Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 451, 2016 г.

С. Б. Левин

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ТРЕХ ТРЕХМЕРНЫХ ОДНОИМЕННО ЗАРЯЖЕННЫХ КВАНТОВЫХ ЧАСТИЦ

§1. Введение

Мы будем иметь здесь дело с решениями уравнения Шредингера

$$-\triangle\chi + V(\mathbf{z})\chi = E\chi, \quad E > 0, \quad \chi = \chi(\mathbf{z}) \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^d, \tag{1}$$

$\triangle$ – оператор Лапласа на $\mathbb{R}^d$, $V = V(\mathbf{z})$ – заданный вещественный коэффициент, потенциал уравнения Шредингера. Прежде чем переходить к конкретному уравнению, описывающему собственно многочастичную квантовую систему, сделаем несколько замечаний общего характера.

Начнем со случая быстро убывающего в бесконечности (или даже финитного) потенциала $V(\mathbf{z})$. В этом случае уравнение (1) имеет полную систему собственных функций непрерывного спектра, $E > 0$, допускающих представление вида

$$\chi(\mathbf{z},\mathbf{q}) \sim \chi_0(\mathbf{z},\mathbf{q}) + K(\mathbf{z},\mathbf{q}), \quad \chi_0(\mathbf{z},\mathbf{q}) = e^{i\langle \mathbf{q},\mathbf{z}\rangle}, \tag{2}$$

где $\langle \mathbf{q},\mathbf{z}\rangle$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$, а $K(\mathbf{z},\mathbf{q})$ допускает при $z \to \infty$ асимптотическое разложение вида

$$K(\mathbf{z},\mathbf{q}) = e^{izq}\frac{1}{z^{\frac{d-1}{2}}}\left(f_0(\widehat{\mathbf{z}},\mathbf{q}) + \frac{1}{z}f_1(\widehat{\mathbf{z}},\mathbf{q}) + \dots\right), \quad \widehat{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{z}}{z}. \tag{3}$$

Здесь f_0 (так называемая амплитуда рассеяния), $f_1, \dots$ – гладкие функции своих аргументов.

Ключевые слова: квантовая задача рассеяния трех тел, асимптотики собственных функций, кулоновские парные потенциалы.

Работа выполнена при поддержке гранта СПбГУ 11.38.263.2014, РФФИ 14-01-0076015 А.

Для доказательства используется интегральное уравнение (уравнение Липпмана–Швингера)

$$\chi(\mathbf{z},\mathbf{q}) = \chi_0(\mathbf{z},\mathbf{q}) - \int\limits_{\mathbb{R}^d} R_0(\mathbf{z},\mathbf{z}',q^2)V(\mathbf{z}')\chi(\mathbf{z}',\mathbf{q})d\mathbf{z}', \tag{4}$$

в котором

$$R_0(\mathbf{z},\mathbf{z}',q^2)=R_0(\mathbf{z}-\mathbf{z}',q^2), \quad R_0(\mathbf{z},q^2)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\frac{\chi_0(\mathbf{z},\mathbf{k})}{k^2-(q^2+i0)}d\mathbf{k}. \tag{5}$$

Последний интеграл является функцией от z и q и с точностью до элементарных степенных множителей может быть выражен в терминах функции Ханкеля от zq.

Исторически именно с помощью уравнения Липпмана–Швингера был впервые проведен 1)полный спектральный анализ оператора H:

$$H\chi = -\triangle\chi + V\chi, \tag{6}$$

2)получена асимптотическая формула (2), 3)доказана соответствующая спектральная теорема (теорема разложения по собственным функциям:

$$f(\mathbf{z}) = P_d f(\mathbf{z}) + \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\chi(\mathbf{z},\mathbf{q})d\mathbf{q}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\overline{\chi(\mathbf{z}',\mathbf{q})}f(\mathbf{z}')d\mathbf{z}', \tag{7}$$

где P_d – конечномерный ортогональный проектор на подпространство точечного спектра оператора H, и 4) изучено асимтотическое поведение при $t\to\pm\infty$ решений нестационарного уравнения Шредингера

$$i\chi_t = H\chi, \quad \chi|_{t=0}=\chi_0, \quad \chi_0=\chi_0(\mathbf{z}). \tag{8}$$

Позднее стало ясно, см. например [2], что спектральный анализ оператора H и асимптотическое поведение решений нестационарного уравнения при $t\to\pm\infty$ могут быть получены средствами нестационарной теории рассеяния. Однако, если мы заинтересованы в изучении каких-либо асимтотических характеристик собственных функций или, тем более, в получении численных оценок процесса рассеяния, без обращения к стационарной трактовке задачи и, тем самым, к уравнению (4) не обойтись.

История повторилась при переходе от задачи с быстро убывающим на бесконечности потенциалом к многочастичной квантовой модели, в которой потенциал $V(\mathbf{z})$ не убывает на бесконечности в определенных направлениях. В частности, если $d = d_0 n$, где d_0 – число степеней свободы, размерность частицы, а n – число частиц, то соответствующий гамильтониан дается выражением

$$H = -\triangle + V(\mathbf{z}), \tag{9}$$

где $\mathbf{z} \in \Gamma = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_n = 0, \mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^{d_0}, i = 1, \dots, n\}$, $\triangle$ – оператор Лапласа на подпространстве Γ и, наконец,

$$V(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j;\ i,j=1}^{n} v(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j). \tag{10}$$

В этой записи мы предполагаем, что все частицы имеют одинаковые массы, взаимодействуют только попарно и все пары взаимодействуют через один и тот же парный потенциал $v(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d_0}$.

Первоначальный подход к таким многочастичным гамильтонианам был развит Л. Д. Фаддеевым [3] для случая $d_0 = 3, n = 3$. С точки зрения изложенных выше построений этот подход состоял в том, что была предложена оригинальная комбинаторная конструкция в терминах решений двухчастичных задач для построения такой (вектор)-функции χ_0, что асимптотически при $z \to \infty$, собственные функции χ непрерывного спектра оператора H могли быть описаны формулой типа (2), хотя и с умеренно гладкой функцией f_0. Далее, та же комбинаторная конструкция привела к уравнениям типа (4) с другими, конечно, выражениями для R_0 и V. Все эти изменения отражали усложнение структуры функции χ, в особенности, усложнение ее асимптотических свойств при $z \to \infty$.

Мы развиваем здесь ту же линию с некоторой модификацией. Модификация состоит в том, что мы действуем вне рамок упомянутой комбинаторной конструкции, а просто предлагаем явное (в терминах решений двухчастичных задач) выражение для χ_0. Мы исходим при этом из геометро-дифракционных аналогий. Определенный шаг в этом направлении был сделан уже довольно давно, см. [1, 4, 5], для случая $d = 1$ и короткодействующих (финитных) отталкивательных парных потенциалов. Однако, в указанных работах явное выражение для функции $\chi_0(\mathbf{z}, \mathbf{q})$ было построено лишь для векторов $\mathbf{z}, \mathbf{q}$, лежащих вне угловых окрестностей подпространств $l_{ij} = \{\mathbf{z} \in \Gamma : \mathbf{z}_i = \mathbf{z}_j, i, j = 1, \dots, n\}$. Это ограничение было снято в работе [7]. В работе [9] было проведено обобщение предложенного метода для случая

$d = 1$ и медленно (кулоновским образом) убывающих отталкивательных парных потенциалов. Наконец, в работе [10] были кратко сформулированы результаты обобщения метода для случая $d = 3$ и медленно (кулоновским образом) убывающих отталкивательных парных потенциалов. В данной работе мы постараемся более подробно проследить за выводом результатов, полученных в [10]. Мы надеемся также, что построенные здесь и эвристически мотивированные асимтотические выражения для собственных функций χ могут быть строго обоснованы в рамках этих же построений.

Перейдем теперь к специфике описания собственно систем заряженных частиц. Отметим, что многие принципиальные вопросы теории рассеяния, рассматриваемые в терминах собственных функций (СФ), для систем трех и большего числа частиц, взаимодействущих посредством парных кулоновских потенциалов, до сих пор остаются неисследованными. Возвращаясь к истории вопроса, заметим, что после того как задача рассеяния трех квантовых частиц была решена для случая короткодействующих парных потенциалов в 1961 году [3], были предприняты серьезные усилия распространить результаты на случай кулоновских парных потенциалов. Именно этот случай наиболее интересен для очень широкого класса физических задач: в ядерной, атомной и молекулярной физике, в астрофизике, в химической физике и т.д. Построение равномерной по всем угловым переменным на бесконечности в конфигурационном пространстве асимптотики СФ оператора Шредингера в существенном разрешило бы задачу. Отметим работы [6, 13–15], в которых был достигнут существенный прогресс в описании асимптотики СФ непрерывного спектра оператора Шредингера, однако области конфигурационного пространства, отвечающие конфигурациям сближения частиц в паре и удаленной третьей частицы, не были описаны исчерпывающе строго. Описание асимптотики СФ непрерывного спектра в этих областях было дано позднее в работах [16, 17]. Тем не менее, и в этих работах отсутствовало описание асимптотики в окрестности парных и трехчастичного направлений рассеяния вперед (отметим, что именно эти области ответственны за описание сингулярного поведения матрицы рассеяния). Тем самым, отсутствовало равномерное по всем угловым переменным на бесконечности в конфигурационном пространстве описание асимптотики

СФ непрерывного спектра оператора Шредингера. В старшем порядке эта асимптотика была описана в короткой работе [10]. В данной работе мы постараемся подробно описать полученные результаты.

Имеются два основных используемых на практике (для компьютерного расчета) подхода к квантовым задачам рассеяния нескольких заряженных частиц. Первый состоит в регуляризации кулоновского потенциала путем замены его потенциалом Юкавы. Оценки такой регуляризации тем не менее вызывают много вопросов.

Второй подход состоит в применении так называемого ВВК-приближения к СФ непрерывного спектра, см. [6]. Мы подробнее опишем его позже. Говоря кратко, ВВК-приближение дается явной формулой, которая имеет достаточно быстро убывающую на бесконечности в конфигурационном пространстве невязку уравнения Шредингера. Проблема состоит в том, что на бесконечности в окрестностях некоторых специальных многомерных направлений, которые мы назовем экранами (в этих областях конфигурационного пространства частицы сближаются попарно) невязка теряет удовлетворительное убывание. Наш результат состоит в модификации ВВК-приближения на экранах, после которой модифицированная формула дает удовлетворительное описание асимптотики СФ на всех направлениях на бесконечности. Таким образом, можно сказать, что нам впервые удалось найти асимптотическое поведение СФ. Чтобы оценить смысл этого результата, отметим, что при рассмотрении СФ даже для быстро убывающих потенциалов мы всегда начинаем построения с выписывания асимптотики этих СФ или, что почти эквивалентно, с выписывания соответствующих интегральных уравнений.

§2. Слабые асимптотики

Мы рассматриваем систему трех трехмерных частиц одинаковой массы, взаимодействующих посредством одинаковых парных кулоновских потенциалов. Предположение об одинаковости масс и потенциалов введено лишь для упрощения изложения. Эти ограничения легко снимаются. Вполне очевидно, что система имеет бесконечно-кратно вырожденный абсолютно непрерывный спектр, заполняющий полуось $[0, \infty)$. Традиционный способ идентификации СФ связан с описанием их возможного поведения на бесконечности в конфигурационном пространстве системы. Для быстро убывающих парных потенциалов такая идентификация СФ состоит, например, в выделении из их асимптотики в качестве старшего члена плоской волны с заданным волновым вектором $\mathbf{q}$. Для кулоновских потенциалов плоская волна не может быть старшим членом асимптотики СФ в стандартном смысле.

