(x') - f(x)).$$

Обозначение  $g_y$  применено для производной функции  $g$  по второму аргументу.

Устремим  $X$  к  $-\infty$  и воспользуемся принципом предельного поглощения. Пусть контур  $\Gamma$  выпуклый вверх ( $f'' < 0$ ). Напомним, что падающее поле убывает при отрицательных  $x$  и  $y$ . Логично предположить (в рассматриваемом ниже случае дифракции на параболе это нетрудно

показать аналитически), что и рассеянное поле убывает экспоненциально при  $X \rightarrow -\infty$ . Это означает, что последний член в уравнении (20) стремится к 0, и уравнение может быть записано как

$$U(x) = \frac{i}{k} \int_{-\infty}^x N[u_{\text{in}}](x') G(x, x') dx' + \frac{i}{k} \int_{-\infty}^x U(x') G_N(x, x') dx' \quad (21)$$

Заметим, что если контур  $\Gamma$  представляет собой прямую, то второй член в правой части уравнения (21) обращается в ноль, и задача рассеяния становится тривиальной.

## §5. ДИФРАКЦИЯ НА ПАРАБОЛЕ

Рассмотрим задачу дифракцию на параболе. Зададим параболу уравнением

$$f(x) = -\frac{x^2}{2R}, \quad f'(x) = -\frac{x}{R}. \quad (22)$$

Пусть на параболу падает плоская волна (4), при  $\theta_{\text{in}} = 0$ , т.е.

$$u_{\text{in}}(x, y) \equiv 1.$$

Воспользуемся уравнением (21). Заметим, что

$$N[u_{\text{in}}](x) = ikx/R. \quad (23)$$

Кроме того,

$$G(x, x') = \sqrt{\frac{k}{2\pi i(x-x')}} \exp\left\{\frac{ik(x^2-(x')^2)^2}{8R^2(x-x')}\right\}, \quad (24)$$

$$G_N(x, x') = \frac{ik(x-x')}{2R} G(x, x'). \quad (25)$$

Представим ядро уравнения в разностном виде:

$$G(x, x') = G_1(x-x') \frac{G_2(x)}{G_2(x')}, \quad (26)$$

$$G_1(\tau) = \sqrt{\frac{k}{2\pi i\tau}} \exp\left\{-\frac{ik\tau^3}{24R^2}\right\}, \quad (27)$$

$$G_2(x) = \exp\left\{\frac{ikx^3}{6R^2}\right\}. \quad (28)$$

Введем новую переменную

$$W(x) = U(x) \exp \left\{ -i \frac{kx^3}{6R^2} \right\}. \quad (29)$$

и безразмерные переменные

$$\xi = xk^{1/3}R^{-2/3}, \quad \xi' = x'k^{1/3}R^{-2/3}, \quad \Phi(\xi) = W(\xi R^{2/3}k^{-1/3}).$$

Получим уравнение

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) + \int_{-\infty}^{\xi} \sqrt{\frac{(\xi - \xi')}{8\pi i}} \exp \left\{ -\frac{i(\xi - \xi')^3}{24} \right\} \Phi(\xi') d\xi' \\ - \int_{-\infty}^{\xi} \sqrt{\frac{1}{2\pi i(\xi - \xi')}} \xi' \exp \left\{ -\frac{i(\xi - \xi')^3}{24} - i \frac{(\xi')^3}{6} \right\} d\xi' \end{aligned} \quad (30)$$

Перепишем последнее уравнение в более короткой форме:

$$\Phi(\xi) = K[\Phi](\xi) + H(\xi), \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} H(\xi) &= - \int_{-\infty}^{\xi} \sqrt{\frac{1}{2\pi i(\xi - \xi')}} \xi' \exp \left\{ -\frac{i(\xi - \xi')^3}{24} - i \frac{(\xi')^3}{6} \right\} d\xi', \\ K[\Phi](\xi) &= - \int_{-\infty}^{\xi} \sqrt{\frac{(\xi - \xi')}{8\pi i}} \exp \left\{ -\frac{i(\xi - \xi')^3}{24} \right\} \Phi(\xi') d\xi'. \end{aligned}$$

Уравнение (31) является уравнением с разностным ядром, и может быть решено с помощью преобразования Фурье. Определим Фурьеобраз функции следующим образом:

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp\{-i\omega t\} dt. \quad (32)$$

