

М. М. Попов, Н. М. Семченко, Н. Я. Кирпичникова

О КОРОТКОВОЛНОВОЙ ДИФРАКЦИИ НА СИЛЬНО ВЫТЯНУТОМ ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья является продолжением работ [2–9] по дифракции коротких волн на вытянутом теле вращения (осесимметрический случай). В статье [8] было установлено, что для сильно вытянутого тела вращения метод параболического уравнения Леонтовича-Фока оказывается неприменим из-за того, что рекуррентная система уравнений теряет асимптотический характер по большому параметру и каждое из уравнений, включая главное параболическое уравнение, приобретает сингулярность в коэффициентах.

Это является прямым следствием используемых масштабов

$$s = O(k^{-1/3}), \quad n = O(k^{-2/3}),$$

пограничного слоя; здесь s – длина дуги вдоль меридианов (геодезических), n – длина внешней нормали к поверхности тела, k – волновое число. Напомним, что сами масштабы зависят от эвристического предположения какие члены в пограничном слое следует считать главными. В классическом методе Леонтовича-Фока [11] такими членами объявляются первая производная по s , вторая – по нормали n и третий член – это тот самый, который содержит радиус кривизны поверхности тела вдоль меридианов в окрестности границы свет-тень, см. по этому поводу также [1].

Однако, чем более вытянуто тело вращения, тем больше радиус кривизны его поверхности вдоль меридианов, т.е. тем более уплощается его поверхность в направлении меридианов.

Этот факт дает нам основание взять в качестве главного члена тот последующий член в разложении коэффициентов исходного уравнения Гельмгольца, который содержит производную второго порядка

Ключевые слова: коротковолновая дифракция, пограничный слой, лучевой метод, задача рассеяния для уравнения Шрёдингера, конечно разностные методы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), (грант No. 14-01-00535-A).

от кривизны вдоль меридианов на границе свет-тень (четность порядка необходима для сохранения выпуклости поверхности). Последнее приводит к другим масштабам и, соответственно, к другому пограничному слою. При этом в статье выводится оценка снизу на радиус кривизны ρ_0 тела вращения вдоль меридианов из условия, чтобы вклад от члена, содержащего ρ_0 , был достаточно мал в новых масштабах. Так для сфероида, полученного вращением вокруг оси z эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ и вытянутого вдоль оси z , возникающее условие на полуоси принимает вид

$$kb \gg \left(\frac{2}{27}\right)^{1/2} (ka)^2. \quad (1)$$

В данной статье численными методами решается задача коротковолновой дифракции плоской волны на сильно вытянутом теле вращения (осесимметрический случай) в окрестности границы свет-тень для краевых условий Дирихле и Неймана на поверхности тела. В ней мы придерживаемся обозначений, принятых в работе [2], и используем ряд формул из первых параграфов этой работы, не повторяя их вывод в тексте.

§2. ВЫВОД ГЛАВНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Поверхность рассеивателя, как и прежде, получена вращением вокруг оси z плоской кривой $x = f(z)$.

С целью упростить многие выкладки и формулы функция $f(z)$ считается заданной в виде $f(z) = f(0) - \varkappa \frac{z^4}{4!}$, где $\varkappa > 0$. Из этого предположения следует, что кривизна $K(z)$ поверхности вращения вдоль меридианов на экваторе $z = 0$ равна нулю, так что на границе свет-тень имеет место уплощение поверхности рассеивателя в этом направлении. Предположение это не приводит к ограничению общности задачи, так как мы будем рассматривать в данной работе только два первых члена асимптотики волнового поля.

Приведем ниже вспомогательные формулы, которые потребуются в дальнейшем.

Связь z с длиной дуги s вдоль меридиана для данной функции $f(z)$ такова:

$$\begin{aligned} s(z) &= z + \frac{\varkappa^2}{14 \cdot 36} z^7 + O(z^{13}), \\ z(s) &= s - \frac{\varkappa^2}{14 \cdot 36} s^7 + O(s^{13}). \end{aligned} \quad (2)$$

Связь декартовых координат x, z с криволинейными s, n описывается следующими формулами

$$\begin{aligned} x &= f(0) - \frac{\varkappa}{4!} s^4 + n + O(s^{10}) + O(ns^6), \\ z &= s - \frac{1}{14} \left(\frac{\varkappa}{6}\right)^2 s^7 + \frac{\varkappa}{6} ns^3 + O(s^{13}) + O(ns^9). \end{aligned} \quad (3)$$

Далее обратимся к выводу параболического уравнения из исходного уравнения Гельмгольца после выделения быстро осциллирующего вдоль геодезических (меридианов) множителя $U = \exp\{iks\}W$, где W называется функцией ослабления.

Как и в работе [2] главное параболическое уравнение для функции ослабления W возникает из части A оператора Гельмгольца. После разложения коэффициентов A по степеням s и n выделяются следующие главные члены

$$\tilde{L}_0 W = 2ik \frac{\partial W}{\partial s} + \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + k^2 \varkappa ns^2 W. \quad (4)$$

Последнее слагаемое появляется из коэффициента $k^2(1 - h_s^{-2})$ так же, как и в методе Леонтовича-Фока, но теперь оно содержит s^2 .

Масштабы нового погранслоя следуют из требования, чтобы все слагаемые в правой части (4) были одного порядка по k при $k \rightarrow \infty$. В результате получаем, что $s = O(k^{-1/7})$, $n = O(k^{-4/7})$, и безразмерные координаты σ и ν погранслоя принимают вид

$$\sigma = \frac{1}{2}(4\varkappa)^{2/7} k^{1/7} s; \quad \nu = (4\varkappa)^{1/7} k^{4/7} n. \quad (5)$$

Оператор \tilde{L}_0 в (4) преобразуется к виду $\tilde{L}_0 = \Phi L_0$, в котором выделяется общий постоянный множитель $\Phi = k^{8/7}(4\varkappa)^{2/7}$, так что главное параболическое уравнение оказывается таким

$$L_0 W \equiv i \frac{\partial W_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial \nu^2} + \nu \sigma^2 W_0 = 0. \quad (6)$$

Большим параметром, аналогичным параметру Фока, в этом пограничном слое является величина $M = k^{1/7}(4\kappa)^{-1/21}$; для множителя Φ получаем следующее выражение $\Phi = M^8(4\kappa)^{2/3}$.

Существенным для дальнейшего является тот факт, что первый поправочный член к решению уравнения (6), т.е. второй член асимптотического разложения, уже имеет порядок $O(M^{-6})$ по большому параметру M . Это проверяется непосредственным вычислением второго члена оператора A , см. [2], в разложении его коэффициентов по степеням σ и ν .