Даже в случае одной частицы, рассеивающейся на кулоновском потенциале v, $v(\mathbf{z}) = \frac{\alpha}{z}$, $\alpha > 0$, такое простое выделение элементарного старшего члена в асимптотическом поведении решения невозможно. Наиболее простое описание может быть дано в терминах так называемой слабой асимптотики [12]. Она представляется формулой [15]:

$$\begin{gathered} \psi_c(\mathbf{z}, \mathbf{q}) \sim \frac{2\pi i}{qz} \left(\delta(\widehat{\mathbf{z}}, -\widehat{\mathbf{q}}) e^{-iqz + i\eta \ln z} - s_c(\widehat{\mathbf{z}}, \mathbf{q}) e^{iqz - i\eta \ln z} \right), \\ \eta = \frac{\alpha}{2q}, \quad z \to \infty, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{R^3}, \quad \widehat{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}}. \end{gathered} \tag{11}$$

Здесь коэффициент s_c, фактически, матрица рассеяния, в процессе постановки остается неопределенным и находится лишь в ходе полного решения задачи. Главной особенностью этого асимптотического описания является то, что мы рассматриваем его в смысле обобщенных функций относительно $\widehat{\mathbf{z}}$. Несмотря на ослабленный характер условия оно благополучно выделяет единственное решение, стандартную СФ.

Чтобы читателю было легче сопоставить эту формулу с классическим асимптотическим описанием собственных функций, отметим, что в слабом смысле

$$e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{q} \rangle} \sim \frac{2\pi i}{qz} \left(\delta(\widehat{\mathbf{z}}, -\widehat{\mathbf{q}}) e^{-iqz} - \delta(\widehat{\mathbf{z}}, \widehat{\mathbf{q}}) e^{iqz} \right). \tag{12}$$

Для того, чтобы явно продемонстрировать справедливость формулы (12) и определить, в каком смысле можно рассматривать асимптотику при $z \to \infty$ СФ непрерывного спектра оператора Шредингера в виде распределения, т.е. ядра некоторой обобщенной функции, проинтегрируем плоскую волну с пробной функцией $\varphi \in C^\infty(\mathbf{S}^2)$ по единичной сфере. Интегрируя по частям по переменной $t = \langle \widehat{\mathbf{z}}, \widehat{\mathbf{q}} \rangle$ при условии $z \to \infty$, нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{\mathbf{S}^2} d\widehat{\mathbf{z}} e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{q} \rangle} \varphi(\widehat{\mathbf{z}}) = \frac{2\pi i}{qz} e^{-izq} \varphi(-\widehat{\mathbf{q}}) - \frac{2\pi i}{qz} e^{izq} \varphi(\widehat{\mathbf{k}}) + O(1/z^2).$$

Это вычисление немедленно ведет нас к уравнению (12).

Кратко проиллюстрируем описанные выше конструкции. Рассмотрим квантовую задачу рассеяния (в стационарном подходе) плоской волны на некотором гладком быстро (быстрее размерности) убывающем неотрицательном потенциале в трехмерном пространстве с обыкновенными условиями излучения на бесконечности. Асимптотика СФ непрерывного спектра оператора Шредингера в этом случае имеет вид

$$\psi(\mathbf{z},\mathbf{q}) \sim e^{i\langle \mathbf{z},\mathbf{q}\rangle} + f(\widehat{\mathbf{z}},\mathbf{q})\frac{e^{iqz}}{z}, \tag{13}$$

где $f(\widehat{\mathbf{z}},\mathbf{q})$ – амплитуда рассеяния, которая в данном случае является скалярной гладкой функцией угловой переменной $\widehat{\mathbf{z}}$. Подставляя (12) в уравнение (13), найдем

$$\psi(\mathbf{z},\mathbf{q}) \sim \frac{2\pi i}{qz}\left(\delta(\widehat{\mathbf{z}},-\widehat{\mathbf{q}})e^{-iqz} - s_0(\widehat{\mathbf{z}},\mathbf{q})e^{iqz}\right). \tag{14}$$

Здесь матрица рассеяния s_0 связана с амплитудой рассеяния соотношением

$$s_0(\widehat{\mathbf{z}},\mathbf{q}) = \delta(\widehat{\mathbf{z}},\widehat{\mathbf{q}}) - \frac{q}{2\pi i}f(\widehat{\mathbf{z}},\mathbf{q}). \tag{15}$$

Сингулярность явно выделена в первом слагаемом и представлена простой обобщенной функцией $\delta(\widehat{\mathbf{r}},\widehat{\mathbf{q}})$. Отметим, наконец, что в случае медленно убывающего (кулоновского) потенциала коэффициент s_c в слабой асимптотике СФ непрерывного спектра (11) (двухчастичная матрица рассеяния) уже не допускает столь простого представления, как s_0 в (14)–(15). Хотя и в этом случае задача рассеяния одной частицы на потенциале допускает явное решение (пусть и в терминах специальных функций), структура возникающей при описании s_c обобщенной функции оказывается значительно более сложной. Явное выражение см., например, в [15]:

$$s_c(\widehat{\mathbf{z}},\mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi}\frac{\Gamma(1+i\eta)}{|\widehat{\mathbf{z}}-\widehat{\mathbf{q}}|^{2+2i\eta}}2^{1+i\eta}e^{\frac{\pi\eta}{2}}, \quad \eta = \frac{\alpha}{2q}. \tag{16}$$

В частности эта обобщенная функция уже не допускает разбиения на сингулярную и регулярную часть, как это происходило в (15) для случая короткодействия.

Обратимся теперь к системе трех одноименно заряженных частиц. Фиксируем движение центра инерции и будем описывать внутренние движения в системе в терминах переменной $\mathbf{z}$. Тогда асимптотика СФ $\Psi(\mathbf{z},\mathbf{q})$ (по-прежнему $\mathbf{q}$ – волновой вектор), которую можно считать слабым вариантом плоской волны для случая кулоновских парных потенциалов, характеризуется формулой

$$\Psi(\mathbf{z},\mathbf{q}) \sim \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi i}{qz}\right)^{5/2}\delta(\widehat{\mathbf{q}},-\widehat{\mathbf{z}})e^{-iqz+\sum\limits_{j=1}^{3}\eta_j\ln z}$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi i}{qz}\right)^{5/2}S_c(\widehat{\mathbf{z}},\mathbf{q})e^{iqz-\sum\limits_{j=1}^{3}\eta_j\ln z}.$$

Система обозначений для векторов воспроизводит здесь обозначения, использованные в формуле (11), с той разницей, что $\mathbf{z}\in\mathbf{R^6}$ Здесь вновь S_c – неопределенная при постановке задачи функция, которая в конечном счете снова должна оказаться матрицей рассеяния.

Мы определенно верим, что такая характеризация СФ, как и в случае быстро убывающих потенциалов, определяет эти функции единственным образом.

Основной результат работы состоит в том, что отправляясь от простой асимптотической характеризациии СФ в слабом смысле, мы получаем их асимптотическую характеризацию в традиционном, равномерном, поточечном смысле.

Можно спросить, какую пользу можно извлечь из этого результата. Возможность использовать явную слабую асимптотику для описания решения позволяет, в принципе, формально определить решение. С другой стороны, в работах [7, 8] показано, как можно использовать равномерные асимптотические формулы для численного описания СФ. Это должно быть заведомо более надежно, чем, например, применение Юкавовской регуляризации. Кроме того, полученный результат вселяет достаточно убедительную надежду на то, что его можно развить и получить традиционное строгое обоснование того, что существует и единственно решение с полученным здесь асимптотическим поведением. В этой работе мы ограничиваемся, однако, эвристическим построением равномерных асимптотических формул для СФ.

§3. Описание модели

Дадим более точное описание модели. Первоначальное конфигурационное пространство системы есть $\mathbf{R}^9$. Остановив движение центра инерции, приходим к системе на конфигурационном пространстве

$$\Gamma=\{\mathbf{z}:\,\mathbf{z}\in\mathbf{R}^9,\,\mathbf{z}=\{\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2,\mathbf{z}_3\},\ \mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2+\mathbf{z}_3=0\}.$$

На Γ имеется скалярное произведение $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}' \rangle$, индуцированное скалярным произведением на $\mathbf{R}^9$. Система на Γ описывается уравнением

$$\begin{aligned} &H\Psi = \lambda\Psi, \quad \Psi = \Psi(\mathbf{z}) \in \mathbf{C}, \quad \mathbf{z} \in \Gamma, \quad H = -\Delta_{\mathbf{z}} + V(\mathbf{z}), \\ &V(\mathbf{z}) = v(\mathbf{x}_1) + v(\mathbf{x}_2) + v(\mathbf{x}_3), \quad \mathbf{x}_j \in \mathbf{R}^3. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь $\Delta_{\mathbf{z}}$ – оператор Лапласа на Γ,

$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_2), \quad \mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_3), \quad \mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1).$$

Ясно, что $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 = 0$. Введем также $\mathbf{y}_j = \sqrt{\frac{3}{2}}\mathbf{z}_j$. Нетрудно убедиться, что на Γ справедливо уравнение $\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_3 = 0$, а также

$$\mathbf{z}^2 = \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j \rangle + \langle \mathbf{y}_j, \mathbf{y}_j \rangle, \quad j = 1, 2, 3 \quad , \quad \Delta_{\mathbf{z}} = \Delta_{\mathbf{x}} + \Delta_{\mathbf{y}}.$$

Вместе с $\mathbf{z} \in \Gamma$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$ будем рассматривать двойственные переменные, импульсы $\mathbf{q} \in \Gamma, \mathbf{k}, \mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$. Мы будем считать, что $v(\mathbf{x}) = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha > 0$, хотя возможно обобщение на случай

$$v(\mathbf{x}) = \frac{\alpha}{x} + w(\mathbf{x}), \ xw(\mathbf{x}) \to 0, \ x \to \infty.$$

Нашей целью является построение равномерной по всем угловым переменным на Γ асимптотики при $z \to \infty$ СФ непрерывного спектра Ψ оператора Шредингера H (17).

§4. ВВК-приближение

Плоская волна при асимптотическом (при $z \to \infty$) описании функции $\Psi(\mathbf{z}, \mathbf{q})$ вне малых угловых окрестностей областей $\sigma_j = \{\mathbf{z} \in \Gamma, \ \mathbf{x}_j = 0\}$, $j = 1, 2, 3$ (в дальнейшем мы будем называть эти области экранами), должна быть заменена ВВК -приближением $\Psi^{\text{ВВК}}(\mathbf{z}, \mathbf{q})$. Это приближение было исследовано в [6], см. также [15], хотя использовалось и ранее, наример, в [18,19]. Оно имеет вид:

$$\Psi^{\text{ВВК}}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) \sim N_0 e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{q} \rangle} D(\mathbf{x}_1, \mathbf{k}_1) D(\mathbf{x}_2, \mathbf{k}_2) D(\mathbf{x}_3, \mathbf{k}_3). \tag{18}$$

Здесь

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \Phi(-i\eta, 1, ixk - i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle), \ \mathbf{x}, \mathbf{k} \in \mathbf{R}^3, \quad \eta = \frac{\alpha}{2k}, \tag{19}$$

Φ – вырожденная гипергеометрическая функция, см. [11]. Постоянная $N_0 = \prod\limits_{j=1}^{3} N_c^{(j)}$ является произведением нормировочных постоянных трех двухчастичных состояний рассеяния

$$N_c^{(j)} = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\pi\eta_j}{2}} \Gamma(1 + i\eta_j).$$

Переменные $\mathbf{k}_j$, $\mathbf{p}_j$; $j = 1, 2, 3$ являются соответственно сопряженными по Фурье якобиевым переменным $\mathbf{x}_j$, $\mathbf{y}_j$.