Обратное преобразование Фурье вычисляется по формуле:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) \exp\{i\omega t\} d\omega, \quad (33)$$

В Фурье области уравнение (31) переходит в:

$$\tilde{\Phi}(\omega) = \tilde{K}(\omega)\tilde{\Phi}(\omega) + \tilde{H}(\omega), \quad (34)$$

где

$$\tilde{\Phi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) \exp\{-i\omega t\} dt, \quad (35)$$

$$\tilde{H}(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{8\pi i}} \int_0^{\infty} \sqrt{t} \exp\{-it^3/24\} \exp\{-i\omega t\} dt, \quad (36)$$

а  $\tilde{H}(\omega)$  – Фурье-образ функции  $H(\xi)$ . С помощью теоремы о свертке  $\tilde{H}(\omega)$  может быть записан в следующем виде:

$$\tilde{H}(\omega) = \frac{-\sqrt{2}2^{2/3}}{\pi i} \text{Ai}'(2^{1/3}\omega) \int_0^{\infty} t^{-1/2} \exp\{-it^3/24 - i\omega t\} dt, \quad (37)$$

здесь  $\text{Ai}(p)$  – функция Эйри, а штрих означает производную по аргументу.

Таким образом,  $K(\omega)$  и  $H(\omega)$  могут быть вычислены с помощью специальной функции, введенной в [14]:

$$F_n(p) = \int_0^{\infty} dx x^{n-1/2} \exp\{-i(12)^{1/3} - ix^3\} \quad (38)$$

Для целых значений  $n$  функция  $F_n(p)$  может быть выражена через функции Эйри [14], а именно для  $n = 0, 1$  имеем:

$$F_0(p) = \pi^{3/2} 2^{2/3} 3^{-1/6} e^{i\pi/4} \text{Ai}(p) [\text{Ai}(p) - i\text{Bi}(p)], \quad (39)$$

$$F_1(p) = \pi^{3/2} 3^{-1/2} e^{i\pi/4} [\text{Ai}(p) \{ \text{Ai}'(p) - i\text{Bi}'(p) \} + (i/\pi)], \quad (40)$$

С учетом (39), (40) из (34) после несложных алгебраических преобразований может быть получено выражение для  $\tilde{\Phi}(\omega)$

$$\Phi(\omega) = -2^{4/3} \pi \text{Ai}(2^{1/3}\omega) \frac{\text{Ci}(2^{1/3}\omega)}{\text{Ci}'(2^{1/3}\omega)}, \quad (41)$$

где

$$\text{Ci}(p) = \text{Bi}(p) + i\text{Ai}(p).$$

Выражение (41) следует из решения, полученного Фоком (см. Приложение A).

## §6. ИТЕРАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (31)

Уравнение (31) является уравнением Вольтерра 2-го рода. Хорошо известно (см. например [15]), что его решение может быть представлено в виде следующего итерационного ряда:

$$\Phi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} K^n[H](\xi), \quad (42)$$

где введены обозначения

$$K^n[H](\xi) = \underbrace{K[K[\dots K[H]\dots]](\xi)}_n, \quad K^0[H](\xi) = H(\xi).$$

Очевидно, что при  $\xi \rightarrow -\infty$  наибольший вклад дает нулевой член  $H(\xi)$ . С ростом безразмерного параметра  $\xi$  начинают играть существенную роль первый и последующие члены ряда (42). С практической точки зрения наибольший интерес представляет область  $|\xi| \sim 1$  (зона Фока), в которой зарождаются волны соскальзывания.

Введем для частичных сумм ряда (42) следующее обозначение:

$$\Phi_m(\xi) = \sum_{n=0}^m K^n[H](\xi)$$

На Рис. 2 представлены результаты численного расчета  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  с помощью метода трапеций. Данные частичные суммы сравниваются с точным решением Фока (см. Приложение А).

Из проведенных численных экспериментов следует, что параболу, на которой изучается дифракция, можно условно разделить на три области. Первая область простирается от бесконечности до  $\xi = -1$  и в ней полное поле описывается нулевым членом ряда, т. е. поле представляет собой сумму падающей и отраженной волн. Вторая область есть зона Фока ( $|\xi| < 1$ ), для описания которой достаточно двух – трех членов итерационного ряда. Наконец, область  $\xi > 1$  есть область волн соскальзывания, в которой для корректного описания дифрагированного поля требуется вычислять все больше членов итерационного ряда с увеличением  $\xi$ .