Обратимся далее к разложению части B оператора Гельмгольца, см. (1.7) в [2], в рассматриваемом погранслое. Эта процедура требует несложных, но громоздких алгебраических преобразований, базирующихся на формулах (2), (3) и явном виде коэффициентов Ламе $h_s = 1 + nK(z(s))$, $h_\varphi = f(z(s)) + n\frac{dz}{ds}$, где φ – азимутальный угол.

Мы опускаем эти преобразования и приведем окончательный результат:

$$BW = \Phi \frac{\Lambda}{M^4} \left\{ \frac{\partial W}{\partial \nu} - \frac{i\sigma^3}{3}W - \frac{1}{M^6} \frac{\sigma^3}{6} \frac{\partial W}{\partial \sigma} + \dots \right\} \quad (7)$$

Здесь параметр Λ , характеризующий вытянутость тела вращения, имеет вид $\Lambda = \frac{(4\kappa)^{-1/3}}{f(0)}$ и зависит тем самым от абсолютной величины 4-й производной от функции $f(z)$. Он снова входит в рекуррентную систему уравнений пограничного слоя в виде отношения Λ/M^4 и его целых положительных степеней, и снова появляется ограничение $\Lambda/M^4 = o(1)$ при $M \rightarrow \infty$ для того, чтобы рекуррентная система уравнений сохраняла асимптотический характер.

Обратимся к оценке величины радиуса кривизны ρ_0 поверхности рассеивателя в направлении меридианов на границе свет-тьнь, при котором можно говорить об уплощении этой поверхности. Пусть разложение кривизны $K(s)$ по степеням s имеет вид $K(s) = \frac{1}{\rho_0} + \kappa \frac{s^2}{2} + O(s^4)$. Тогда для коэффициента $k^2(1 - h_s^{-2})$ вблизи границы свет-тьнь $s = 0$ получаем

$$\begin{aligned} k^2(1 - h_s^{-2}) &= \frac{2}{\rho_0} k^2 n + k^2 \kappa n s^2 - \frac{3}{\rho_0^2} k^2 n^2 + \dots \\ &= \frac{2}{\rho_0} \frac{k^{10/7}}{(4\kappa)^{1/7}} \nu + (4\kappa)^{2/7} k^{8/7} \nu \sigma^2 - \frac{3\nu^2 k^{6/7}}{\rho_0^2 (4\kappa)^{2/7}} + \dots, \quad (8) \end{aligned}$$

где σ и ν суть координаты погранслоя (5), имеющие порядок $O(1)$ при $k \rightarrow \infty$. Вынося за скобку общий множитель $\Phi = k^{8/7}(4z)^{2/7}$, получаем

$$k^2(1 - h_s^{-2}) = \Phi \left\{ \frac{2}{\rho_0} \frac{k^{2/7}}{(4z)^{3/7}} \nu + \nu \sigma^2 + O(k^{-2/7}) \right\}. \quad (9)$$

Далее полагаем, что $\frac{2}{\rho_0} \frac{k^{2/7}}{(4z)^{3/7}} = o(1)$ при $k \rightarrow \infty$, откуда и возникает условие на радиус кривизны, которое отправляет первое слагаемое в поправочные (последующие) члены асимптотического разложения,

$$\rho_0 \gg 2 \left[\frac{k^2}{(4z)^3} \right]^{1/7}$$

при больших k .

Действительно, при этом второе слагаемое $\nu \sigma^2$ в фигурных скобках в (9) является доминирующим, поскольку оно остается порядка $O(1)$. Приведенное выше неравенство (1) для эллипсоида вращения следует из полученного неравенства для продольного радиуса кривизны ρ_0 .

§3. ВОЛНОВОЕ ПОЛЕ ПРИ $\sigma \rightarrow -\infty$

Остановимся сперва на представлении падающей плоской волны $U^{\text{inc}} = \exp(ikz)$ в погранслое в окрестности границы свет-тень. Для этого воспользуемся формулами связи (3) декартовых x, z и криволинейных s, n координат. Переходя затем к растянутым координатам σ, ν , получаем

$$z = s + \frac{1}{k} \left(\frac{1}{3} \nu \sigma^3 - \frac{1}{63} \sigma^7 \right) + O(k^{-13/7}). \quad (10)$$

Выделим в U^{inc} быстро осциллирующий множитель

$$U^{\text{inc}} = \exp(iks) W^{\text{inc}},$$

тогда для функции ослабления получаем следующее разложение

$$W^{\text{inc}}(\sigma, \nu) = \exp \left\{ i \left(\frac{1}{3} \nu \sigma^3 - \frac{1}{63} \sigma^7 \right) \right\} [1 + O(M^{-6})]. \quad (11)$$

Отметим, что главный член набегающей плоской волны в (11) является точным решением параболического уравнения (6) и первый поправочный член уже имеет порядок $O(M^{-6})$.

Далее нам потребуется построить асимптотику отраженной волны при $\sigma \rightarrow -\infty$ для формулировки задачи рассеяния в погранслое.

В этом пункте мы воспользуемся методом, предложенным в работе [3], и сохраним, по возможности, принятые там обозначения.

Обозначим точку отражения луча через x_*, z_* в декартовых и $s_*, n = 0$ в криволинейных координатах; очевидно что $z_* = z(s_*)$ и $x_* = f(z_*)$ ввиду формул (2). Уравнения отраженных лучей запишем в каноническом виде

$$\frac{x - x_*}{p_x(x_*, z_*)} = \frac{z - z_*}{p_z(x_*, z_*)} = t, \quad (12)$$

где p_x и p_z – координаты единичного вектора, направленного вдоль отраженного луча и вычисляемые в точке отражения. Пусть $\tan \gamma = f'(z)$, тогда нетрудно видеть, что

$$p_x = \sin 2\gamma, \quad p_z = \cos 2\gamma \quad (13)$$

и угол γ вычисляется в точке $z_* = z(s_*)$.

В качестве лучевых координат берем s_* и длину вдоль отраженного луча t . Эйконал отраженной волны τ_{ref} строится интегрированием I-формы $\omega^I = p_x dx + p_z dz$ на области, занятой отраженными лучами, где она является не только замкнутой, но и точной. Причем эту процедуру нужно выполнять в криволинейных координатах, и решающим моментом здесь является тот факт, что координаты s и n малы, так как они должны принадлежать погранслою.