Стоит отметить, что функция

$$\psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = N_c e^{i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k}\rangle} D(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \tag{20}$$

удовлетворяет уравнению

$$-\Delta_{\mathbf{x}} \psi_c + \frac{\alpha}{x} \psi_c = k^2 \psi_c, \quad \alpha > 0. \tag{21}$$

Решение ψ_c является точным решением задачи рассеяния квантовой частицы на кулоновском потенциале. В дальнейшем для удобства мы будем пользоваться еще одним кратким обозначением

$$\Phi_i \equiv \Phi(-i\eta_i, 1, ix_i k_i - i\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{k}_i\rangle), \quad i = 1, 2, 3. \tag{22}$$

Невязка ВВК-приближения

$$Q[\Psi^{\mathrm{BBK}}] \equiv (H - E)\Psi^{\mathrm{BBK}}$$

вычисляется без труда:

$$e^{-i\langle \mathbf{q}, \mathbf{z}\rangle} Q[\Psi^{\mathrm{BBK}}] = -\sum_{\{n,m,l\}} k_n k_m \langle \widehat{\mathbf{k}}_n - \widehat{\mathbf{x}}_n, \widehat{\mathbf{k}}_m - \widehat{\mathbf{x}}_m\rangle \Phi_l \Phi_n^{'} \Phi_m^{'}. \tag{23}$$

Здесь суммирование происходит по трем правильным перестановкам чисел $\{1, 2, 3\}$, а значок $'$ обозначает производную по последнему аргументу функции Φ. Напомним, как устроен последний аргумент функции Φ_i (19):

$$ix_i k_i - i\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{k}_i\rangle = 2ix_i k_i \sin^2(\theta_i/2), \ \theta_i = \arccos\langle \widehat{\mathbf{x}}_i, \widehat{\mathbf{k}}_i\rangle. \tag{24}$$

Заметим также, что согласно [21]:

$$\Phi'(-i\eta, 1, iv) \underset{|v|\to\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{|v|}\right), \quad \Phi''(-i\eta, 1, iv) \underset{|v|\to\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{|v|^2}\right), \quad v \in \mathbb{R}. \tag{25}$$

Рассмотрим вначале ситуацию специального вида (однако, статистически наиболее вероятную):

$$\theta_i \geqslant \varepsilon_i > 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{26}$$

Мы воспользовались здесь обозначением θ_i, введенным ранее в уравнении (24). В этом случае, как видно из (23), каждое из трех слагаемых в выражении для невязки $Q[\Psi^{\text{ВВК}}]$, содержащее выражение $\Phi_i'\Phi_j'$, $i < j = 1,2,3$, убывает на бесконечности по крайней мере не медленнее, чем $\frac{1}{x_i x_j}$. Таким образом, невязка в выражении (23) убывает заведомо быстрее потенциала в асимптотической области

$$\Omega_0 : \{x_i \sim y_i \to \infty, \;\; i = 1,2,3\}. \tag{27}$$

Введем в рассмотрение дополнительные асимптотические области конфигурационного пространства

$$\Omega_i : \{y_i^{\mu_i} < x_i < y_i, \quad \frac{1}{2} < \mu_i < 1\}, \quad y_i \to \infty, \quad i = 1,2,3. \tag{28}$$

Из вышесказанного следует, что и в этих областях невязка убывает заведомо быстрее потенциала. Заметим, что хотя ВВК-приближение непрерывно вплоть до экранов, его невязка на экранах убывает не быстрее кулоновского потенциала. Поэтому ВВК-приближение не работает в окрестностях экранов, т.е. в асимптотических при $z \to \infty$ областях, в которых любая из координат $\mathbf{x}_j$, $j = 1,2,3$ становится ограниченной по модулю.

Нашей задачей будет построение приближенния $\widetilde{\Psi}^{\text{ВВК}}$, которое на каждой асимптотической области Ω_i, $i = 1,2,3$ гладко “сшивалось” бы с функцией $\Psi^{\text{ВВК}}$ и продолжалось бы вплоть до экрана $x_i = 0$ при сохранении условия быстрого убывания невязки. Иными словами, мы собираемся продолжить функцию $\Psi^{\text{ВВК}}$ на более широкие области

$$\widetilde{\Omega}_i : \{0 \leqslant x_i < y_i\}, \quad y_i \to \infty, \quad i = 1,2,3. \tag{29}$$

при сохранении условия убывания невязки быстрее кулоновского потенциала.

Далее, мы обсудим также поведение невязки в окрестностях направлений рассеяния вперед, т.е. там, где ограничение (26) перестает выполняться.

Мы можем сразу сформулировать следующее

Утверждение 4.1. *Невязка $Q[\Psi^{\text{ВВК}}]$ убывает в асимптотической области Ω_j (28) конфигурационного пространства быстрее чем кулоновский потенциал при условии*

$$\delta_j > \frac{1-\mu_j}{1+\mu_j}, \quad \frac{1}{2} < \mu_j < 1, \tag{30}$$

если условие (26) *заменяется на более слабое условие*

$$x_j k_j (1 - \langle \widehat{\mathbf{x}}_j, \widehat{\mathbf{k}}_j \rangle) = O(x_j^{\delta_j}), \quad j = 1, 2, 3, \quad x_j \to \infty. \tag{31}$$

При этом, как видно из (30), *при значениях* μ_j *достаточно близких к единице, то есть в области* Ω_0, ВВК-*приближение обеспечивает скорость убывания невязки быстрее кулоновского потенциала даже в окрестностях парных направлений рассения вперед. В более широких параболических областях скорость убывания невязки в окрестностях парных направлений рассения вперед портится.*

Доказательство. Отказ от условия (26) ведет к более слабому условию для третьего аргумента вырожденной гипергеометрической функции

$$x_j k_j (1 - \langle \widehat{\mathbf{x}}_j, \widehat{\mathbf{k}}_j \rangle) = O(x_j^{\delta_j}), \quad j = 1, 2, 3, \quad x_j \to \infty, \tag{32}$$

$$y_j^{\mu_j} < x_j \ \forall\ j; \ \ 1/2 < \mu_j < 1. \tag{33}$$

В соответствии со свойствами (25) и с уравнением

$$|\widehat{\mathbf{x}}_j - \widehat{\mathbf{k}}_j| = O\left(x_j^{\frac{\delta_j - 1}{2}} \right),$$

которое является следствием условия (32), получаем следующую асимптотическую оценку

$$|Q[\Psi^{\text{ВВК}}]|_{\Omega_j} = O\left(x_j^{-1/2 - \delta_j/2} y^{-1/2 - \delta_j/2} \right). \tag{34}$$

Мы учитываем здесь, что в асимптотической при $z \to \infty$ области только одна парная координата $\mathbf{x}_j$ может быть выделенно малой, две другие парные координаты оказываются сравнимыми с размерами гиперрадиуса всей трехчастичной системы. Таким образом, параметр y в выражении (34) имеет смысл такого гиперрадиуса

$$y \sim \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Учитывая условие (33) получаем условие для убывания невязки быстрее кулоновского потенциала:

$$\frac{1}{2} + \frac{\delta_j}{2} + \frac{\mu_j}{2} + \frac{\delta_j \mu_j}{2} > 1.$$

Отсюда следует соотношение

$$\delta_j > \frac{1 - \mu_j}{1 + \mu_j}.$$

Заметим, что полученная оценка легко распространяется и на область Ω_0. $\square$

§5. Асимптотическое почти разделение переменных

Заметим теперь, что в асимптотической "параболической" окрестности каждого экрана уравнение Шредингера допускает серьезное упрощение, после которого становится возможным разделение переменных. Например, полный потенциал

$$V(\mathbf{z}) = v(\mathbf{x}_1) + v(\mathbf{x}_2) + v(\mathbf{x}_3), \quad v(\mathbf{x}_i) = \frac{\alpha}{x_i}, \quad \alpha > 0, \quad i = 1, 2, 3$$

в асимптотической окрестности экрана σ_1 упрощается за счет формул

$$\mathbf{x}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{y} - \frac{1}{2}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{y} - \frac{1}{2}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_1, \ \mathbf{y} = \mathbf{y}_1.$$

В окрестности σ_1 при $y >> 1, \ y >> x$ справедливо

$$V = V_{\text{sep}} + O\left(\frac{x}{y^2}\right), \quad V_{\text{sep}} = v(x) + v^{\text{eff}}(y), \quad v^{\text{eff}} = \frac{4\alpha/\sqrt{3}}{y}. \tag{35}$$

Тем самым, первое слагаемое в выражении (35) хорошо описывают потенциал V до тех пор, пока поправка $O\left(\frac{x}{y^2}\right)$ убывает быстрее кулоновского потенциала. Таким образом, нас интересует область

$$\Omega_1^+ : \{x \leqslant y^\nu, \quad 0 < \nu < 1\}. \tag{36}$$

Очевидно, аналогичные утверждения о почти разделении переменных справедливы во всех асимптотических областях

$$\Omega_j^+ : \{x_j \leqslant y_j^\nu, \quad 0 < \nu < 1\} \tag{37}$$

в окрестностях экранов σ_j при $y_j >> 1, \ y_j >> x_j$.

Возвращаясь к области Ω_1^+, отметим, что уравнение (17) с приближенным потенциалом V_{sep} допускает разделение переменных

$$\left[-\Delta_{\mathbf{z}} + v(x) + v^{\text{eff}}(y)\right] \Psi^{\text{sep}} = E\Psi^{\text{sep}}.$$

Поскольку мы заинтересованы в ограниченных решениях, для Ψ^{sep} естественно возникает следующее представление типа спектрального разложения по функциям ψ_c^{eff}

$$\begin{gathered}\Psi^{\text{sep}}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = \int \psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}')\psi_c^{\text{eff}}(\mathbf{y}, \mathbf{p}')\delta({k'}^2 + {p'}^2 - E)R(\mathbf{q}, \mathbf{q}')\, d\mathbf{k}'\, d\mathbf{p}', \\ \mathbf{q} = (\mathbf{k}, \mathbf{p})^t, \quad \mathbf{q}' = (\mathbf{k}', \mathbf{p}')^t, \quad q^2 = E.\end{gathered} \tag{38}$$

Здесь ψ_c – двухчастичная СФ непрерывного спектра задачи рассеяния с потенциалом v, ψ_c^{eff} – двухчастичная СФ непрерывного спектра задачи рассеяния с потенциалом v^{eff} (35). Функция $R(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ играет роль вообще говоря произвольной плотности и будет фиксирована ниже из условия согласования двух представлений решения уравнения Шредингера, заданных в различных областях конфигурационного пространства, в пересечении этих областей. Присутствие δ-функции $\delta(k'^2 + p'^2 - E)$ отражает закон сохранения энергии.