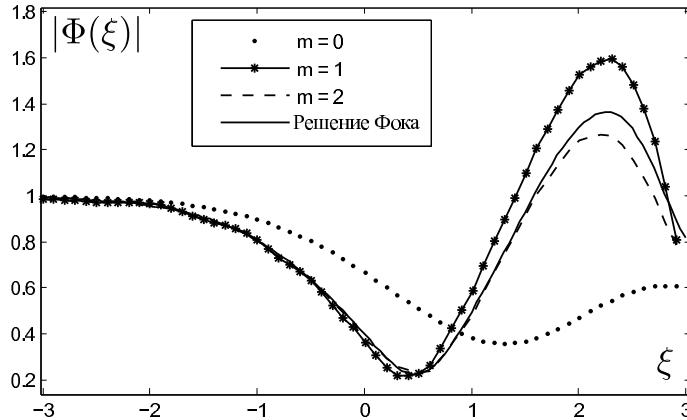


Рис. 2. График модуля функции  $\Phi(\xi)$ . Сплошной линией обозначено точное решение Фока, точками и пунктиром – результат вычисления  $\Phi_0(\xi)$ ,  $\Phi_1(\xi)$  и  $\Phi_2(\xi)$  соответственно.

### §7. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (20)

Во многих практических важных случаях уравнения вида (20) могут быть легко решены численно. В качестве примера рассмотрим задачу дифракции на возмущении прямолинейной границы. Пусть граница описывается функцией  $f(x)$ , являющейся тождественным нулем вне некоторого интервала  $[X_1, X_2]$ . Тогда полное поле до препятствия представляет собой сумму падающей и отраженной волн, а на препятствии и после препятствия представляется в виде

$$u(x, y) = u_{\text{in}}(x, y) + u_{\text{ref}}(x, y) + u_{\text{sc}}(x, y), \quad (43)$$

где

$$u_{\text{ref}}(x, y) = u_{\text{in}}(x, -y)$$

– отраженная волна.

Повторяя рассуждения из раздела 4, получаем следующее интегральное уравнение:

$$U(x) = \frac{i}{k} \int_{X_1}^x N[u_{\text{in}} + u_{\text{ref}}](x') G(x, x') dx' + \frac{i}{k} \int_{X_1}^x U(x') G_N(x, x') dx', \quad (44)$$

где  $x$  меняется от  $X_1$  до  $X_2$ . Поле за препятствием ( $x > X_2$ ) может быть легко вычислено с помощью теоремы Грина, при известном  $U(x)$ .

В качестве численного примера решения уравнения (44) рассмотрим задачу дифракции на куске параболы при нулевом угле падения (в этом случае отраженное поле тождественно равно нулю). Пусть граница описывается следующей функцией:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ -(x-a)(x+a)/(2R) & x \in [-a, a], \\ 0 & x > a \end{cases} \quad (45)$$

где  $a, R$  – параметры, задающие ширину и высоту отрезка параболы. Форма границы  $f(x)$  представлена на Рис. 3.

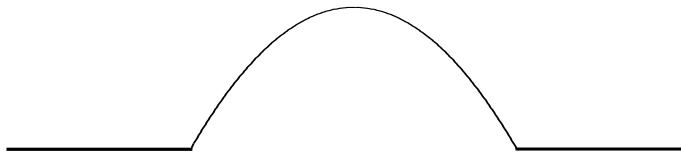


Рис. 3. График функции  $f(x)$ , заданной уравнением (45).

Для удобства положим  $a = \gamma k^{-1/3} R^{2/3}$ , где  $\gamma$  – некоторое действительное число. Тогда уравнение (44) будет иметь вид, аналогичный уравнению (31):

$$\Phi(\xi) = K_\gamma[\Phi](\xi) + H_\gamma(\xi), \quad (46)$$

где

$$H_\gamma(\xi) = - \int_{-\gamma}^{\xi} \sqrt{\frac{1}{2\pi i(\xi - \xi')}} \xi' \exp \left\{ -\frac{i(\xi - \xi')^3}{24} - i \frac{(\xi')^3}{6} \right\} d\xi',$$

$$K_\gamma[\Phi](\xi) = - \int_{-\gamma}^{\xi} \sqrt{\frac{(\xi - \xi')}{8\pi i}} \exp \left\{ -\frac{i(\xi - \xi')^3}{24} \right\} \Phi(\xi') d\xi'.$$