Для этого форму ω^I нужно пересчитать в s, n и затем в координатах пограничного слоя σ, ν . Формулы связи координат (3) позволяют легко пересчитать дифференциалы dx и dz . Сложнее обстоит дело с компонентами p_x, p_z направляющего вектора отраженного луча, которые не зависят от лучевого параметра t , т.к. лучи являются прямыми.

Раскладывая правые части в равенствах (13) по степеням s_* (точка отражения s_* также находится в погранслое), получаем

$$\begin{aligned} p_x(s_*) &= -\frac{\kappa}{3}s_*^3 + O(s_*^9), \\ p_z(s_*) &= 1 - \frac{\kappa^2}{18}s_*^6 + O(s_*^{12}) \end{aligned} \quad (14)$$

Теперь систему уравнений (12) для отраженных лучей в погранслое можно представить в координатах s и n в следующем виде

$$\begin{aligned}
-\frac{\varkappa}{4!}(s^4 - s_*^4) + n + O(ns^6) &= t \left(-\frac{\varkappa}{3}s_*^3 + O(s_*^9) \right) \\
s - s_* - \frac{\varkappa^2}{14 \cdot 36}(s^7 - s_*^7) + \frac{\varkappa}{6}ns^3 + O(s^{13}) &= t(1 + O(s_*^6))
\end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения (15) позволяют, в принципе, найти лучевые координаты s_* и t в погранслое как функции от s и n . Для нашей цели достаточно это сделать лишь в главных членах, выписанных в (15). Из второго уравнения следует, что $t \simeq s - s_*$, и подставляя это значение t в первое из них, приходим к алгебраическому уравнению для s_*

$$\left(\frac{s_*}{s}\right)^4 - \frac{8}{7}\left(\frac{s_*}{s}\right)^3 + \frac{1}{7} = \frac{24}{7\varkappa} \frac{n}{s^4}. \quad (16)$$

При этом нам нужен такой корень, который при $n = 0$ дает $s_* = s$, так как s_* есть точка отражения падающего луча. Этот корень, как можно видеть, является простым. Он может быть выписан в радикалах через коэффициенты уравнения, но формула оказывается столь громоздкой, что с ней невозможно работать. Поэтому в данном случае, в отличие от работы [3], построить отраженную волну в погранслое в явном виде не удастся. Однако, нам достаточно построить ее асимптотику лишь при $\sigma \rightarrow -\infty$.

С этой целью перейдем в (16) к растянутым координатам σ, ν пограничного слоя. Очевидно, что $s_*/s = \sigma_*/\sigma$, и правая часть $q = \frac{24}{7\varkappa} \frac{n}{s^4}$ принимает вид $q = \frac{6}{7} \frac{\nu}{\sigma^4}$. Для ограниченных ν и $\sigma \rightarrow -\infty$, величина q мала, и искомым корнем уравнения будем искать в виде степенного ряда по q

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_*}{\sigma} &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m q^m; \\
a_1 &= \frac{7}{4}, \quad a_2 = -\frac{9}{2}a_1^2, \dots
\end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, формула (17) позволяет выразить лучевую координату σ_* как функцию внутренних координат σ, ν погранслоя и, соответственно, p_x и p_z в (14) представить в виде функций от них же.

Обратимся далее к вычислению эйконала отраженной волны.

Принимая во внимание равенства (3) и (14) дифференциальную форму ω^I можно представить в координатах s, n в следующем виде

$$\omega^I = ds \left\{ 1 + \frac{\varkappa}{2} ns^2 - \frac{\varkappa^2}{72} (s^6 + 4s_*^6) + \frac{\varkappa^2}{18} s_*^3 s^3 + O(s^{12}) \right\} + dn \left\{ -\frac{\varkappa}{3} \left(s_*^3 - \frac{1}{2} s^3 \right) + O(s^9) \right\}, \quad (18)$$

где отброшены члены более высокого порядка малости, чем k^{-1} . Напомним, что s и s_* порядка $O(k^{-1/7})$, n порядка $O(k^{-4/7})$ и s_* есть функция от s и n .

В отраженной волне U^{ref} выделим быстро осциллирующий множитель, полагая $U^{\text{ref}} = e^{iks} W^{\text{ref}}$, тогда для эйконала функции ослабления W^{ref} получим из (18) следующее выражение в координатах σ и ν :

$$d\tau_{\text{ref}} = \frac{1}{k} \left\{ d\sigma \left[\nu\sigma^2 + \frac{4}{9}\sigma_*^3\sigma^3 - \frac{1}{9}(\sigma^6 + 4\sigma_*^6) \right] + d\nu \left[\frac{1}{3}\sigma^3 - \frac{2}{3}\sigma_*^3 \right] + O(M^{-6}) \right\} \quad (19)$$

Для восстановления эйконала отраженной волны τ_{ref} из формулы (19) мы интегрируем вначале по σ вдоль границы рассеивателя $\nu = 0$ и выбираем первообразную так, чтобы она совпадала с эйконалом падающей волны. Существенно при этом, что на границе $\nu = 0$ имеет место равенство $\sigma_* = \sigma$, как это следует из уравнений (16) и (17). Затем интегрируем дифференциальную форму (19) по ν при фиксированном σ по отрезку $[0, \nu]$. При этом возникает интеграл $\int_0^\nu \sigma_*^3 d\nu$, для вычисления которого нужно воспользоваться формулой (17):

$$\sigma_*^3 = \sigma^3 + \frac{9\nu}{2\sigma} + O(\sigma^{-5})$$

При $\sigma \rightarrow -\infty$ мы сохраняем от интеграла только главный член, так что $\int_0^\nu \sigma_*^3 d\nu = \sigma^3\nu + O(\sigma^{-1})$. Окончательно для эйконала отраженной волны τ_{ref} получаем следующее выражение

$$\tau_{\text{ref}} = -\frac{1}{k} \left\{ \frac{1}{3}\sigma^3\nu + \frac{1}{63}\sigma^7 + O\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right\} + O(M^{-6}). \quad (20)$$

Обратимся далее к вычислению амплитуды отраженной волны при $\sigma \rightarrow -\infty$, которая, как известно, содержит геометрическое расхождение $J = \left| \frac{D(x,z)}{D(s_*,t)} \right|$. Напомним, что s_* и t являются лучевыми координатами для отраженных лучей. Используя уравнения для лучей (12), а также формулы (2), (3) и (14), получаем последовательно в рассматриваемом погранслое

$$\begin{aligned} \frac{D(x,z)}{D(s_*,t)} &= \frac{dz(s_*)}{ds_*} \left| \begin{array}{cc} f'(z(s_*)) & p_x(s_*) \\ 1 & p_z(s_*) \end{array} \right| + t \left| \begin{array}{cc} \frac{dp_x(s_*)}{ds_*} & p_x(s_*) \\ \frac{dp_z(s_*)}{ds_*} & p_z(s_*) \end{array} \right| \\ &= \frac{\varkappa}{6} s_*^3 - \varkappa s_*^2 t + O(s_*^9) + O(ts_*^8). \end{aligned} \quad (21)$$

На заключительном этапе нужно исключить лучевые параметры в правой части (21), выразив их через координаты σ, ν .