Мы можем сформулировать теперь цель настоящей работы более конкретно. Она состоит в том, чтобы дать явное описание старшего порядка асимптотики Ψ в равномерной топологии относительно угловой переменной $\widehat{\mathbf{z}}$. Именно эта задача решена здесь на эвристическом уровне. Заметим, что имея этот результат, можно изменить постановку задачи (мы предполагаем при этом, что вектор $\mathbf{q}$ лежит вне некоторых малых окрестностей трех экранов) и отыскивать решение, характеризуя его равномерной асимптотикой.

Итак, мы начнем с того, что выберем асимптотические области в конфигурационном пространстве, в которых одновременно справедливо представление (38) для асимптотики СФ непрерывного спектра оператора Шредингера, записанное в терминах разделения переменных и работающее вблизи экрана, скажем, с индексом j, и ВВК-представление (18). Условия (36) и (28) одновременно реализуются в области

$$\Omega^j_{\mu\nu} = \{y_j^{\mu_j} < x_j < y_j^{\nu_j}, \ \ \frac{1}{2} < \mu_j < \nu_j < 1, \quad y_j \to \infty\}. \tag{39}$$

В этой области мы собираемся согласовать два упомянутых выше представления, например, для случая $j = 1$. При этом, как будет показано ниже, фиксируется произвол, возникающий при разделении переменных. Ввиду сложности процедуры согласования при большом количестве степеней свободы (эффективное конфигурационное пространство шестимерно) мы начнем, как уже было упомянуто, с согласования двух представлений в терминах слабых асимптотик, что сразу позволит отделить часть угловых переменных. Тем не менее, это не повлияет в дальнейшем на возможность возврата к равномерным асимптотикам.

§6. Построение слабой асимптотики функции $\Psi^{\text{ВВК}}$ в случае $x_1 \gg 1, \quad x_1 \ll y_1$

ВВК-приближение вблизи, скажем, экрана σ_1, но, однако, в области, где невязка этого приближения убывает все еще быстрее потенциала, естественно распадается в произведение

$$\begin{aligned} \Psi^{\text{ВВК}}(\mathbf{z},\mathbf{q}) &= \psi_c(\mathbf{x}_1,\mathbf{k}_1)\Psi_1(\mathbf{z},\mathbf{q}), \\ \Psi_1(\mathbf{z},\mathbf{q}) &= N_0^{(23)} e^{i\langle \mathbf{y}_1,\mathbf{p}_1\rangle} D(\mathbf{x}_2,\mathbf{k}_2)D(\mathbf{x}_3,\mathbf{k}_3), \\ N_0^{(23)} &= N_c^{(2)}N_c^{(3)}. \end{aligned} \tag{40}$$

Вблизи экрана переменные $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{y}_1$ асимптотически имеют разный порядок, $y_1 \gg x_1$. Вычислим в этих предположениях слабую асимптотику функции $\Psi^{\text{ВВК}}$ при $y_1 \to \infty$.

Как показано в приложении А:

$$\begin{aligned} \Psi^{\text{ВВК}} &\underset{y\to\infty}{\sim} A_0(\mathbf{x},\mathbf{q})\delta(\widehat{\mathbf{y}},\widehat{\mathbf{p}})\frac{2\pi}{iyp}e^{iyp}e^{i(\eta_2+\eta_3)\log y}\Gamma(-i\eta_2)\Gamma(-i\eta_3)e^{-\frac{\pi(\eta_2+\eta_3)}{2}} \\ &\times(1-e^{2\pi\eta_2})(1-e^{2\pi\eta_3})\times\left[\frac{\sqrt{3}}{2}k_2(1+\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_2\rangle)\right]^{i\eta_2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}k_3(1-\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_3\rangle)\right]^{i\eta_3} \\ &\times\left\{1+i\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{x}{y}\left(\eta_2\frac{\langle\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{k}}_2\rangle+\langle\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{p}}\rangle}{1+\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_2\rangle}+\eta_3\frac{\langle\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{k}}_3\rangle-\langle\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{p}}\rangle}{1-\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_3\rangle}\right)\right\} \\ &\times\left(1+O\left(\frac{1}{y^{2-2\delta_0}}\right)\right)-A_0(\mathbf{x},\mathbf{q})\delta(\widehat{\mathbf{y}},-\widehat{\mathbf{p}})\frac{2\pi}{iyp}e^{-iyp}\left\{\widehat{\mathbf{p}}\to-\widehat{\mathbf{p}}\right\}. \end{aligned} \tag{41}$$

Мы использовали здесь обозначение

$$A_0(\mathbf{x},\mathbf{q}) = -\frac{1}{4\pi^2}N_0^{(23)}\psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k}).$$

Нам понадобится также выражение для слабой асимптотики типа сходящейся волны функции Ψ^{BBK}:

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathrm{in}}^{\mathrm{BBK}}(\mathbf{X},\mathbf{P}) &= \psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k})\delta(\widehat{\mathbf{p}},-\widehat{\mathbf{y}})B_0^{\mathrm{in}}(\mathbf{P})\frac{2\pi}{iyp}e^{-iyp+(\eta_2+\eta_3)\log y} \\ &\times\left\{1+i\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{x}{y}\left(\eta_2\frac{\langle\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{k}}_2\rangle-\langle\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{p}}\rangle}{1-\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_2\rangle}+\eta_3\frac{\langle\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{k}}_3\rangle+\langle\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{p}}\rangle}{1+\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_3\rangle}\right)\right\} \\ &\times\left(1+O\left(\frac{1}{y^{2-2\delta_0}}\right)\right).\end{aligned}\tag{42}$$

Мы использовали здесь обозначение

$$\begin{aligned}B_0^{\mathrm{in}}(\mathbf{P}) &= -\frac{1}{4\pi^2}N_0^{(23)}\Gamma(-i\eta_2)\Gamma(-i\eta_3)e^{-\frac{\pi(\eta_2+\eta_3)}{2}}(1-e^{2\pi\eta_2})(1-e^{2\pi\eta_3}) \\ &\times\left[\frac{\sqrt{3}}{2}k_2(1-\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_2\rangle)\right]^{i\eta_2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}k_3(1+\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_3\rangle)\right]^{i\eta_3}.\end{aligned}$$

В дальнейшем нам понадобится также представление выражения (42) в виде

$$\begin{aligned}&\Psi_{\mathrm{in}}^{\mathrm{BBK}}(\mathbf{X},\mathbf{P}) \\ &= \psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k})\delta(\widehat{\mathbf{p}},-\widehat{\mathbf{y}})B_0^{\mathrm{in}}(\mathbf{P})\frac{2\pi}{iyp}e^{-iyp+\omega\log y}\left\{1+i\frac{1}{y}\langle\mathbf{x},\mathbf{L}\rangle\right\} \\ &\times\left(1+O\left(\frac{1}{y^{2-2\delta_0}}\right)\right),\end{aligned}\tag{43}$$

$$\mathbf{L}\equiv\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\eta_2\frac{\widehat{\mathbf{k}}_2-\widehat{\mathbf{p}}}{1-\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_2\rangle}+\eta_3\frac{\widehat{\mathbf{k}}_3+\widehat{\mathbf{p}}}{1+\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_3\rangle}\right),\quad \omega\equiv\eta_2+\eta_3.\tag{44}$$

Проделаем следующий шаг на пути построения непрерывной по всем угловым переменным асимптотики на бесконечности в конфигурационном пространстве. Этим шагом является построение другого представления (которое мы назвали выше Ψ^{sep} (38)) для решения типа искаженной плоской волны. Это решение, записанное в виде спектрального разложения, также будет справедливо в области конфигурационного пространства $\Omega_{\mu\nu}$ (индекс $j=1$ мы опустили), определенной уравнением (39). В этой области два различных представления (Ψ^{BBK} и Ψ^{sep}) для решения типа искаженной плоской волны будут согласованы в смысле обыкновенных поточечных асимптотик. Тем самым мы распространим известное ранее в области Ω_0 (27) решение вида Ψ^{BBK}

на дополнительные области $\widetilde{\Omega}_j$, $j = 1, 2, 3$, определенные уравнением (29).

§7. Построение слабой асимптотики при $y \to \infty$ решения в окрестности экрана и согласование двух представлений

Вернемся к представлению решения в окрестности экрана, записанному в терминах разделения переменных (38). Для того чтобы установить явный вид плотности $R(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$, нужно согласовать слабую асимптотику по переменной $\mathbf{y}$ выражения $\Psi^{\rm sep}$ (38) в области $\Omega_{\mu\nu}$ (39) (индекс $j = 1$ мы опустили) со слабой асимптотикой по переменной $\mathbf{y}$ функции $\Psi^{\rm BBK}$. Будем согласовывать отдельно сходящиеся и отдельно расходящиеся волны слабых асимптотик по переменной $\mathbf{y}$ функций $\Psi^{\rm BBK}$ и $\Psi^{\rm sep}$. Отметим сразу, что ядро $R(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$ в выражении (38) состоит из двух слагаемых, каждое из которых действует как проектор на подпространство, отвечающее либо сходящейся волне функции $\psi_c^{\rm eff}(\mathbf{y}, \mathbf{p}')$ либо ее расходящейся волне.

Нам, естественно, понадобится асимптотическое поведение $\Psi^{\rm sep}$ при $y \to \infty$. Подставим в интеграл $\Psi^{\rm sep}$ (38) слабую асимптотику функции $\psi_c^{\rm eff}$ вида (11):

$$
\begin{aligned}
\Psi^{\rm sep} \sim & \int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{k}' \int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{p}' \psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}') \\
& \times \frac{2\pi i}{p' y} \left(\delta(\widehat{\mathbf{y}}, -\widehat{\mathbf{p}}') e^{-ip'y + i\eta'_{\rm eff} \ln y} - s_c^{\rm eff}(\widehat{\mathbf{y}}, \mathbf{p}') e^{ip'y - i\eta'_{\rm eff} \ln y} \right) \\
& \times \delta({k'}^2 + {p'}^2 - E) R(\mathbf{q}, \mathbf{q}').
\end{aligned} \tag{45}
$$

Здесь $s_c^{\rm eff}$ – кулоновская матрица рассеяния, соответствующая потенциалу $v^{\rm eff}$, то есть параметру $\eta_{\rm eff}$.

Дальнейшее асимптотическое упрощение интеграла $\Psi^{\rm sep}$ при $y \to \infty$ требует информации о структуре коэффициента R. Как уже отмечалось выше, она может быть получена из сопоставления слабых асимптотик по переменной $\mathbf{y}$, определеных в выражениях (45) и (41). Основная идея вычисления довольно естественна. Представление BBK-приближения на некотором удалении от экрана интегралом $\Psi^{\rm sep}$ есть, как уже упоминалось выше, спектральное разложение по собственным функциям $\psi_c^{\rm eff}$. Таким образом, коэффициент разложения, т.е. коэффициент R, находится явно.