Полное поле в безразмерных переменных вычисляется по формуле:

$$u(\xi R^{2/3} k^{-1/3}) = 1 + \Phi(\xi) \exp \left\{ \frac{i\xi^3}{6} \right\}.$$

На Рис. 4 представлен результат решения уравнения (46) методом коллокаций при  $\gamma = 1$ . В данном случае препятствие занимает область  $\xi \in (-1, 1)$ . Из графика хорошо видно освещенную и затененную области. В точках  $\xi = -1, \xi = 1$  полное поле имеет изломы, так как в этих точках граница не является гладкой. За препятствием практически отсутствует зона тени, так как его размер сравним с размером зоны Фока. Решим уравнение (46) для препятствия, размер которого

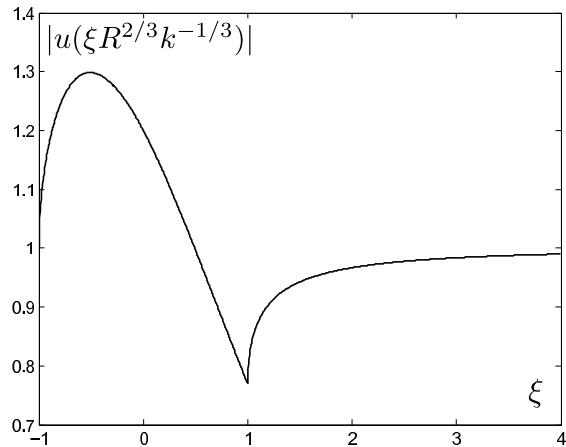


Рис. 4. График модуля полного поля  $u(\xi R^{2/3} k^{-1/3})$  при  $\gamma = 1$ .

в несколько раз превышает размер зоны Фока. На Рис. 5 представлен результат численного счета для  $\gamma = 6$ . На препятствии имеется ярко выраженная интерференционная картина, связанная с интерференцией волн соскальзывания между собой и с падающей волной. Непосредственно за препятствием образуется область тени. Размер этой области можно оценить как размер первой зоны Френеля:  $H^2/\lambda$ , где  $H$  – характерная высота препятствия, а  $\lambda$  – длина волны. Для оценки положим  $H = a^4/R^2$ . Тогда при  $\xi \sim \gamma^4$  полное поле будет состоять почти только из падающей волны. Данная оценка хорошо соотносится с результатами численного счета.

Стоит отметить, что при небольших значениях  $\gamma$  численное решение уравнения (46) требует весьма скромных вычислительных затрат.

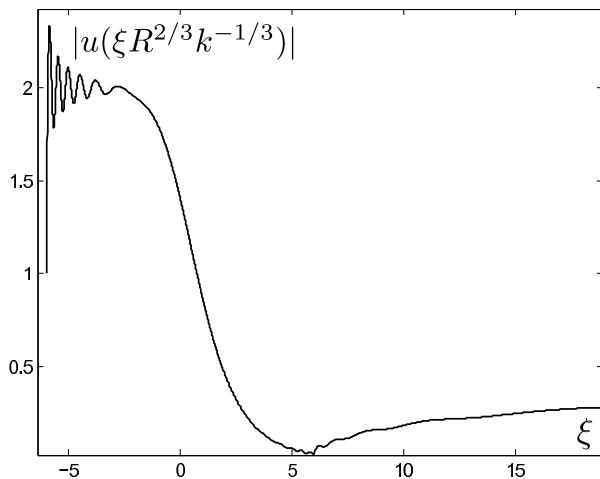


Рис. 5. График модуля полного поля  $u(\xi R^{2/3} k^{-1/3})$  при  $\gamma = 6$ .

Действительно, необходимый шаг сетки  $\delta\xi$  можно оценить из следующего неравенства:

$$[\gamma^3 - (\gamma - \delta\xi)^3] / 6 \ll 1.$$

Например, при  $\gamma = 1$  достаточно аппроксимировать уравнение (46) в двадцати узлах.

