Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 451, 2016 г.

А. А. Федотов

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ АСИМТОТИКИ ФУНКЦИЙ МАЛЮЖИНЦА

§1. Введение

Пусть h – фиксированное положительное число. Мы будем обсуждать решения уравнения

$$\sigma\,(z+h) = (1+e^{-iz})\,\sigma\,(z-h), \tag{1}$$

на комплексной плоскости переменной z. Это уравнение введено в рассмотрение в работе [3], где изучались решения разностных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами, интерес к которым возник в связи с задачами из физики твердого тела. Позже оказалось, что родственные уравнения возникали при исследовании разных аналитических задач. В теории дифракции хорошо известно уравнение Малюжинца $\psi(z+h) = \cot(z/2+\pi/4)\psi(z-h)$. Его решения начали изучаться в [5] в 1958 году. Родственные уравнения изучались и в работах [2, 4] и [6].

Решения всех этих уравнений связаны друг с другом простыми соотношениями, и мы ограничимся обсуждением (1).

Мы исследуем асимптотики решений этого уравнения при $h \to 0$. Разностные уравнения с малым параметром сдвига естественно возникают в дифракции и физике твердого тела. В задачах дифракции на клине параметр сдвига в разностном уравнении пропорционален углу раствора клина, в задаче о спектре электрона в кристалле, помещенном в магнитное поле, он пропорционален магнитному потоку через ячейку периодичности кристалла, см., например, [1] и [7]. Формально $e^{h\frac{d}{dz}}f(z) = f(z+h)$. Поэтому, h оказывается малым параметром перед производной, а значит, является стандартным квазиклассическим параметром.

Ключевые слова: функция Малюжинца, разностные уравнения, квазиклассические асимптотики.

Работа была поддержана грантом РФФИ 14-01-00760-а и грантом СПбГУ 11.38.263.2014.

В разделе 2, следуя [3], мы без доказательств опишем решение уравнения (1) и его основные аналитические свойства (много других интересных свойств этого решения можно извлечь из процитированных работ). Два последующих раздела посвящены выводу квазиклассических асимптотик обсуждаемого решения на комплексной плоскости. В последнем кратком разделе, мы получим интегральное представление для Γ функции, используемое в работе.

При выводе асимптотических формул мы обозначаем буквой C положительные постоянные, не зависящие от h. Для двух функций f и g мы пишем, что $f(z) = O(g(z))$ для z в некоторой области, если в этой области $|f(z)| \leqslant C|g(z)|$.

§2. Минимальное решение

В этом параграфе мы считаем, что $0 < h < \pi$.

2.1. Существует единственное решение σ_0 уравнения (1), которое аналитично и не имеет нулей в полосе $S_0 = \{|\mathrm{Re}\, z| < \pi + h\}$ и допускает в ней асимптотические представления

$$\sigma_0(z) = 1 + o(1), \quad z \to -i\infty; \tag{2}$$

и

$$\sigma_0(z) = e^{-i\frac{z^2}{4h} + i\frac{\pi^2}{12h} + i\frac{h}{12}}(1 + o(1)), \quad \mathrm{Im}\, z \to +i\infty. \tag{3}$$

Заметим, что отношение любых двух решений уравнения (1) является $2h$-периодической функцией. Поэтому легко проверить, что

1) если два решения удовлетворяют только что сформулированным условиям, то их отношение – единица;

2) если имеется решение σ, аналитическое в полосе S_0, а отношение $\sigma(z)/\sigma_0(z)$ остается ограниченным при $\mathrm{Im}\, z \to \pm\infty$ и стремится к нулю при $\mathrm{Im}\, z \to -\infty$ и/или $\mathrm{Im}\, z \to +\infty$, то $\sigma(z) \equiv 0$.

Эти два наблюдения позволяют назвать σ_0 минимальным решением, аналитическим в полосе S_0.