7.1. Структура плотности $R(\mathbf{P},\mathbf{P}')$ в уравнении (45) и ее мотивировка. Обратимся к выражению (45) для слабой асимптотики при $y\to\infty$ спектрального разложения решения типа искаженной плоской волны. Предложим анзатц для структуры неизвестной пока плотности $R(\mathbf{P},\mathbf{P}')$, а затем постараемся эту конструкцию оправдать:

$$R(\mathbf{P},\mathbf{P}') = \frac{1}{kpk'p'}A_{\rm in}(\mathbf{P})\frac{\delta(\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{p}'})}{(p'-p+i0)^{1+ia}}\delta\left(\widehat{\mathbf{k}}',\frac{\widehat{\mathbf{k}}+(p'-p)\mathbf{B}_{\rm in}}{|\widehat{\mathbf{k}}+(p'-p)\mathbf{B}_{\rm in}|}\right) \tag{46}$$

$$+\frac{1}{kpk'p'}A_{\rm out}(\mathbf{P})\frac{D(\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{p}'})}{(p'-p-i0)^{1+ib}}\delta\left(\widehat{\mathbf{k}}',\frac{\widehat{\mathbf{k}}+(p'-p)\mathbf{B}_{\rm out}}{|\widehat{\mathbf{k}}+(p'-p)\mathbf{B}_{\rm out}|}\right),$$

где

$$a=\omega-\eta^{\rm eff},\quad b=\omega+\eta^{\rm eff},\quad \eta^{\rm eff}\equiv\frac{2\alpha}{\sqrt{3}p},\quad \omega\equiv\eta_2+\eta_3.$$

Здесь $A_{\rm in}(\mathbf{P})$, $A_{\rm out}(\mathbf{P})$ – коэффициенты, которые могут быть найдены из простого сравнения двух представлений в области сшивки. Вектора $\mathbf{B}_{\rm in}$, $\mathbf{B}_{\rm out}$ пока также неизвестны и будут найдены из дальнейших вычислений. Ядро $D(\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{p}'})$ удовлетворяет уравнению

$$\int d\widehat{\mathbf{p}}' D(\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{p}}')s_c^{\rm eff}(\widehat{\mathbf{y}},\widehat{\mathbf{p}}')=\delta(\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{y}}),$$

Здесь, в свою очередь, $s_c^{\rm eff}(\widehat{\mathbf{y}},\mathbf{p})$ является матрицей рассеяния, отвечающей двухчастичному эффективному решению $\psi_c^{\rm eff}(\mathbf{y},\mathbf{p}')$ согласно выражению (16).

Мы отметили выше причины, по которым ядро $R(\mathbf{P},\mathbf{P}')$ состоит из двух слагаемых. Каждое из этих слагаемых действует как “проектор” на подпространство, отвечающее либо сходящейся, либо расходящейся волне. Структура “проектора” имеет вид

$$\frac{1}{(p'-p\pm i0)^{1+i\beta}}, \tag{47}$$

как было показано еще в работе [9], посвященной задаче рассеяния трех одномерных одноименно заряженных квантовых частиц. Отметим, что обобщенные функции такого вида описаны, например, в [22]. Заметим также, что использование слабых асимптотик по переменной $\mathbf{y}$ в исходном обьекте $\Psi^{\rm sep}$ отделяет угловые переменные и в некотором смысле сводит задачу именно к одномерной. При этом интегрирование по импульсной переменной p' в $\Psi^{\rm sep}$ (45) ведет к тому, что согласно (47) лишь малая окрестность точки $p'=p$ вносит вклад в асимптотику. Наличие дельта-функции $\delta(\widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\mathbf{p}}')$ и оператора с ядром $D(\widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\mathbf{p}'})$ в анзатце ядра $R(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$, как обсуждалось выше, является следствием сингулярной по переменной $\widehat{\mathbf{p}}'$ структуры слабой асимптотики функции $\psi_c^{\rm eff}$. Тем не менее, для того, чтобы воспроизвести малый поправочный член порядка $O\left(\frac{x}{y}\right)$ (это необходимо для убывания невязки, порожденной слагаемыми в решении типа плоских волн, быстрее потенциала), упомянутых степеней свободы или зависимости ядра $R(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$ от переменных p' и $\widehat{\mathbf{p}}'$ недостаточно. Мы сможем лишь правильно воспроизвести показатель экспоненты с учетом логарифмической поправки при согласовании слабых асимптотик, но не линейный по x член порядка $O\left(\frac{x}{y}\right)$.

Зависимость ядра $R(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$ от переменной k' не является свободной, поскольку регулируется законом сохранения энергии (присутствием в интеграле (45) дельта-функции $\delta({k'}^2 + {p'}^2 - E)$). Однако, остается еще один функциональный свободный параметр в ядре $R(\mathbf{P}, \mathbf{P}')$, а именно: зависимость от переменной $\widehat{\mathbf{k}}'$. Мы воспользуемся этим для того, чтобы воспроизвести поправку. Предположим, что вклад в коррекцию (согласование представлений $\Psi^{\rm BBK}$ и $\Psi^{\rm sep}$) вносит лишь малая окрестность направления $\widehat{\mathbf{k}}' = \widehat{\mathbf{k}}$. Естественным малым параметром (в терминах импульсных переменных) при интегрировании по $d\widehat{\mathbf{k}}'$, как мы упомянули выше, является величина $p' - p$. Основываясь на этих простых соображениях, введем слабую коррекцию угловой точки $\widehat{\mathbf{k}}' = \widehat{\mathbf{k}}$ с помощью ядра

$$\delta\left(\widehat{\mathbf{k}}', \frac{\widehat{\mathbf{k}} + (p' - p)\mathbf{B}_{in(out)}}{|\widehat{\mathbf{k}} + (p' - p)\mathbf{B}_{in(out)}|}\right). \tag{48}$$

Ниже мы покажем совпадение в области $\Omega^1_{\mu\nu}$ (39) слабых асимптотик по переменной $\mathbf{y}$ функций $\Psi^{\rm BBK}$ и интеграла типа спектрального разложения с ядром (46) $\Psi^{\rm sep}$ для сходящихся волн. Все вычисления для согласования слабых асимптотик расходящихся волн могут быть проведены аналогично.

Упростим выражение (45) с учетом приведенной выше структуры ядра (46).

7.2. Упрощение решения $\Psi^{\mathrm{sep}}(\mathbf{X},\mathbf{P})$ в полной области Ω_1^+ (36). Выражение для сходящейся волны в представлении спектрального разложения (45) имеет вид

$$\Psi_{\mathrm{in}}^{\mathrm{sep}}(\mathbf{X},\mathbf{P}) = \frac{A_{\mathrm{in}}}{kp}\int\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{d\mathbf{k}'}{k'}\int\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{d\mathbf{p}'}{p'}\psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k}')$$
$$\times\frac{2\pi}{ip'y}e^{-ip'y+i\eta'^{\mathrm{eff}}\ln y}\delta(-\widehat{\mathbf{y}},\widehat{\mathbf{p}}')\delta(k'^2+p'^2-E)$$
$$\times\frac{\delta(\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{p}'})}{(p'-p+i0)^{1+ia}}\delta\left(\widehat{\mathbf{k}}',\frac{\widehat{\mathbf{k}}+(p'-p)\mathbf{B}}{|\widehat{\mathbf{k}}+(p'-p)\mathbf{B}|}\right),\ \ \eta'^{\mathrm{eff}}\equiv\frac{2\alpha}{\sqrt{3}p'},\ \ y\gg 1. \tag{49}$$

Упростим аргумент δ-функции, действующей по угловой переменной $\widehat{\mathbf{k}}'$, в предположении $|p'-p|\ll 1$. Это предположение обоснованно, так как именно малая окрестность точки $p'=p$ в интеграле по dp' дает основной вклад в интеграл :

$$\frac{\widehat{\mathbf{k}}+(p'-p)\mathbf{B}}{|\widehat{\mathbf{k}}+(p'-p)\mathbf{B}|}=\widehat{\mathbf{k}}+(p'-p)\left\{\mathbf{B}-\langle\widehat{\mathbf{k}},\mathbf{B}\rangle\widehat{\mathbf{k}}\right\}+O\left(|p'-p|^2\right).$$

Найдем асимптотику выражения (49) при $y\to\infty$. Вводя новую переменную $\zeta=p'-p$, получим

$$\Psi_{\mathrm{in}}^{\mathrm{sep}}(\mathbf{X},\mathbf{P})\sim\frac{2\pi}{ikpy}e^{-ipy+i\eta^{\mathrm{eff}}\ln y}\delta(-\widehat{\mathbf{y}},\widehat{\mathbf{p}})$$
$$\times A_{\mathrm{in}}\int\limits_{\mathbf{S}^2}d\widehat{\mathbf{k}}'\int\limits_0^\infty k'dk'\int\limits_{-p}^\infty\frac{d\zeta e^{-i\zeta y}}{(\zeta+i0)^{1+ia}}\psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k}') \tag{50}$$
$$\times\delta(k'^2+(\zeta+p)^2-E)\delta(\widehat{\mathbf{k}}',\widehat{\mathbf{k}}+\zeta\mathbf{G}).$$

где $\mathbf{G}=\mathbf{B}-\langle\widehat{\mathbf{k}},\mathbf{B}\rangle\widehat{\mathbf{k}}$.

Интегрируя по $d\mathbf{k}'$, мы придем к выражению

$$\Psi_{\mathrm{in}}^{\mathrm{sep}}(\mathbf{X},\mathbf{P})\sim A_{\mathrm{in}}\frac{2\pi}{ikpy}e^{-ipy+i\eta^{\mathrm{eff}}\ln y}\delta(-\widehat{\mathbf{y}},\widehat{\mathbf{p}})$$
$$\times\int\limits_{-p}^\infty\frac{d\zeta}{(\zeta+i0)^{1+ia}}e^{-i\zeta y}\psi_c\left(\mathbf{x},\sqrt{E-(p+\zeta)^2}(\widehat{\mathbf{k}}+\zeta\mathbf{G})\right). \tag{51}$$

Данный интеграл следует понимать с учетом условия излучения на бесконечности в конфигурационном пространстве. Последнее замечание связано с однозначным описанием аналитической функции $\psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k})$. Как следующий шаг проведем замену переменной $u = \zeta y$ и вспомним, что нас интересует асимптотика выражения (51) при $y \to \infty$.

$$\begin{aligned}\Psi_{\text{in}}^{\text{sep}}(\mathbf{X},\mathbf{P}) &\sim A_{\text{in}}\frac{2\pi}{ikpy}e^{-ipy+i\omega\ln y}\delta(-\widehat{\mathbf{y}},\widehat{\mathbf{p}})\\ &\times\int\limits_{-py}^{\infty}\frac{du}{(u+i0)^{1+ia}}e^{-iu}\psi_c\left(\mathbf{x},\sqrt{E-\left(p+\frac{u}{y}\right)^2}(\widehat{\mathbf{k}}+\frac{u}{y}\mathbf{G})\right).\end{aligned}\tag{52}$$

Последний интеграл сводится к выражению

$$\begin{aligned}\Psi_{\text{in}}^{\text{sep}}(\mathbf{X},\mathbf{P}) &\sim A_{\text{in}}\frac{2\pi}{ikpy}e^{-ipy+i\omega\ln y}\delta(-\widehat{\mathbf{y}},\widehat{\mathbf{p}})\\ &\times\int\limits_{l^+}du u^{-1-ia}e^{-iu}\psi_c\left(\mathbf{x},\sqrt{E-\left(p+\frac{u}{y}\right)^2}(\widehat{\mathbf{k}}+\frac{u}{y}\mathbf{G})\right),\end{aligned}\tag{53}$$

в котором контур l^+ обходит в отрицательном направлении разрез, проведенный из точки $u = -i0$ на бесконечность вдоль луча, составляющего с вещественной положительной полуосью в комплексной плоскости u угол ϕ при условии $-\frac{\pi}{2} < \phi < 0$.