Принимая во внимание, что $t \simeq s - s_*$, из уравнения (16) следует, что $s_* = s \left(1 + \frac{7}{4}q + O(q^2) \right)$, где $q = \frac{24}{7\varkappa} \frac{\nu}{s^4}$, а из формулы (21) получаем окончательное выражение для геометрического расхождения J

$$J = \frac{\varkappa}{6} |s^3| \left(1 + \frac{54}{\varkappa} \frac{\nu}{s^4} + O(q^2) \right) = C |\sigma^3| \left(1 + \frac{27}{2} \frac{\nu}{\sigma^4} + O(q^2) \right), \quad (22)$$

в котором постоянная $C = \frac{\varkappa^{1/7} 2^{2/7}}{3k^{3/7}}$.

Обратим внимание, что в формуле для J сохранен поправочный член ν/σ^4 , так как в окрестности границы $\nu = 0$ величина J должна зависеть от обеих координат σ и ν .

Далее, при $\nu = 0$ имеем $\sigma = \sigma_*$, поэтому произвольная постоянная в амплитуде отраженной волны A^{ref} должна быть равна $C|\sigma_*|^3$. Таким образом, для краевого условия Дирихле получаем

$$A^{\text{ref}} = -\sqrt{\frac{|\sigma_*|^3}{|\sigma|^3 \left(1 + \frac{27}{2} \frac{\nu}{\sigma^4} \right)}} = -\sqrt{\frac{2\sigma^4 + 9\nu}{2\sigma^4 + 27\nu}}. \quad (23)$$

Во втором равенстве (23) учтен тот факт, что на множестве отраженных лучей σ_* меняется в соответствии с равенством $\sigma_*^3 = \sigma^3 + \frac{9}{2} \frac{\nu}{\sigma}$ при больших отрицательных σ . При этом знак минус перед радикалом происходит от коэффициента отражения при условии Дирихле на поверхности тела.

Приведем окончательную формулу для главного члена асимптотики отраженной волны $U_{-\infty}^{\text{ref}}$ при $\sigma \rightarrow -\infty$

$$U_{-\infty}^{\text{ref}} = -\sqrt{\frac{2\sigma^4 + 9\nu}{2\sigma^4 + 27\nu}} \exp \left\{ iks - i \left(\frac{1}{3}\nu\sigma^3 + \frac{1}{63}\sigma^7 \right) \right\}. \quad (24)$$

§4. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА

В рассматриваемом случае, так же как и в погранслое Фока, главный член асимптотики функции ослабления W_0 должен быть решением параболического уравнения $L_0 W_0 = 0$, которое соответствует двумерной задаче дифракции в сечении $\varphi = \text{const}$. Таким образом, в осесимметрической задаче главный член W_0 не зависит от поперечной кривизны тела вращения в окрестности границы свет-тень. Зависимость от этой кривизны содержится в операторе B из-за входящего в него коэффициента Ламе h_φ , см. равенство (1.7) в статье [2].

Обозначим через L_1 следующий оператор в равенстве (7) $L_1 = \frac{\partial}{\partial \nu} - \frac{i\sigma^3}{3}$, соответствующий главному члену из разложения коэффициентов оператора B по отрицательным степеням большого параметра M . Он приводит к поправочному члену асимптотики, имеющему порядок Λ/M^4 . При $\Lambda = M^{4-\epsilon}$, $0 < \epsilon < 4$, сохраняется асимптотический характер рекуррентной системы уравнений для рассматриваемого нами погранслоя, и при этом L_1 доминирует над следующей поправкой к L_0 , возникающей из части A оператора Гельмгольца. Как уже отмечалось она имеет порядок $O(M^{-6})$.

Мы в дальнейшем ограничимся рассмотрением первых двух уравнений рекуррентной системы для волнового поля при условиях Дирихле и Неймана на поверхности тела вращения.

С этой целью будем искать функцию ослабления W в виде двух слагаемых

$$W = W_0 + \frac{\Lambda}{M^4} W_1 \quad (25)$$

соответственно сумме операторов $L_0 + \frac{\Lambda}{M^4} L_1$, и получаем два уравнения: однородное для W_0

$$L_0 W_0 \equiv i \frac{\partial W_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial \nu^2} + \nu \sigma^2 W_0 = 0 \quad (26)$$

и второе для W_1 уже неоднородное уравнение

$$L_0 W_1 = -L_1 W_0. \quad (27)$$

Очевидно, что сами уравнения (26) и (27) не зависят от краевых условий и должны выполняться для волнового поля при условиях и Дирихле и Неймана.

Рассмотрим далее задачу Дирихле. Функцию ослабления будем обозначать как $W^{(D)}$. Краевые условия для $W_0^{(D)}$ и $W_1^{(D)}$, очевидно имеют вид

$$W_0^{(D)} \Big|_{\nu=0} = 0, \quad W_1^{(D)} \Big|_{\nu=0} = 0. \quad (28)$$

Условие согласования волнового поля $W^{(D)}$ с лучевой асимптотикой при $\sigma \rightarrow -\infty$ непосредственно следует из равенств (11) и (24) и имеет вид

$$W_0^{(D)} \rightarrow \exp \left\{ i \left(\frac{1}{3} \nu \sigma^3 - \frac{1}{63} \sigma^7 \right) \right\} - \sqrt{\frac{2\sigma^4 + 9\nu}{2\sigma^4 + 27\nu}} \exp \left\{ -i \left(\frac{1}{3} \nu \sigma^3 + \frac{1}{63} \sigma^7 \right) \right\}, \quad W_1^{(D)} \rightarrow 0. \quad (29)$$

Отметим, что условие на $W_1^{(D)}$ вытекает из того факта, что набегающая плоская волна не зависит от параметра Λ .

Далее, током $I^{(D)}$ на поверхности рассеивателя в данном случае называют нормальную производную $I^{(D)} = \frac{\partial W^{(D)}}{\partial \nu} \Big|_{\nu=0}$. В пограничном слое, в окрестности границы свет-тень для тока получаем следующее выражение из равенства (25)

$$I^{(D)} = \left(\frac{\partial W_0^{(D)}}{\partial \nu} + \frac{\Lambda}{M^4} \frac{\partial W_1^{(D)}}{\partial \nu} \right) \Big|_{\nu=0}, \quad (30)$$

содержащее поправку на вытянутость тела.