2.2. Опишем интегральное представление для решения σ_0. В полосе $|\mathrm{Re}\, z| < \pi$ фиксируем ветвь функции $z \mapsto \ln(1 + e^{-iz})$ условием

$$\ln(1 + e^{-iz}) \to 0, \quad z \to -i\infty. \tag{4}$$

Функция σ_0 может быть представлена в виде

$$\sigma_0(z) = e^{\theta(z)}, \tag{5}$$

где θ – решение уравнения

$$\theta(z+h) = \ln(1+e^{-iz}) + \theta(z-h), \tag{6}$$

аналитическое в полосе S_0. Считая, что $|\mathrm{Re}\, z| < \pi$, положим

$$L(z) = \int\limits_{-i\infty}^{z} \ln(1+e^{-iz'})\, dz', \tag{7}$$

где интегрирование проводится по прямой $\mathrm{Re}\, z' = \mathrm{Re}\, z$. Тогда в S_0

$$\theta(z) = \frac{\pi}{8ih^2} \int\limits_{\gamma} \frac{L(z')}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)}\, dz'. \tag{8}$$

Здесь γ – прямая $\mathrm{Re}\, z' = \mathrm{Const}$, проходящая между точками $z \pm h$.

2.3. Используя уравнение (1), можно продолжить функцию σ_0 до мероморфной. Ее полюса оказываются расположенными в точках

$$-\pi - h - 2\pi l - 2hk, \quad l, k = 0,\, 1,\, 2,\, \dots,$$

а нули – в точках

$$\pi + h + 2\pi l + 2hk, \quad l, k = 0,\, 1,\, 2,\, \dots.$$

Нуль в точке $\pi + h$ и полюс в точке $-\pi - h$ являются простыми. Остальные нули и полюса оказываются простыми, если отношение h/π иррационально.

2.4. Функция σ_0 удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\sigma_0(z+\pi) = (1+e^{-\frac{i\pi}{h}z})\,\sigma_0(z-\pi), \tag{9}$$

$$\sigma_0(-z) = e^{-\frac{i}{4h}z^2 + \frac{i\pi^2}{12h} + \frac{ih}{12}}\, \frac{1}{\sigma_0(z)}, \tag{10}$$

и

$$\overline{\sigma_0(\overline{z})} = \frac{1}{\sigma_0(-z)}. \tag{11}$$

2.5. Справедлива формула

$$\sigma_0(-\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-\frac{i\pi^2}{12h} + \frac{ih}{24}}. \tag{12}$$

§3. Квазиклассические асимптотики вдали от нулей и полюсов

Выберем δ так, чтобы $0<\delta<\pi$, и обозначим через V_δ δ-окрестность точек лучей $z\geqslant 1$ и $z\leqslant -1$. Справедлива

Теорема 3.1. *В $\mathbb{C}_-\setminus V_\delta$ при достаточно малых h функция σ_0 допускает представление*

$$\sigma_0(z)=\exp\left(\frac{1}{2h}L(z)+O\left(h\left(1+|\mathrm{Re}\,z|\right)e^{-|\mathrm{Im}\,z|}\right)\right), \qquad (13)$$

где L – функция, введенная в разделе 2.2, см. (7).

Замечание 3.1. 1) Асимптотики σ_0 в $\mathbb{C}_+\setminus V_\delta$ получаются мгновенно с помощью (13) и соотношений (10)–(11).
2) Асимптотики в областях, полученные из $\mathbb{C}_-\setminus V_\delta$ сдвигом на $\pm 2\pi$ вытекают из (13) и уравнения (9). Эта идея, в частности, позволяет эффективно описывать σ_0 около ее нулей и полюсов.