Заметим, что второй аргумент функции ψ_c упрощается следующим образом

$$\sqrt{E-\left(p+\frac{u}{y}\right)^2}(\widehat{\mathbf{k}}+\frac{u}{y}\mathbf{G}) = \mathbf{k}+\frac{u}{y}\left(-\frac{p}{k}\widehat{\mathbf{k}}+k\mathbf{G}\right)+O\left(\frac{1}{y^2}\right).$$

Таким образом, в интеграле (53) выражение для функции ψ_c принимает вид

$$\begin{aligned}&\psi_c\left(\mathbf{x},\sqrt{E-\left(p+\frac{u}{y}\right)^2}(\widehat{\mathbf{k}}+\frac{u}{y}\mathbf{G})\right)\\ &\qquad=\psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k})+\frac{u}{y}\left\langle\nabla_{\mathbf{k}}\psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k}),(-\frac{p}{k}\widehat{\mathbf{k}}+k\mathbf{G})\right\rangle+O\left(\frac{1}{y^2}\right).\end{aligned}$$

Заметим, что это выражение справедливо всюду внутри параболической окрестности экрана Ω_1^+ (36).

Наконец, интегрируя по du в уравнении (53) в соответствии с уравнением (87) и, принимая во внимание, что вследствие интегрирования по частям

$$\int_{l+} du u^{-ia} e^{-iu} = -a \int_{l+} du u^{-1-ia} e^{-iu},$$

получаем

$$\begin{aligned}\Psi^{\rm sep}_{\rm in}(\mathbf{X},\mathbf{P}) &\sim A_{\rm in}\Gamma(-ia)e^{-\frac{\pi a}{2}}(1-e^{2\pi a})\\ &\times \frac{2\pi}{ikpy} e^{-ipy+i\omega\ln y}\delta(-\widehat{\mathbf{y}},\widehat{\mathbf{p}})\psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k})\\ &\times\left(1-\frac{a}{y}\left\langle\frac{\nabla_{\mathbf{k}}\psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k})}{\psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k})}, -\frac{p}{k}\widehat{\mathbf{k}}+k\mathbf{G}\right\rangle\right).\end{aligned} \tag{54}$$

Асимптотика расходящейся волны строится аналогично. Таким образом, мы построили в старшем порядке слабую асимптотику по переменной y решения задачи рассеяния типа искаженной плоской волны в области, допускающей "почти разделение переменных".

7.3. Упрощение решения вида $\Psi^{\rm sep}$ в области согласования $\Omega^1_{\mu\nu}$ (39) и согласование представлений $\Psi^{\rm sep}$ и $\Psi^{\rm BBK}$. Построенная нами слабая асимптотика сходящейся волны для решения вида $\Psi^{\rm sep}(\mathbf{X},\mathbf{P})$ справедлива во всей области Ω_1^+ (36). Однако, согласование решений вида $\Psi^{\rm sep}(\mathbf{X},\mathbf{P})$ и $\Psi^{\rm BBK}(\mathbf{X},\mathbf{P})$ мы должны проводить лишь в области $\Omega^1_{\mu\nu}$ (39) при условии $x \gg 1$. В этой области справедлива оценка:

$$\nabla_{\mathbf{k}}\psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k}) = i\mathbf{x}\psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k})\left(1+O(\log x/x)\right).$$

При этом выражение (54) сильно упрощается

$$\begin{aligned}&\Psi^{\rm sep}_{\rm in}(\mathbf{X},\mathbf{P}) \sim A_{\rm in}\Gamma(-ia)e^{-\frac{\pi a}{2}}(1-e^{2\pi a})\\ &\times\frac{2\pi}{ikpy}e^{-ipy+i\omega\ln y}\delta(-\widehat{\mathbf{y}},\widehat{\mathbf{p}})\psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k})\left(1-ia\frac{x}{y}\left\langle\widehat{\mathbf{x}}, -\frac{p}{k}\widehat{\mathbf{k}}+k\mathbf{G}\right\rangle\right).\end{aligned} \tag{55}$$

Вспомним, что

$$\mathbf{G} = \mathbf{B} - \langle\widehat{\mathbf{k}},\mathbf{B}\rangle\widehat{\mathbf{k}}, \quad a = \omega - \frac{2\alpha}{\sqrt{3}p}, \quad \omega = \eta_2+\eta_3,$$

и сравним полученную зависимость от переменной $\mathbf{x}$ в сходящейся волне (55) с аналогичной зависимостью в функции $\Psi^{\rm BBK}_{\rm in}$ (43). Найдем, что

$$\psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k})\{1+i\frac{x}{y}\langle\widehat{\mathbf{x}},\mathbf{L}\rangle\} = \psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k})\left\{1-ia\frac{x}{y}\langle\widehat{\mathbf{x}},-\frac{p}{k}\widehat{\mathbf{k}}+k\mathbf{G}\rangle\right\}, \qquad (56)$$

где вектор $\mathbf{L}$ определен в уравнении (44).

Равенство (56) ведет к уравнению для неизвестного вектора $\mathbf{B}$

$$\mathbf{L} = -a(-\frac{p}{k}\widehat{\mathbf{k}}+k\mathbf{G}) \qquad (57)$$

Последнее уравнение может быть записано в виде векторного уравнения

$$\mathbf{L} - a\frac{p}{k}\widehat{\mathbf{k}} = ak(\mathbf{B} - \langle\widehat{\mathbf{k}},\mathbf{B}\rangle\widehat{\mathbf{k}}). \qquad (58)$$

Заметим, что для любого вектора $\mathbf{B}$ правая часть уравнения (58) ортогональна вектору $\mathbf{k}$. Значит, и левая часть должна быть ортогональна вектору $\mathbf{k}$. Иначе говоря, мы должны показать, что справедливо

Утверждение 7.3.1. *Равенство*

$$\langle\mathbf{L},\mathbf{k}\rangle - ap = 0 \qquad (59)$$

является тождеством или, иначе говоря, справедливо равенство

$$p\omega - \frac{2\alpha}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\eta_2\frac{\langle\widehat{\mathbf{k}}_2,\mathbf{k}\rangle - \langle\widehat{\mathbf{p}},\mathbf{k}\rangle}{1-\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_2\rangle} + \eta_3\frac{\langle\widehat{\mathbf{k}}_3,\mathbf{k}\rangle + \langle\widehat{\mathbf{p}},\mathbf{k}\rangle}{1+\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_3\rangle}\right). \qquad (60)$$

Покажем это.

Доказательство. В исходных терминах равенство (60) имеет вид

$$\begin{aligned}&\frac{p}{k}\left(\frac{2}{\sqrt{3}p} - \frac{1}{2k_2} - \frac{1}{2k_3}\right)\\ &\quad = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2k_2}\frac{-\langle\widehat{\mathbf{k}},\widehat{\mathbf{k}}_2\rangle + \langle\widehat{\mathbf{k}},\widehat{\mathbf{p}}\rangle}{1-\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_2\rangle} + \frac{1}{2k_3}\frac{-\langle\widehat{\mathbf{k}},\widehat{\mathbf{k}}_3\rangle - \langle\widehat{\mathbf{k}},\widehat{\mathbf{p}}\rangle}{1+\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_3\rangle}\right).\end{aligned} \qquad (61)$$

Это равенство приводится к следующему виду

$$\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}k_2}\frac{2k_2+\sqrt{3}p+\langle\mathbf{k},\widehat{\mathbf{p}}\rangle}{1-\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_2\rangle} + \frac{1}{\sqrt{3}k_3}\frac{2k_3+\sqrt{3}p-\langle\mathbf{k},\widehat{\mathbf{p}}\rangle}{1+\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_3\rangle} \qquad (62)$$

Подставляя равенства связи моментов

$$\langle\mathbf{k},\widehat{\mathbf{p}}\rangle = -\sqrt{3}p - 2\langle\mathbf{k}_2,\widehat{\mathbf{p}}\rangle, \quad \langle\mathbf{k},\widehat{\mathbf{p}}\rangle = \sqrt{3}p - 2\langle\mathbf{k}_3,\widehat{\mathbf{p}}\rangle.$$

соответственно в первое и второе слагаемые правой части уравнения (62), приходим к тождеству. □

Таким образом, мы приходим к выводу, что справедливо следующее

Утверждение 7.3.2. 1) *вектор* $\mathbf{B}$, *являющийся параметром в ядре* (49), *ортогонален вектору момента* $\mathbf{k}$. *Как было показано выше, это условие необходимо для однозначности определения вектора* $\mathbf{B}$. *В некотором смысле это утверждение является следствием корректного определения аргумента угловой дельта-функции* (48).

2) *вектор* $\mathbf{B}$ *однозначно находится из уравнения* (58).

Заметим, что в случае расходящейся волны выкладки аналогичны. В этом случае уравнение (61) заменяется на уравнение

$$\begin{aligned} &\frac{p}{k}\left(\frac{2}{\sqrt{3}p}+\frac{1}{2k_2}+\frac{1}{2k_3}\right) \\ &\quad=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2k_2}\frac{-\langle\widehat{\mathbf{k}},\widehat{\mathbf{k}}_2\rangle-\langle\widehat{\mathbf{k}},\widehat{\mathbf{p}}\rangle}{1+\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_2\rangle}+\frac{1}{2k_3}\frac{-\langle\widehat{\mathbf{k}},\widehat{\mathbf{k}}_3\rangle+\langle\widehat{\mathbf{k}},\widehat{\mathbf{p}}\rangle}{1-\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_3\rangle}\right). \end{aligned} \tag{63}$$

Доказательство этого равенства проводится аналогично. □

Мы позволим себе опустить выкладки, касающиеся определения коэффициентов в части ядра, связанной с расходящейся волной. Принципиально они не отличаются от приведенных выше.

§8. Восстановление непрерывных поточечных асимптотик в области Ω_1^+

Очевидно, что процедура, описанная выше в разделе 7.3, позволяет определить параметры плотности $R(\mathbf{P},\mathbf{P}')$ таким образом, чтобы согласовать слабые асимптотики при $y\to\infty$ в области $\Omega_{\mu\nu}$. Интегральное представление (45) справедливо, однако, во всей области Ω_1^+, определенной уравнением (36). Заметим, что в области Ω_1 (28) мы располагаем поточечными асимптотиками решения типа Ψ^{BBK}. В дополнительной области Ω_1^+ мы не имеем поточечных асимптотик, а имеем лишь интегральное представление для решения вида Ψ^{sep} (45). В свою очередь, для этого решения мы построили слабые асимптотики по переменной $\mathbf{y}$ типа суперпозиции сходящейся (54) и (аналогично) расходящейся волн.

Заметим, однако, что восстановление равномерных (поточечных) асимптотик для функции Ψ^{sep} (45) в старшем порядке, то есть вплоть до слагаемых порядка величины $O\left(\frac{x}{y}\right)$, возможно и происходит следующим образом.

Мы собираемся, как уже указывалось выше, построить такую функцию $\widetilde{\Psi}^{\mathrm{BBK}}$, которая в области Ω_1 допускала бы "сшивку" (согласование) с функцией Ψ^{BBK} таким образом, чтобы невязка уравнения Шредингера согласованного решения убывала бы быстрее кулоновского потенциала на всей области Ω_1. С другой стороны мы должны потребовать, чтобы слабая асимптотика по переменной $\mathbf{y}$ функции $\widetilde{\Psi}^{\mathrm{BBK}}$ в области Ω_1^+ совпадала бы с точностью до членов порядка $O(x/y)$ со слабой асимптотикой функции Ψ^{sep}.