С другой стороны, лучевой метод дает следующее выражение для тока $I_{\text{луч}}^{(D)}$ при больших отрицательных σ

$$I_{\text{луч}}^{(D)} = \frac{2i}{3} \sigma^3 \exp \left\{ -i \frac{1}{63} \sigma^7 \right\} \quad (31)$$

Обратимся далее к случаю краевого условия Неймана. Функцию ослабления обозначим через $W^{(N)}$. Вместо равенств (28), получаем, очевидно, следующие краевые условия на поверхности рассеивателя

$$\left. \frac{\partial W_0^{(N)}}{\partial \nu} \right|_{\nu=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial W_1^{(N)}}{\partial \nu} \right|_{\nu=0} = 0. \quad (32)$$

В лучевом методе коэффициент отражения при краевом условии Неймана равен +1, поэтому в формуле (24) для отраженной волны следует заменить лишь знак перед радикалом на +1. В результате условия согласования (29) волнового поля с лучевой формулой при $\sigma \rightarrow -\infty$ примет вид

$$W_0^{(N)} \rightarrow \exp \left\{ i \left(\frac{1}{3} \nu \sigma^3 - \frac{1}{63} \sigma^7 \right) \right\} + \sqrt{\frac{2\sigma^4 + 9\nu}{2\sigma^4 + 27\nu}} \exp \left\{ -i \left(\frac{1}{3} \nu \sigma^3 + \frac{1}{63} \sigma^7 \right) \right\}, \quad W_1^{(N)} \rightarrow 0. \quad (33)$$

Током в данном случае называется значение волнового поля на границе рассеивателя

$$I^{(N)} = \left(W_0^{(N)} + \frac{\Lambda}{M^4} W_1^{(N)} \right) \Big|_{\nu=0}, \quad (34)$$

и вместо равенства (31) для лучевого тока получаем

$$I_{\text{луч}}^{(N)} = 2 \exp \left\{ -i \frac{1}{63} \sigma^7 \right\} \quad (35)$$

Обе возникающие задачи для волновых полей $W^{(D)}$ и $W^{(N)}$ в пограничном слое нуждаются в краевом условии при $\nu \rightarrow +\infty$.

Гамильтониан $H = -\left(\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \nu \sigma^2\right)$ в уравнении типа Шрёдингера (26) на полуоси $0 \leq \nu < \infty$ с краевым условием как Дирихле, так и Неймана при $\nu = 0$ является самосопряженным в $L_2(0, \infty)$ при каждом σ . Поэтому было бы естественно потребовать, чтобы $W_0 \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$. Однако, ни падающая волна (11), ни отраженная (24) не принадлежат $L_2(0, \infty)$. С математической точки зрения постановка возникающих здесь задач рассеяния нуждается в существенных уточнениях, см. например работы [5, 7] о волнах шепчущей галереи в окрестности точек

уплощения границы, где теоретически исследовались и численно решались похожие задачи для уравнения типа Шрёдингера.

Тем не менее при численном решении обеих задач мы будем требовать, чтобы при достаточно большом ν_* искомые решения обращались в нуль. Это, конечно, приведет к появлению отраженных волн от этой границы, но при больших ν_* влиянием их на волновое поле в окрестности рассеивателя можно пренебречь.

Напомним, что в погранслое Фока краевое условие $W \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$ возникало из принципа предельного поглощения. Это возможно было реализовать, поскольку переменные в параболическом уравнении там разделялись и давали возможность решить задачу в аналитическом виде.

В данном случае переменные в уравнении (26) не разделяются, и возникающие задачи приходится решать численно. При этом асимптотические условия (29) и (33) заменяются условиями Коши при некотором отрицательном σ , в окрестности которого численное решение согласуется с лучевой асимптотикой (29), (33).

§5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Чтобы выяснить, насколько значимой является поправка к главному члену асимптотики функции ослабления и, следовательно, как сильно это поправка влияет на ток на поверхности рассеивателя, сформулированные в предыдущем разделе задачи были решены нами численно. Для вычисления функции ослабления на сетке использовались два метода: конечно разностная схема [6], и одна из разновидностей метода Галеркина [10]. Отметим, что ранее, в работе [9], обе эти численные схемы уже применялись к задаче Фока в окрестности границы свет-тень и продемонстрировали хорошее совпадение полученных результатов в узлах сетки как между собой, так и в сравнении с точным решением, вычисленным по формулам В.А. Фока.

Рассмотрим вначале случай краевого условия Дирихле. На Рис. 1 и Рис. 2 изображены соответственно модуль главного члена волнового поля $|W_0^{(D)}(\nu, \sigma)|$ и поправки $|W_1^{(D)}(\nu, \sigma)|$, которые были вычислены на сетке $-2,5 \leq \sigma \leq 2,5$ и $0 \leq \nu \leq 30$. Предельный луч изображен белой пунктирной линией. Об относительной величине поправки $W_1^{(D)}$ можно судить по яркости интерференционных максимумов.

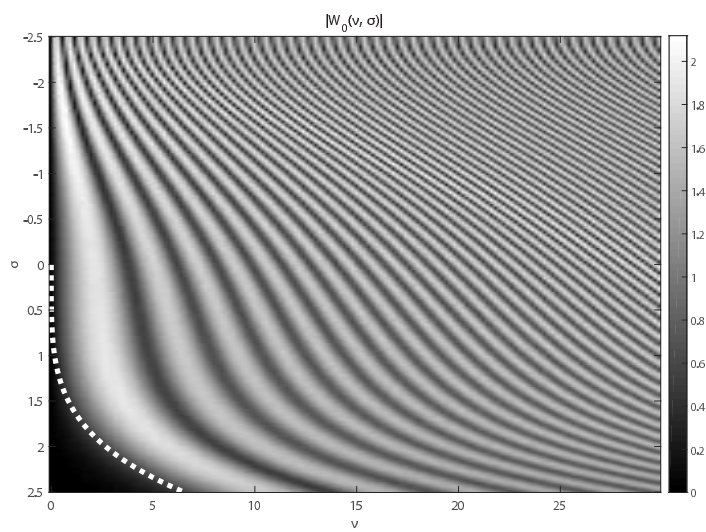


Рис. 1. Поле $|W_0^{(D)}(\nu, \sigma)|$.