Доказательство. Сначала предположим, что $\mathrm{Im}\,z\leqslant 0$ и $|\mathrm{Re}\,z|\leqslant\pi-\delta$. Представим функцию θ из (8) в виде

$$\theta(z)=\theta_0(z)+\Delta(z), \qquad (14)$$

где

$$\theta_0(z)=\frac{\pi}{8ih^2}L_0(z)\int\limits_\gamma\frac{dz'}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)}=\frac{1}{2h}\,L_0(z), \qquad (15)$$

а

$$\Delta(z)=\frac{\pi}{8ih^2}\int\limits_\gamma\frac{\int\limits_z^{z'}\ln(1+e^{-i\zeta})d\zeta}{\cos^2\left(\frac{\pi(z-z')}{2h}\right)}\,dz'. \qquad (16)$$

Оценим $\Delta(z)$. Интегрируя дважды по частям, последнюю формулу можно преобразовать к виду

$$\Delta(z)=\Delta_+(z)+\Delta_-(z) \qquad (17)$$

с

$$\Delta_\pm(z)=\pm\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\substack{\pm i\infty,\\ \mathrm{Re}\,z'=\mathrm{Re}\,z}}^{z} f_\pm\left(\frac{\pi(z'-z)}{2h}\right)\,\frac{e^{-iz'}}{1+e^{-iz'}}\,dz', \qquad (18)$$

и

$$f_\pm(\zeta) = \int\limits_{\substack{\pm i\infty,\\ \operatorname{Re} t = \operatorname{Re}\zeta}}^{\zeta} (\tan t \mp i)\,dt = i\ln(1 + e^{\pm 2i\zeta}). \tag{19}$$

Легко видеть, что $|f_\pm(\pm iy)| \leqslant Ce^{-\pi|y|/h}$ при $\pm y > 0$. Далее, на контуре интегрирования $\left|\frac{e^{-iz}}{1+e^{-iz}}\right| \leqslant C\min\{e^{\operatorname{Im} z}, 1\}$. Поэтому

$$|\Delta_-(z)| \leqslant C\int\limits_{-\infty}^{y} e^{-\frac{\pi}{h}(y-y')}\ e^{y'} dy' \leqslant Che^{y} \tag{20}$$

и

$$\begin{aligned} |\Delta_+(z)| &\leqslant C\int\limits_{y}^{0} e^{-\frac{\pi}{h}(y'-y)}\ e^{y'} dy' + C\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{h}(y'-y)} dy' \\ &\leqslant Ce^{\frac{\pi}{h}y}\int\limits_{y}^{0} e^{(1-\frac{\pi}{h})y'} dy' + Che^{\frac{\pi}{h}y}. \end{aligned} \tag{21}$$

Если $0 < h < \pi/2$, мы получаем $|\Delta_+(z)| \leqslant Che^{-|\operatorname{Im} z|}$. Утверждение леммы для рассматриваемых z вытекает из (14)– (15), (17) и (20)–(21).

Пусть теперь $z \in \mathbb{C}_- \setminus V_\delta$ и $\operatorname{Re} z \geqslant \pi - \delta$. Из уравнения (1) вытекает, что

$$\sigma_0(z) = \exp\left(\sum_{j=1}^{N} \ln\left(1 + e^{-i(z-(2j-1)h)}\right)\right)\sigma_0(\tilde z), \quad \tilde z = z - 2Nh. \tag{22}$$

Можно считать, что, как и в разделе 2.2, ветвь логарифма фиксирована условием его убывания при $\operatorname{Im} z \to -\infty$.

Если h достаточно мало, то можно считать, что $|\operatorname{Re}\tilde z| \leqslant \pi - \delta$. Мы так и будем делать.