### §8. Вид УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Интегральное уравнение в случае граничных условий Дирихле для области  $\Omega$ , изображенной на Рис. 1, имеет вид:

$$\begin{aligned} \int_X^x \tilde{U}(x)G(x, x')dx' &= -ik u_{\text{in}}(x) \\ &+ \int_X^x u_{\text{in}}(x')(G_N(x, x') - ik f'(x')G(x, x'))dx' \\ &+ 2ik \int_{f(X)}^{\infty} u_{\text{in}}(X, y')g(x - X, y' - f(x))dy', \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$\tilde{U}(x) = \frac{\partial u_{\text{sc}}}{\partial y}(x, f(x)), \quad u_{\text{in}}(x) = u_{\text{in}}(x, f(x)).$$

Переходя к пределу  $X \rightarrow -\infty$ , получим:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x \tilde{U}(x)G(x, x')dx' &= -iku_{\text{in}}(x) \\ &+ \int_{-\infty}^x u_{\text{in}}(x')(G_N(x, x') - ikf'(x')G(x, x'))dx' \quad (48) \end{aligned}$$

Уравнение (48) является уравнением Вольтерра 1-го рода и может быть проанализировано в том же духе, что и уравнение (21).

## §9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для задач дифракции на искривленных поверхностях при выполнении ПУТД развивается метод граничного интегрального уравнения. Задача дифракции на параболе с идеальными граничными условиями сводится к интегральному уравнению Вольтерра с разностным ядром. Показывается, что решение данного уравнения в точности совпадает с асимптотикой Фока для задачи дифракции на цилиндре. Также строится решение интегрального уравнения в виде итерационного ряда. Показывается, что для построения поля в зоне Фока достаточно вычислить первые два – три члена этого ряда. Кроме того, демонстрируется, что задачи дифракции на возмущениях прямолинейной границы могут быть решены численно в рамках метода граничного интегрального уравнения с минимальными вычислительными затратами.

Авторы выражают свою глубокую благодарность И. В. Андronову за плодотворные дискуссии.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДИФРАКЦИИ НА ПАРАБОЛЕ В РАМКАХ ПОДХОДА В. А. ФОКА

Покажем, что для задачи о дифракции на параболе (22) с граничными условиями (3) решение может быть получено в точности в виде интеграла, предложенного В. А. Фоком [1]. То, что параболический

поворот является симметрией уравнения (1), позволяет искать некоторое решение этого уравнения в автомодельном виде:

$$u_\nu(x, y) = u_\nu \left( 0, y + \frac{x^2}{2R} \right) \exp\{i\nu x\} \exp \left\{ i \frac{kx^3}{6R^2} \right\} \exp \left\{ -i \frac{kx}{R} \left( y + \frac{x^2}{2R} \right) \right\}. \quad (49)$$

Прокомментируем экспоненциальные множители, стоящие в правой части. Первый множитель показывает, что ищется решение с “константой распространения”  $\nu$  (то свободный параметр). Второй множитель есть  $G_2(x)$ , необходимый для перехода к задаче с разностным ядром. Третий множитель возникает при выполнении параболического поворота

$$x' \rightarrow x', \quad y' \rightarrow -\frac{x^2}{2R} + \frac{x}{R} \left( y' + \frac{x^2}{2R} \right).$$

переводящего точку  $(x, -x^2/(2R))$  параболы в вершину. Разумеется, выражение (50) можно записать в компактной форме:

$$u_\nu(x, y) = u_\nu \left( 0, y + \frac{x^2}{2R} \right) \exp \left\{ i\nu x - i \frac{kxy}{R} - \frac{kx^3}{3R^2} \right\} \quad (50)$$

Подстановка (50) в уравнение (1) дает следующее уравнение для  $u_\nu(y)$ :

$$\frac{\partial u_\nu(0, y)}{\partial y^2} = \left( 2k\nu - 2 \frac{k^2 y}{R} \right) u_\nu(0, y) \quad (51)$$

Это уравнение с точностью до замены переменных представляет собой уравнение Эйри. Его решение (с учетом условия излучения) имеет вид

$$u_\nu(0, y) = a(\nu)p(\nu, y), \quad p(\nu, y) = \text{Ci}(2^{1/3}R^{2/3}k^{-1/3}\nu - 2^{1/3}k^{2/3}R^{-1/3}y), \quad (52)$$

где  $a(\nu)$  – неизвестный коэффициент.

Функция Эйри Ci была выбрана потому, что она экспоненциально затухает при  $y \rightarrow \infty$  и  $k$  с малой положительной мнимой добавкой.