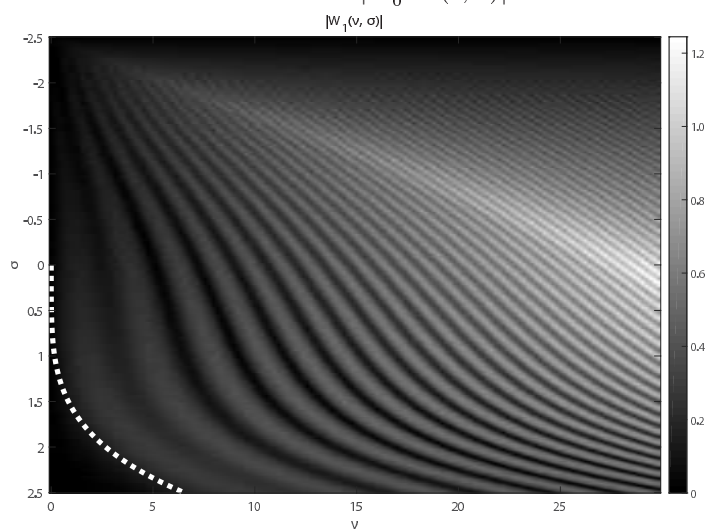


Рис. 2. Поле $|W_1^{(D)}(\nu, \sigma)|$.

На обоих рисунках мы видим четкую интерференционную картину падающей и отраженной волн и ее эволюцию при движении к предельному лучу в затененной части погранслоя. При этом нежелательное влияние отражений от фиктивной границы при $\nu = \nu_*$ сведено к минимуму выбором параметров сетки, в узлах которой вычисляются значения поля. Однако, на Рис. 1 и Рис. 2 следы этих нежелательных отражений заметить все же можно (особенно там, где изображена поправка к главному члену поля), поскольку авторами ставилась задача добиться только того, чтобы отражения от фиктивной границы не оказывали влияния на значения тока на поверхности рассеивателя. Надежное подавление таких отражений на всей сетке, т.е. не только в окрестности границы $\nu = 0$, потребовало бы, разумеется, переформулировки граничных условий.

На Рис. 3 ток на границе $\nu = 0$, вычисленный по приближенным значениям $W_0^{(D)}$ в узлах сетки, сравнивается с током в лучевом приближении, посчитанным по формуле (31). Здесь безразмерная длина дуги σ откладывается по горизонтали, $-2,5 \leq \sigma \leq 2,5$. По вертикали отложены реальная и мнимая части тока. Почти полное совпадение токов вблизи $\sigma_0 = -2,5$ демонстрирует согласование численного решения с асимптотическим условием (29), т.е. с лучевой асимптотикой. Неожиданным результатом оказалась малое различие обоих токов во всем погранслое, если при $\sigma \geq 0$, т.е. в затененной его части, лучевой ток продолжить нулем.

Следующие Рис. 4 и Рис. 5 показывают влияние поправки на вытянутость тела вращения, описываемую вторым слагаемым в формуле (30), на величину тока в погранслое. На Рис. 4 токи, соответствующие $W_0^{(D)}$ и $W_1^{(D)}$, сравниваются друг с другом, т.е. не учитывается множитель Λ/M^4 в формуле (30), что позволяет лучше оценить величину поправки, которую вносит в полный ток поправка к главному члену поля. На Рис. 5 сравнивается полный ток на границе, с учетом поправки в (30), с током от главного члена $W_0^{(D)}$ при значениях множителя при поправочном члене Λ/M^4 , дающим самый большой, при $\Lambda/M^4 = 0,5848$, и самый малый, при $\Lambda/M^4 = 0,0400$, вклады в полный ток из всего множества параметров Λ и M^4 , для которых проводились вычисления.

Результат, продемонстрированный на Рис. 5, наглядно показывает, что, при вычислении тока на границе, поправкой на вытянутость

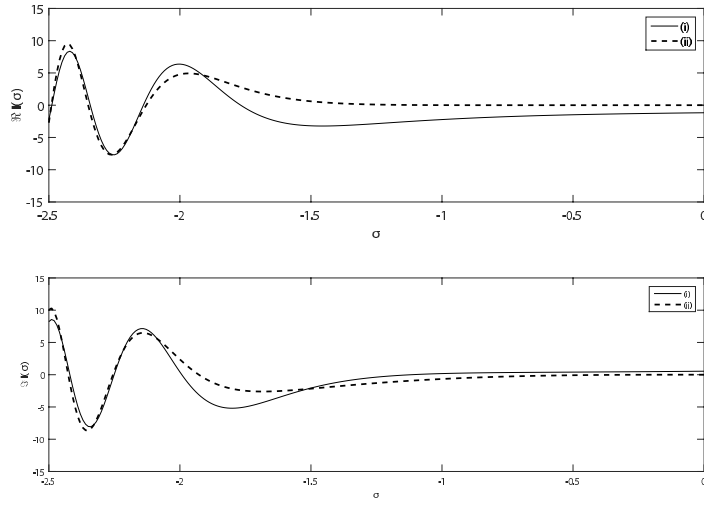


Рис. 3. Сравнение тока $I^{(D)}$ (i), вычисленного по значениям $W_0^{(D)}$ на сетке, с током $I_{\text{луч}}^{(D)}$ (ii).

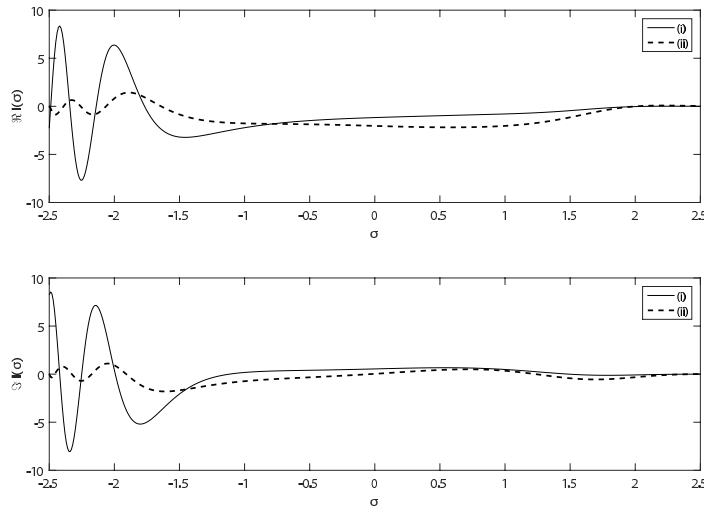


Рис. 4. Сравнение тока (i), вычисленного по значениям $W_0^{(D)}$, с током (ii), вычисленным по значениям $W_1^{(D)}$.