Поскольку для z' на отрезке прямой, соединяющем z и $\tilde z$, выполняется равномерная по $\operatorname{Re} z'$ оценка $\left(\ln(1 + e^{-iz'})\right)'' = O(e^{-|\operatorname{Im} z'|})$, то легко видеть, что при достаточно малом h

$$\frac{1}{2h}\int\limits_{z-h}^{z+h}\ln\left(1+e^{-iz}\right)\,dz=\ln\left(1+e^{-iz}\right)+O\left(h^2e^{-|\operatorname{Im}z|}\right).$$

Отсюда и из (22) следует, что

$$\sigma_0(z)=\exp\left(\frac{1}{2h}\int\limits_{\tilde z}^{z}\ln\left(1+e^{-iz}\right)\,dz+O\left(h(z-\tilde z)e^{-|\operatorname{Im}z|}\right)\right)\sigma_0(\tilde z).$$

А из этой формулы и представления (13), доказанного в полуполосе, где $|\operatorname{Re}z|\leqslant\pi-\delta$ и $\operatorname{Im}z\leqslant 0$, следует это же представление для всех z, находящихся в $\mathbb{C}_-\setminus V_\delta$ справа от этой полуполосы. Для z, находящихся слева от нее доказательство проводится аналогично. □

§4. Асимптотики в окрестности точки $z=-\pi$

Здесь мы изучим σ_0 в окрестности точки $-\pi$. Благодаря соотношению (10) поведение σ_0 и вблизи точки π тоже описывается с помощью результатов этого раздела.

Пусть для $\delta>0$ и $a\in\mathbb{C}$ запись $V_\delta(a)$ обозначает δ-окрестность точки $z=a$. Пусть $0<\delta<2\pi$. Справедлива

Теорема 4.1. *Для $t\in V_\delta(0)$*

$$\sigma_0(-\pi+t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{\ln(2h)}{2h}t}\Gamma\left(\frac{t+h}{2h}\right)e^{\frac{1}{2h}\Lambda(t,h)},\tag{23}$$

где

$$\Lambda(t,h)=L(-\pi)+\int\limits_0^t\tilde l(s)ds+O\left(h^2\right),\quad \tilde l(s)=\ln(1-e^{-is})-\ln s,\tag{24}$$

а поправочный член аналитичен в $V_\delta(0)$. В определении функции $\tilde l(s)$ (аналитической там же) ветви логарифмов выбраны так, что $\tilde l(0)=i\pi/2$.

Сравним (13) и (23). Имеет место

Следствие 4.1. *Разрежем $V_\delta(0)$ вдоль отрицательной части вещественной оси. В разрезанной окрестности*

$$\sigma_0(-\pi+t)=\Upsilon\left(\frac{t}{2h}\right)e^{\frac{1}{2h}L(-\pi+t)+O(h)},\tag{25}$$

где

$$\Upsilon(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\tau\,(\ln\tau - 1)} \Gamma\left(\tau + \frac{1}{2}\right), \tag{26}$$

и ветвь логарифма выбрана так, что $\ln 1 = 0$. *Далее,* $\Upsilon(\tau) \to 1$ *при* $|\tau| \to \infty$.

Доказательство. В разрезанной окрестности старшие члены представлений (23) и (25) совпадают. Асимптотика Υ следует из асимптотики Г-функции. □

Следствие 4.1 показывает, что представления (13) и (23) дают один и тот же результат в общей области применимости.

Сравнивая (23) с (12), мы видим, что $\Lambda(0,h) = -\frac{i\pi^2}{6} + \frac{ih^2}{12}$. Сравнивая эту формулу с (24), получаем

$$L(-\pi) = -i\pi^2/6.$$

Теперь обратимся к доказательству Теоремы 4.1.

Доказательство. Ниже предполагается, что $t \in V_\delta(0)$.

Для $\mathrm{Re}\, t > -h$ из (8) следует, что

$$\theta(-\pi + t) = \frac{1}{2h} L(-\pi) + g(t) + \theta_1(t), \tag{27}$$

где

$$g(t) = \frac{\pi}{8ih^2} \int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{s\ln s - s}{\cos^2\left(\frac{\pi(t-s)}{2h}\right)}\, ds, \tag{28}$$

$$\theta_1(t) = \frac{\pi}{8ih^2} \int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\int\limits_0^s \tilde{l}(s')ds'}{\cos^2\left(\frac{\pi(t-s)}{2h}\right)}\, ds, \tag{29}$$

а интегрирование ведется по прямой $\mathrm{Re}\, s = \mathrm{Const}$, проходящей между $z - h/2$ и $z + h/2$, и ветвь логарифма в формуле для g – аналитическая на плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси и фиксированная условием $\ln z \in \mathbb{R}$ при $z > 0$.