Заметим, что такая функция у нас уже есть. Чтобы это понять, нужно вспомнить, как строится слабая асимптотика по переменной $\mathbf{y}$ выражения Ψ^{BBK} (40). Переменная $\mathbf{y}$ содержится лишь в функции $\Psi_1(\mathbf{z},\mathbf{q})$, которая входит в выражение Ψ^{BBK} как сомножитель. В этом выражении проведем замену

$$\mathbf{x} \longrightarrow -i\frac{\nabla_{\mathbf{k}}\psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k})}{\psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k})}. \tag{64}$$

Приходим к следующему результату

$$\begin{aligned} \widetilde{\Psi}^{\mathrm{BBK}}(\mathbf{z},\mathbf{q}) &= \psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k})\widetilde{\Psi}_1(\mathbf{z},\mathbf{q}),\\ \widetilde{\Psi}_1(\mathbf{z},\mathbf{q}) &= N_0^{(23)}e^{i\langle\mathbf{y},\mathbf{p}\rangle}D(\widetilde{\mathbf{x}}_2,\mathbf{k}_2)D(\widetilde{\mathbf{x}}_3,\mathbf{k}_3). \end{aligned} \tag{65}$$

Как и выше мы пользуемся здесь обозначениями (19) и (20), а также

$$\widetilde{\mathbf{x}}_2 \equiv -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{y} + i\frac{1}{2}\frac{\nabla_{\mathbf{k}}\psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k})}{\psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k})}, \quad \widetilde{\mathbf{x}}_3 \equiv \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{y} + i\frac{1}{2}\frac{\nabla_{\mathbf{k}}\psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k})}{\psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k})}.$$

Вычислим слабую асимптотику по переменной $\mathbf{y}$ этого выражения, повторив выкладки, приведенные в Приложении А. При этом мы отказываемся от условия $x \gg 1$, что, как нетрудно видеть, не сказывается на ходе вычислений и приводит к уравнению (43) с учетом замены (64) в выражении в фигурных скобках. Полученное нами выражение с учетом уравнения (57)совпадает с выражением (54). Тем самым условие согласования слабых асимптотик функций $\widetilde{\Psi}^{\mathrm{BBK}}$ и Ψ^{sep} в области Ω_1^+ заведомо выполняется. Заметим сразу, что условие согласования функции $\widetilde{\Psi}^{\mathrm{BBK}}$ с функцией Ψ^{BBK} в области Ω_1 также выполняется вследствие выполнения асимптотического условия

$$-i\frac{\nabla_{\mathbf{k}}\psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k})}{\psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k})} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{x}(1+O(\log x/x)).$$

Отметим, что мы построили поточечную асимптотику решения задачи рассеяния типа искаженной волны, в широкой области конфигурационного пространства $\widetilde{\Omega}_1$, основываясь лишь на согласовании слабых асимптотик решений в некоторой подобласти $\Omega^1_{\mu\nu}$. Проверим, что согласование на уровне слабых асимптотик оказывается достаточным для быстрого убывания невязки уравнения Шредингера асимптотик поточечных.

В качестве первого шага вычислим невязку

$$Q[\widetilde{\Psi}^{\mathrm{BBK}}] \equiv (H-E)\widetilde{\Psi}^{\mathrm{BBK}}$$

выражения (65). Это вычисление является нетрудным, однако громоздким. Поэтому мы позволим себе не приводить здесь промежуточные выкладки. В отличие от значительно более простого выражения (23) получим следующее представление для невязки

$$\begin{aligned}
&e^{-i\langle \mathbf{q},\mathbf{z}\rangle} Q[\widetilde{\Psi}^{\mathrm{BBK}}] \\
&= \Phi_1\Phi_2''\Phi_3\left\{\frac{k_2^2}{4}|\nabla_{\mathbf{x}}\Lambda_2|^2 - \frac{1}{2}k_2^2(1-\langle\widehat{\widetilde{\mathbf{x}}}_2,\widehat{\mathbf{k}}_2\rangle)\right\} \\
&-\Phi_1\Phi_2'\Phi_3\left\{i\frac{k_2}{2}\Delta_{\mathbf{x}}\Lambda_2 - k_2\langle\nabla_{\mathbf{x}}\Lambda_2,\mathbf{k}_1\rangle + k_1k_2\langle\widehat{\mathbf{k}}_2-\widehat{\widetilde{\mathbf{x}}}_2,\widehat{\mathbf{k}}_1\rangle - \frac{i}{2}\frac{k_2}{|\widetilde{\mathbf{x}}_2|}\right\} \\
&+\Phi_1\Phi_2\Phi_3''\left\{\frac{k_3^2}{4}|\nabla_{\mathbf{x}}\Lambda_3|^2 - \frac{1}{2}k_3^2(1-\langle\widehat{\widetilde{\mathbf{x}}}_3,\widehat{\mathbf{k}}_3\rangle)\right\} \\
&-\Phi_1\Phi_2\Phi_3'\left\{i\frac{k_3}{2}\Delta_{\mathbf{x}}\Lambda_3 - k_3\langle\nabla_{\mathbf{x}}\Lambda_3,\mathbf{k}_1\rangle + k_3k_1\langle\widehat{\mathbf{k}}_3-\widehat{\widetilde{\mathbf{x}}}_3,\widehat{\mathbf{k}}_1\rangle - \frac{i}{2}\frac{k_3}{|\widetilde{\mathbf{x}}_3|}\right\} \\
&+\Phi_1\Phi_2'\Phi_3'\frac{k_2k_3}{2}\langle\nabla_{\mathbf{x}}\Lambda_2,\nabla_{\mathbf{x}}\Lambda_3\rangle + \Phi_1'\Phi_2'\Phi_3k_1k_2\langle\widehat{\mathbf{x}}_1-\widehat{\mathbf{k}}_1,\nabla_{\mathbf{x}}\Lambda_2\rangle \\
&+\Phi_1'\Phi_2\Phi_3'k_1k_3\langle\widehat{\mathbf{x}}_1-\widehat{\mathbf{k}}_1,\nabla_{\mathbf{x}}\Lambda_3\rangle + O\left(\frac{1}{y^{1+\varepsilon}}\right).
\end{aligned} \tag{66}$$

Мы используем здесь также обозначение (22),

$$\Lambda_2 \equiv \langle\widehat{\mathbf{k}}_2+\widehat{\mathbf{y}}+\frac{1}{2\sqrt{3}y}\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle, \quad \Lambda_3 \equiv \langle\widehat{\mathbf{k}}_3-\widehat{\mathbf{y}}+\frac{1}{2\sqrt{3}y}\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle, \tag{67}$$

$$\mathbf{u}\equiv\mathbf{x}+\mathbf{v}, \quad \mathbf{v}\equiv -i\frac{\nabla_{\mathbf{k}}\Phi_1}{\Phi_1}, \tag{68}$$

а значок производной функции Φ_i, $\imath = 1,2,3$ следует понимать как производную по третьему аргументу.

Мы рассматриваем ситуацию, когда переменная x ограничена

$$x \sim 1. \tag{69}$$

Рассмотрим также асимптотическую область конфигурационного пространства, накладывая следующие условия на дополнительные парные координаты

$$k_j \widetilde{x}_j (1 - \langle \widehat{\mathbf{k}}_j, \widehat{\widetilde{\mathbf{x}}}_j \rangle) \underset{y\to\infty}{\sim} y^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad j = 2, 3. \tag{70}$$

что фактически позволяет описывать и окрестности всех парных направлений рассеяния вперед. В дальнейшем мы увидим, что это условие может быть значительно ослаблено.

Утверждение 8.1. *Невязка* (66) *убывает быстрее потенциала в асимптотической области конфигурационного пространства* $\widetilde{\Omega}_1$ *при условии* (70).

Доказательство. Согласно условию (25) выражения во второй и четвертой строках уравнения (66) убывают как $O\left(\frac{1}{y^{1+2\varepsilon}}\right)$, что заведомо быстрее кулоновского потенциала $\frac{1}{y}$. По той же причине быстро убывает на бесконечности в конфигурационном пространстве первое слагаемое шестой строки. Однако, функция Φ_1' в силу ограниченности третьего аргумента (условие (69)) не порождает дополнительной малости. Единственная возможность заключается в том, чтобы доказать, что по отдельности быстро убывают на бесконечности выражения, составленные из третьей строки и второго слагаемого шестой строки в уравнении (66), а также – из пятой строки и седьмой строки в уравнении (66). Это означает, что выполняется

Гипотеза 8.1. *Следующие соотношения справедливы:*

$$\begin{aligned} &-\Phi_1 \left\{ i\frac{k_2}{2}\Delta_{\mathbf{x}}\Lambda_2 - k_2\langle \nabla_{\mathbf{x}}\Lambda_2, \mathbf{k}_1\rangle + k_1 k_2 \langle \widehat{\mathbf{k}}_2 - \widehat{\widetilde{\mathbf{x}}}_2, \widehat{\mathbf{k}}_1\rangle - \frac{i}{2}\frac{k_2}{|\widetilde{\mathbf{x}}_2|} \right\} \\ &\quad + \Phi_1' k_1 k_2 \langle \widehat{\mathbf{x}}_1 - \widehat{\mathbf{k}}_1, \nabla_{\mathbf{x}}\Lambda_2\rangle = O\left(\frac{1}{y}\right), \end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned} &-\Phi_1 \left\{ i\frac{k_3}{2}\Delta_{\mathbf{x}}\Lambda_3 - k_3\langle \nabla_{\mathbf{x}}\Lambda_3, \mathbf{k}_1\rangle + k_3 k_1 \langle \widehat{\mathbf{k}}_3 - \widehat{\widetilde{\mathbf{x}}}_3, \widehat{\mathbf{k}}_1\rangle - \frac{i}{2}\frac{k_3}{|\widetilde{\mathbf{x}}_3|} \right\} \\ &\quad + \Phi_1' k_1 k_3 \langle \widehat{\mathbf{x}}_1 - \widehat{\mathbf{k}}_1, \nabla_{\mathbf{x}}\Lambda_3\rangle = O\left(\frac{1}{y}\right). \end{aligned} \tag{72}$$

Доказательство. Рассмотрим выражение (71). Перепишем его в следующем виде

$$-\Delta_{\mathbf{x}}\varphi - 2i\langle \mathbf{k}, \nabla_{\mathbf{x}}\varphi\rangle + \frac{\alpha}{|\mathbf{x}|}\varphi = -2k\Phi'\langle \mathbf{a}, \widehat{\mathbf{x}} - \widehat{\mathbf{k}}\rangle, \tag{73}$$

отбрасывая величины порядка $O(1/y)$. Мы воспользовались здесь следующими обозначениями:

$$\varphi \equiv \langle \mathbf{a}, \nabla_{\mathbf{k}}\Phi\rangle, \quad \mathbf{a} \equiv \widehat{\mathbf{k}}_2 + \widehat{\mathbf{y}}. \tag{74}$$

Проверка того факта, что уравнение (73) эквивалентно уравнению (71) с точностью до членов порядка $O(1/y)$, является несложной, но громоздкой. Мы позволим себе опустить здесь эти вычисления. Справедливость уравнения (73) является нашей гипотезой, которую следует доказать.

Рассмотрим двухчастичное уравнение Шредингера (21), решение которого определено уравнением (20), и применим к уравнению (21) слева оператор $\nabla_{\mathbf{k}}$. Результат спроецируем на постоянный вектор $\mathbf{a}$, определенный в уравнении (74). Полученное в результате уравнение совпадает с уравнением (73). Это означает, что уравнение (71) на самом деле является тождеством, порожденным двухчастичным кулоновским уравнением Шредингера, и, тем самым, заведомо справедливо. Аналогично доказывается справедливость уравнения (72).