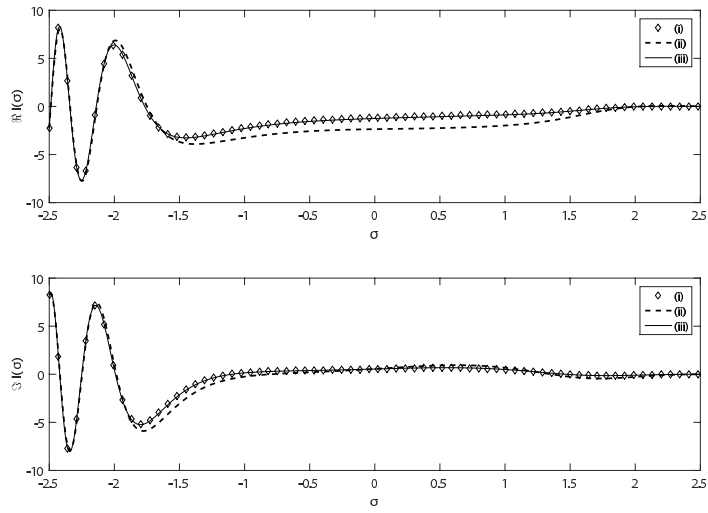


Рис. 5. Сравнение тока $I^{(D)}$ (i), вычисленного только по $W_0^{(D)}$, с полным током в случае наибольшего (ii) и наименьшего (iii) вклада от поправочного члена.

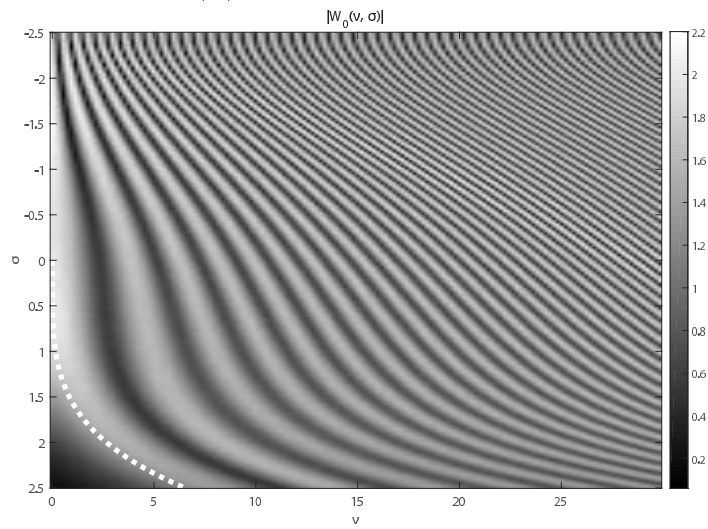
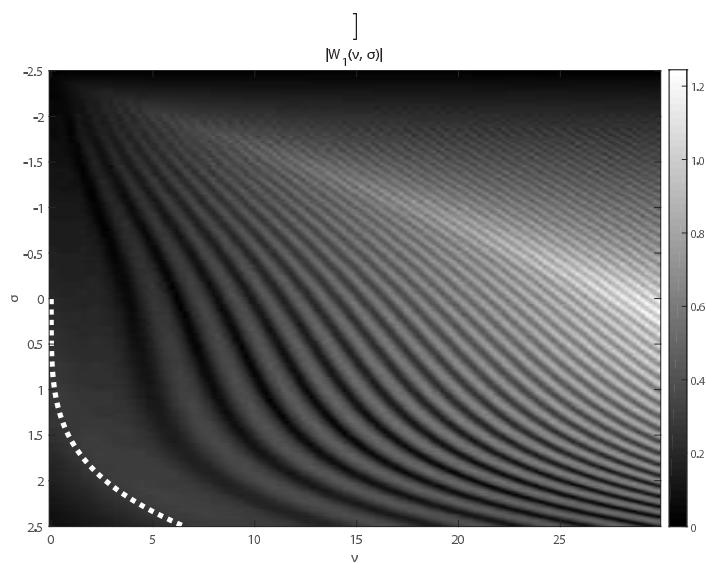
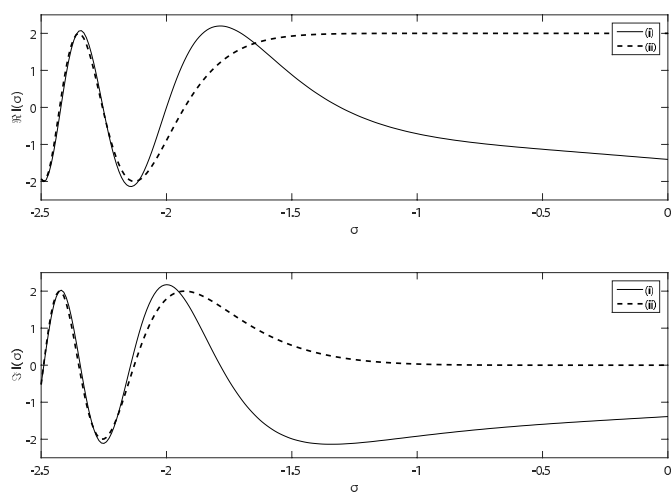


Рис. 6. Поле $|W_0^{(N)}(\nu, \sigma)|$.

Рис. 7. Поле $|W_1^{(N)}(\nu, \sigma)|$.Рис. 8. Сравнение тока $I^{(N)}$ (i), вычисленного по значениям $W_0^{(N)}$ на сетке, с током $I_{\text{луч}}^{(N)}$ (ii).

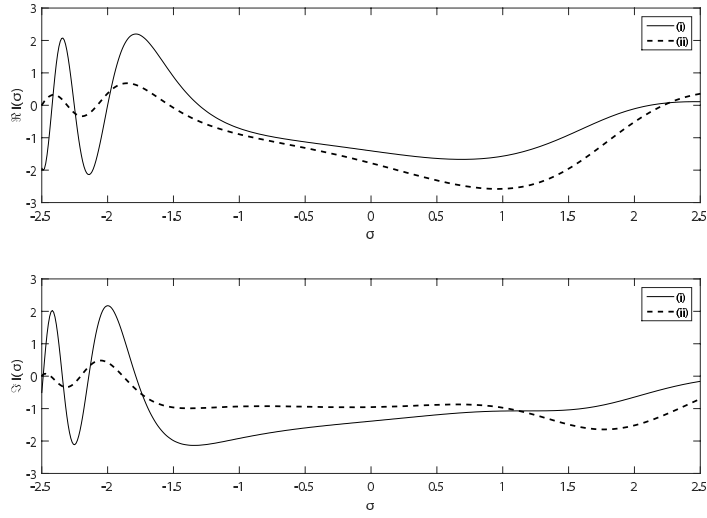


Рис. 9. Сравнение тока (i), вычисленного по значениям $W_0^{(N)}$, с током (ii), вычисленным по значениям $W_1^{(N)}$