Выражение $e^{g(t)}$ вычисляется явно: из интегрального представления (32) для Г-функции следует, что при $\operatorname{Re} t > -h$,

$$\Gamma\left(\frac{t+h}{2h}\right) = \sqrt{2\pi}\,\exp\left(\frac{\pi}{8ih^2}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{s\ln\frac{s}{2h}-s}{\cos^2(\frac{\pi}{2h}(t-s))}\,ds\right)$$
$$= \sqrt{2\pi}\,\exp\left(g(t) - \frac{\pi\ln(2h)}{8ih^2}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{s\,ds}{\cos^2(\frac{\pi}{2h}(t-s))}\right)$$

Благодаря нечетности $\zeta \mapsto \zeta/\cos^2(\zeta)$, последний интеграл равен

$$\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{t\,ds}{\cos^2(\frac{\pi}{2h}(t-s))} = 4ht/\pi,$$

и мы получаем соотношение

$$e^{g(t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{\ln(2h)}{2h}\,t}\,\Gamma\left(\frac{t+h}{2h}\right). \tag{30}$$

Заметим, что функция $\tilde{l}$ аналитична в полосе $-\delta < \operatorname{Re} s < \delta$. Чтобы завершить доказательство, нам осталось проверить, что

$$\theta_1(t) = \frac{1}{2h}\int\limits_0^t \tilde{l}(s)ds + O(h), \quad |t| \leqslant \delta < 2\pi. \tag{31}$$

Поскольку $\int\limits_0^s \tilde{l}(s')\,ds' = \int\limits_0^t \tilde{l}(s')\,ds' + \int\limits_t^s \tilde{l}(s)\,ds$, легко получить

$$\theta_1 = \frac{1}{2h}\int\limits_0^t \tilde{l}(s)ds + \Delta_1(t), \qquad \Delta_1(t) = \frac{\pi}{8ih^2}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\int\limits_t^s \tilde{l}(s')ds'}{\cos^2\left(\frac{\pi(t-s)}{2h}\right)}\,ds.$$

Действуя как при доказательстве Теоремы 3.1, получаем представление

$$\Delta_1(t) = \Delta_{1,+}(t) + \Delta_{1,-}(t),\ \ \Delta_{1,\pm}(t) = \pm\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\pm i\infty}^{t} f_\pm\left(\frac{\pi(s-t)}{2h}\right)\ \tilde{l}'(s)ds,$$

где $f_{\pm}$ – функции, определенные в (19). В полосе $|\mathrm{Re}\, s| \leqslant \delta$, выполнена оценка $|\tilde{l}'(s)| \leqslant C$. Используя ее и те же оценки для $f_{\pm}$, что и при доказательстве предыдущей теоремы, мы проверяем, что $|\Delta_1(t)| = O(h)$. Отсюда и вытекает (31). Это завершает доказательство теоремы. □

4.1. Интегральное представление для Γ-функции. Здесь мы выведем соотношение

$$\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi}\,\exp\left(\frac{\pi}{2i}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{s\ln s - s}{\cos^2(\pi(z-s))}\,ds\right), \quad \mathrm{Re}\, z > -\frac{1}{2}, \tag{32}$$

где интеграл берется вдоль прямой $\mathrm{Re}\, s = \mathrm{Const} > 0$, проходящей между точек $z \pm 1/2$, и используется ветвь логарифма, аналитическая на плоскости с разрезом вдоль отрицательной полуоси и удовлетворяющая условию $\ln 1 = 0$.