Представим решение дифракционной задачи в виде интеграла

$$u_{sc}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\nu)p(\nu, y + x^2/(2R)) \exp \left\{ i\nu x - i \frac{kxy}{R} - \frac{kx^3}{3R^2} \right\} d\nu. \quad (53)$$

Вычислим коэффициент  $a(\nu)$ . Для этого подставим (53) в граничное условие

$$N[u_{\text{sc}}](x) = -N[u_{\text{in}}](x) = -i \frac{kx}{R}.$$

Получим интегральное уравнение

$$-2^{1/3} k^{2/3} R^{-1/3} \int_{-\infty}^{\infty} a(\nu) \frac{\partial p(\nu, 0)}{\partial y} \exp \left\{ i\nu x + i \frac{kx^3}{6R^2} \right\} d\nu = -i \frac{kx}{R} \quad (54)$$

Решение этого уравнения дается обращением интеграла Фурье:

$$a(\nu) = -\delta \frac{\text{Ai}'(\nu\delta)}{\text{Ci}'(\nu\delta)}, \quad \delta = \left( \frac{2R^2}{k} \right)^{1/3}, \quad (55)$$

где штрих означает производную по аргументу.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространение электромагнитных волн*. М., Советское радио, 1970.
2. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*. М., Наука, 1972.
3. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции*. Л., ЛГУ, 1974.
4. В. И. Иванов, *Вычисление поправок к асимптотике Фока для волнового поля вблизи кругового цилиндра и сферы*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **104** (1981), 102–110.
5. Н. Я. Кирпичникова, М. М. Попов, *Метод параболического уравнения Леонтьевича–Фока в задаче о дифракции на вытянутых телах*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **409** (2012), 55–79.
6. М. М. Попов, Н. Я. Кирпичникова, *О проблемах применения параболического уравнения к дифракции на вытянутых телах*. — Акуст. журн. **60** (2014), 339–346.
7. И. В. Андронов, *Дифракция на сильно вытянутом теле вращением*. — Акуст. журн. **57**, №. 2 (2011), 147–152.
8. И. В. Андронов, *Дифракция плоской волны, падающей под малым углом к оси сильно вытянутого сфероида*. — Акуст. журн. **58**, №. 5 (2012), 571–579.
9. И. В. Андронов, *Рассеяние высокочастотной волны на сильно вытянутом теле*. — Акуст. журн. **59**, №. 4 (2013), 419–423.
10. И. В. Андронов, *Дифракция на эллиптическом цилиндре с сильно вытянутым сечением*. — Акуст. журн. **60**, №. 3 (2014), 219–226.
11. И. В. Андронов, Ю. А. Лавров, *О рассеянии на эллиптическом цилиндре с сильно вытянутым сечением*. — Акуст. журн. **61**, №. 4 (2015), 423–427.
12. S. Hong, *Asymptotic theory of electromagnetic and acoustic diffraction by smooth convex surface of variable curvature*. — J. Math. Phys. **8**, №. 6 (1967), 1223–1232.

13. А. Зоммерфельд, *Дифференциальные уравнения в частных производных*. — М.: ИН. лит., 1950.
14. V. H. Weston, *Pressure pulse received due to an explosion in the Atmosphere at an arbitrary altitude, Part 1.* — The university of michigan radiation laboratory technical report 2886-1-T, 1960.
15. А. Б. Васильева, А. Н. Тихонов, *Интегральные уравнения*. М., МГУ, 1989.

Shanin A. V., Korol'kov A. I. Boundary integral equation and the problem of diffraction on a curved surface for the parabolic equation of the diffraction theory.

The two-dimensional problem of diffraction on a curved surface for the parabolic equation of the diffraction theory is considered. Ideal boundary conditions is satisfied on the surface. The boundary integral equation of Volterra type is introduced. Using the latter the problem of diffraction on parabola is analyzed. It is shown that solution of this problem coincides with the Fock asymptotic solution for cylinder. Also the iterative solution of the boundary integral equation is constructed. The problem of diffraction on a perturbation of a straight line is solved numerically using the boundary integral equation. It is showed that this numerical approach is relatively cheap.

МГУ имени М.В.Ломоносова,  
Дом 1, строение 2,  
Ленинские горы,  
119991, ГСП-1, Москва, Россия  
*E-mail:* a.v.shanin@gmail.com,  
korolkov@physics.msu.ru

Поступило 15 ноября 2016 г.