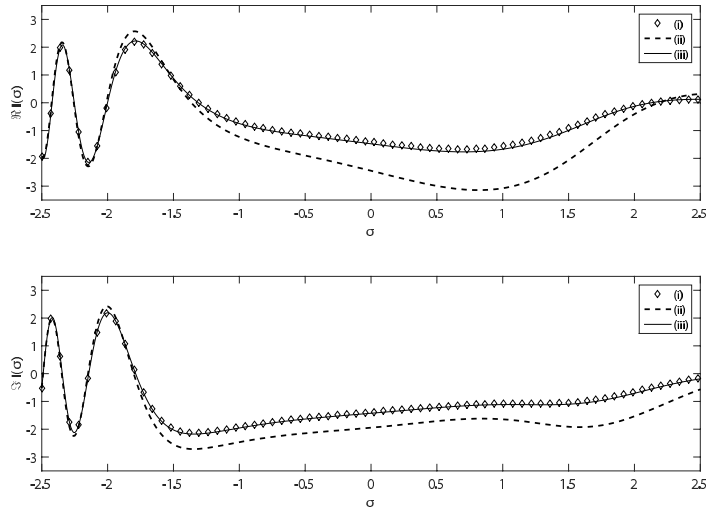


Рис. 10. Сравнение тока $I^{(N)}$ (i), вычисленного только по $W_0^{(N)}$, с полным током в случае наибольшего (ii) и наименьшего (iii) вклада от поправочного члена.

тела вращения при краевом условии Дирихле в практических приложениях можно пренебречь, так как величина этой поправки крайне незначительна.

Обратимся далее к краевому условию Неймана. Полученные результаты, представлены на Рис. 6 – Рис. 10 в той же последовательности, что и результаты, соответствующие случаю условия Дирихле.

Сравнивая картину волновых полей $W_0^{(N)}$ и $W_1^{(N)}$, изображенных на Рис. 6 и Рис. 7, с аналогичными изображениями для $W_0^{(D)}$ и $W_1^{(D)}$, можно увидеть главное отличие, возникающее в случае краевого условия Неймана: волновое поле глубже проникает в затененную часть погранслоя, чем в случае условия Дирихле, и на предельном луче это поле заметно отличается от нуля.

Из Рис. 8 следует, что лучевая формула для тока, в случае краевого условия Неймана, дает неверный результат в погранслое. Наконец, Рис. 9 и Рис. 10 показывают, что поправка на вытянутость тела теперь начинает оказывать хотя и небольшое, но тем не менее вполне заметное влияние на ток на границе, и ее вкладом в полный ток уже нельзя пренебрегать в тех приложениях, где требуются вычисления с большой точностью.

§6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используемый нами подход к исследованию дифракции на вытянутых телах вращения (осесимметрический случай) базируется на принципах локальности коротковолновой асимптотики, предложенной академиком В.А. Фоком в конце сороковых годов прошлого века. Поздее этот подход был существенно развит в работах Ленинградской математической школы по дифракции и распространению волн, где он получил и математическое оправдание. Заметим, что в большинстве работ того времени исследовались в основном двумерные задачи.

Результаты наших работ [2–4, 8, 9] показывают, что этот подход является эффективным и в задачах дифракции на трехмерных вытянутых телах, по крайней мере в осесимметричных задачах. При этом оказывается, что влияние вытянутости рассеивателя всегда проявляется только в поправочных, а не в главных членах асимптотики. В случае же краевого условия Дирихле, это влияние вообще пренебрежимо мало с точки зрения приложений к конкретным задачам.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции*. Изд-во ЛГУ, Л. (1974).
2. Н. Я. Кирпичникова, М. М. Попов, *Метод параболического уравнения Леонтовича-Фока в задаче дифракции на вытянутых телах*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **409** (2012), 55–79.
3. Н. Я. Кирпичникова, М. М. Попов, *Сращивание асимптотик в освещенной части области Фока*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **426** (2014), 49–63.
4. N. Ya. Kirpichnikova, M. M. Popov, *Diffraction by strongly elongated bodies and matching of the asymptotics in illuminated part of the light-shadow boundary*. — in: Proceedings of the International Conference “Days of Diffraction 2014” (2014), pp. 124–127.
5. М. М. Попов, *К задаче о волнах шепчущей галереи в окрестности простого нуля эффективной кривизны границы*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **62** (1976), 197–206.
6. М. М. Попов, И. Пшенчик, *Численное решение задачи о волнах шепчущей галереи в окрестности простого нуля эффективной кривизны границы*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **62** (1976), 207–219.
7. М. М. Попов, *Корректность задачи о волнах шепчущей галереи в окрестности точек распрямления границы*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **89** (1979), 261–269.
8. М. М. Попов, Н. Я. Кирпичникова, *О проблемах применения параболического уравнения к дифракции на вытянутых телах*. — Акустический журнал **60**, No. 4 (2014), 365–372.
9. Н. Я. Кирпичникова, М. М. Попов, Н. М. Семченко, *О коротковолновой дифракции на вытянутом теле. Численные эксперименты*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **451** (2016), 65–78.
10. R. D. Skeel, M. Berzins, *Method for the Spatial Discretization of Parabolic Equations in One Space Variable*. — SIAM J. Sci. Statist. Comp. **11** (1990), 1–32.
11. В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн*, Изд-во Советское радио, Москва (1970).

Popov M. M., Semtchenok N. M., Kirpichnikova N. Ya. On short-wave diffraction by strongly prolate body of revolution.

In the paper a short-wave diffraction problem by strongly elongated body of revolution (axisymmetric case) is considered. In that case the classical method of Leontovich-Fock parabolic equation (actually Schrödinger type equation) turns out to be inapplicable due to corresponding recurrent system of equations loses asymptotic character and, moreover, each equation gets singularity in coefficients, including the main parabolic equation. In the work, we introduce a new boundary layer defined by the new scaling of the internal coordinates of the layer differs from the Fock case. Unfortunately, the variables cannot be separated in the main parabolic equation

and therefore it is hardly possible to construct the solution of the problem in closed analytic form. Instead, we formulated a non-stationary scattering problem for the Schrödinger type equation, where role of the time plays the arc length along the meridians, and solved it by numerical methods.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
наб. р. Фонтанки д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: mpopov@pdmi.ras.ru

Поступило 14 октября 2016 г.