Обозначим правую часть в (32) через $F(z)$. Заметим, что $F(\,\cdot\,)$ и $\Gamma(\,\cdot + 1/2)$ аналитичны и не обращаются в нуль в полуплоскости $\mathrm{Re}\, z > -\frac{1}{2}$. Используя теорему о вычетах, легко проверить, что и $F(\,\cdot\,)$, и $\Gamma\left(\,\cdot + \frac{1}{2}\right)$ удовлетворяют разностному уравнению

$$F(z+\frac{1}{2}) = zF(z-\frac{1}{2}), \quad \mathrm{Re}\, z > 0. \tag{33}$$

Отсюда вытекает, что отношение $r(z) = F(z)\,/\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$ является целой 1-периодической функцией. Поэтому для доказательства (32), нужно лишь проверить, что $r(z) \to 1$ при $\mathrm{Im}\, z \to \pm\infty$ равномерно по $\mathrm{Re}\, z$. Это достаточно проверить в полосе $1 \leqslant \mathrm{Re}\, z \leqslant 2$. Дважды интегрируя по частям, мы получаем формулу

$$F(z) = \sqrt{2\pi}\, e^{z\ln z - z + \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{-i\infty}^{z} f_-(\pi(s-z))\frac{ds}{s} + \int\limits_{z}^{+i\infty} f_+(\pi(s-z))\frac{ds}{s}\right)}, \tag{34}$$

где контур интегрирования – прямая $\mathrm{Re}\, s = \mathrm{Re}\, z$, а $f_{\pm}$ - функции, определенные в (19). Очевидно, что при $1 \leqslant \mathrm{Re}\, z \leqslant 2$ и $\mathrm{Im}\, z \to \pm\infty$

$$\left|\int\limits_{-i\infty}^{z} f_-(i\pi(z-s))\frac{ds}{s}\right|, \quad \left|\int\limits_{z}^{+i\infty} f_+(i\pi(z-s))\frac{ds}{s}\right| \leqslant \frac{\mathrm{Const}}{|z|}.$$

Отсюда вытекает, что в полосе $1 \leqslant \mathrm{Re}\, z \leqslant 2$ функция F имеет асимптотику $F(z) = \sqrt{2\pi}\, e^{z\ln z - z}\,(1 + O(1/|z|))$ как и $\Gamma(\cdot + 1/2)$. Поэтому $r(z) \equiv 1$, что и требовалось доказать. □

Литература

1. V. Babich, M. Lyalinov, V. Grikurov, *Diffraction theory: the Sommerfeld-Malyuzhinets technique.* Oxford: Alpha Science, 2008
2. М. Бобровников, В. Фирсанов, *Дифракция угловых областях.* Томск: Томский Государственный Университет, 1988.
3. V. Buslaev, A. Fedotov, *On the difference equations with periodic coefficients.* — Adv. Theor. Math. Phys. **5** (2001), 1105–1168.
4. L. Faddeev, R. Kashaev, A. Volkov, *Strongly coupled quantum discrete Liouville theory. I Algebraic approach and duality.* — Commun. Math. Phys. **219** (2001), 199–219.
5. Г. Д. Малюжинец, *Возбуждение, отражение и излучение поверхностных волн от клина с заданными поверхностными импедансами.* — ДАН СССР **3** (1958), 752–755.
6. S. Ruijsenaars, *On Barnes multiple zeta and gamma functions.* — Adv. Math. **156** (2000) 107–132.
7. M. Wilkinson, *Critical properties of electron eigenstates in incommensurate systems.* — Proc. Royal Society of London. A **391** (1984), 305–350.

Fedotov A. A. Quasiclassical asymptotics of Malyuzhinets functions.

On the complex plane, we consider a difference equation related to the Malyuzhinets equation. Assuming that the translation parameter in the difference equation is small, we get the asymptotics of its solutions.

Ст.-Петербургский
Государственный университет,
Университетская наб. 7/9,
Санкт-Петербург, 199034, Russia
E-mail: a.fedotov@spbu.ru

Поступило 1 ноября 2016 г.