Гипотеза 8.1 доказана. $\square$

Мы получили, что выражение, записанное в левой части уравнения (71), убывает при $y \to \infty$ как $O(1/y)$. Это выражение является коэффициентом при множителе $\Phi_2'\Phi_3$ в уравнении (66) для невязки. Множитель $\Phi_2'\Phi_3$ сам по себе убывает на бесконечности вследствие свойства (25). Таким образом, соответствующий вклад в невязку убывает быстрее потенциала. Аналогично доказывается достаточная скорость убывания на бесконечности вклада в невязку, отвечающего выражению (72). Скорость убывания на бесконечности по переменной y (быстрее, чем $1/y$) оставшейся части уравнения (66) обсуждалась выше.

Утверждение 8.1 доказано. $\square$

Мы доказали, таким образом, утверждение о том, что невязка (66), полученная в предположении ограниченности переменной x, убывает быстрее потенциала в асимптотической области конфигурационного пространства, определяемой условием (70).

Ослабим требование (70) следующим образом

$$k_j\widetilde{x}_j(1-\langle\widehat{\mathbf{k}}_j,\widehat{\widetilde{\mathbf{x}}}_j\rangle)\underset{y\to\infty}{\sim}y^{\varepsilon},\quad \varepsilon>0,\quad j=2,3. \tag{75}$$

и сформулируем

Утверждение 8.2. *Невязка* (66) *убывает быстрее потенциала в асимптотической области конфигурационного пространства, определяемой условием* (75).

Доказательство. В наших предположениях $\widetilde{\mathbf{x}}_2\sim\widetilde{\mathbf{x}}_3\sim\mathbf{y}$,

$$\widehat{\widetilde{\mathbf{x}}}_2=-\widehat{\mathbf{y}}+O\left(\frac{1}{y}\right),\quad \widehat{\widetilde{\mathbf{x}}}_3=\widehat{\mathbf{y}}+O\left(\frac{1}{y}\right).$$

Из уравнения (75) следует, что справедливы оценки

$$\begin{aligned}
&|1-\langle\widehat{\mathbf{k}}_2,\widehat{\widetilde{\mathbf{x}}}_2\rangle|\sim|1+\langle\widehat{\mathbf{k}}_2,\widehat{\mathbf{y}}\rangle|\sim O\left(\frac{1}{y^{1-\varepsilon}}\right),\\
&|1-\langle\widehat{\mathbf{k}}_3,\widehat{\widetilde{\mathbf{x}}}_3\rangle|\sim|1-\langle\widehat{\mathbf{k}}_3,\widehat{\mathbf{y}}\rangle|\sim O\left(\frac{1}{y^{1-\varepsilon}}\right),
\end{aligned} \tag{76}$$

а также

$$|\widehat{\mathbf{y}}+\widehat{\mathbf{k}}_2|\sim O\left(\frac{1}{y^{1/2-\varepsilon/2}}\right),\quad |\widehat{\mathbf{y}}-\widehat{\mathbf{k}}_3|\sim O\left(\frac{1}{y^{1/2-\varepsilon/2}}\right). \tag{77}$$

Заметим теперь, что согласно (75) третий аргумент функций Φ_2 и Φ_3 имеет порядок y^{ε}. Также справедлива оценка (25) для поизводных вырожденной гипергеометрической функции, которая позволяет оценить порядок величины выражения R_2 во второй и R_4 в четвертой строках уравнения (66)

$$R_{2(4)}\sim y^{-2\varepsilon}y^{-1+\varepsilon}\sim y^{-1-\varepsilon}.$$

Аналогичная оценка справедлиа для первого слагаемого шестой строки. Остальные слагаемые выражения (66) оцениваются также как это было сделано в Утверждении 8.1.

Тем самым Утверждение 8.2 доказано. □

Этот результат является центральным. Заметим, что при больших x выражения $\widetilde{\mathbf{x}}_{2(3)}$ переходят в обыкновенные выражения $\mathbf{x}_{2(3)}$, а функция $\widetilde{\Psi}^{\mathrm{BBK}}$ (65) переходит в Ψ^{BBK} (18). Заметим также, что вне окрестностей парных направлений рассеяния вперед

$$\langle\widehat{\mathbf{x}}_j,\widehat{\mathbf{k}}_j\rangle=1,\quad j=1,2,3$$

наш результат согласуется с результатами работы [16]. Равномерное по углам описание старшего члена асимптотики решения задачи рассеяния получено впервые.

§9. Заключение

Отметим, что описанные выше результаты сводятся к следующему. Начиная с асимптотической окрестности каждого экрана

$$x_j \sim 1, \quad y_j \gg 1, \quad j = 1, 2, 3$$

и вплоть до области Ω_0, в которой

$$x_j \gg 1, \quad y_j \gg 1, \quad j = 1, 2, 3,$$

мы предъявляем явные асимптотические формулы для СФ непрерывного спектра $\widetilde{\Psi}^{\mathrm{BBK}}$, дающие быстро (быстрее кулоновского потенциала) убывающую на бесконечности невязку уравнения Шредингера. Отметим, что упомянутые аимптотические формулы согласуются с сохранением быстрого убывания невязки с хорошо известным асимптотичесим выражением Ψ^{BBK}. Это выражение, в свою очередь, оказывается связующим звеном между асимптотическими представлениями, ассициированными с различными экранами. При этом мы позволим себе не строить "сшивку" (согласование) различных представлений, и, тем самым, не останавливаться сейчас на технических подробностях, которые могут быть отражены в отдельной работе.

§10. Благодарность

Автор выражает глубокую благодарность своему Учителю проф. В. С. Буслаеву, под руководством которого была начата и без постоянного внимания и поддержки которого не могла бы быть завершена эта работа.

§11. Приложение А. Построение слабой асимптотики функции $\Psi^{\text{ВВК}}(\mathbf{z},\mathbf{q})$ при условии $1 \ll x \ll y$

Мы собираемся описать здесь слабую асимптотику при $y \to \infty$ функции $\Psi^{\text{ВВК}}$ (18) или, иными словами, записать функцию $\Psi^{\text{ВВК}}$ как обобщенную функцию по переменной $\widehat{\mathbf{y}}$. Всюду ниже мы используем обозначения

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{y}=\mathbf{y}_1, \quad \mathbf{k}=\mathbf{k}_1, \quad \mathbf{p}=\mathbf{p}_1.$$

Будем считать, что

$$x \sim y^{\delta_0}, \quad \frac{1}{2} < \delta_0 < \frac{3}{4}. \tag{78}$$

Мы будем также использовать представление для вырожденной гипергеометрической функции $D(\mathbf{x},\mathbf{k}) = \Phi(-i\eta, 1, ikx(1-\langle\widehat{\mathbf{k}},\widehat{\mathbf{x}}\rangle))$, $\eta = \frac{\alpha}{2k}$ в виде интеграла по контуру в комплексной плоскости [20]

$$\Phi(a,c,u) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(c)\Gamma(1-a)}{\Gamma(c-a)} \int\limits_1^{(0+)} e^{ut}(-t)^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,dt, \tag{79}$$
$$\operatorname{Re}(c-a)>0,$$

где контур начинается в точке $t=1$ на вещественной оси комплексной плоскости t, обходит точку ноль в положительном направлении и возвращается в точку $t=1$. В нашем случае

$$a=-i\eta, \quad c=1, \quad u=ikx(1-\langle\widehat{\mathbf{k}},\widehat{\mathbf{x}}\rangle).$$

Оценим интеграл функции $\Psi^{\text{ВВК}}(\mathbf{z},\mathbf{q})$ с гладкой функцией $g(\widehat{\mathbf{y}}) \in C^\infty(\mathbf{S}^2)$ по $d\widehat{\mathbf{y}}$, $\widehat{\mathbf{y}} \in \mathbf{S}^2$ при условии $y\to\infty$, $x \gg 1$, $x \ll y$:

$$\begin{aligned} I_y &= \int\limits_{\mathbf{S}^2} d\widehat{\mathbf{y}} e^{i\langle\mathbf{p},\mathbf{y}\rangle} e^{i\langle\mathbf{k},\mathbf{x}\rangle} D(\mathbf{x},\mathbf{k}) D(\mathbf{x}_2,\mathbf{k}_2) D(\mathbf{x}_3,\mathbf{k}_3) g(\widehat{\mathbf{y}}) \\ &= A_0(\mathbf{x},\mathbf{q}) \int\limits_{\mathbf{S}^2} d\widehat{\mathbf{y}} e^{i\langle\mathbf{p},\mathbf{y}\rangle} g(\widehat{\mathbf{y}}) \int\limits_1^{(0+)} dt_2 e^{it_2k_2x_2(1-\langle\widehat{\mathbf{k}}_2,\widehat{\mathbf{x}}_2\rangle)}(-t_2)^{-i\eta_2-1}(1-t_2)^{i\eta_2} \\ &\quad\times \int\limits_1^{(0+)} dt_3 e^{it_3k_3x_3(1-\langle\widehat{\mathbf{k}}_3,\widehat{\mathbf{x}}_3\rangle)}(-t_3)^{-i\eta_3-1}(1-t_3)^{i\eta_3}. \end{aligned} \tag{80}$$

Мы ввели здесь обозначение $A_0(\mathbf{x},\mathbf{q}) = -\frac{1}{4\pi^2}N_0^{(23)}\psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k})$, где ψ_c обозначает двухчастичное состояние рассеяния.

Примем во внимание, что

$$\mathbf{x}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{y} - \frac{1}{2}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{y} - \frac{1}{2}\mathbf{x},$$

$$\mathbf{k}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{k}, \quad \mathbf{k}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{k}.$$

Здесь переменные $\mathbf{k}_j$ и $\mathbf{x}_j$ ($\mathbf{p}_j$ и $\mathbf{y}_j$) являются сопряженными в смысле Фурье-преобразования. Тогда

$$\begin{aligned}\zeta_2 &\equiv k_2x_2(1-\langle\widehat{\mathbf{k}_2},\widehat{\mathbf{x}_2}\rangle)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}yk_2 + \frac{1}{2}k_2x\langle\widehat{\mathbf{y}},\widehat{\mathbf{x}}\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\langle\mathbf{k}_2,\mathbf{y}\rangle + \frac{1}{2}\langle\mathbf{k}_2,\mathbf{x}\rangle + O\left(x^2/y\right),\end{aligned} \tag{81}$$

$$\begin{aligned}\zeta_3 &\equiv k_3x_3(1-\langle\widehat{\mathbf{k}_3},\widehat{\mathbf{x}_3}\rangle)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}yk_3 - \frac{1}{2}k_3x\langle\widehat{\mathbf{y}},\widehat{\mathbf{x}}\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}\langle\mathbf{k}_3,\mathbf{y}\rangle + \frac{1}{2}\langle\mathbf{k}_3,\mathbf{x}\rangle + O\left(x^2/y\right).\end{aligned} \tag{82}$$

Отметим, что при условии (78) поправочные члены в уравнениях (81)–(82) ведут себя как $o(x)$.

Подставляя полученные выше соотношения в выражение (80), имеем

$$\begin{aligned}I_y = A_0 \int\limits_1^{(0+)} dt_2(-t_2)^{-i\eta_2-1}(1-t_2)^{i\eta_2}e^{it_2(\frac{\sqrt{3}}{2}yk_2+\frac{1}{2}\langle\mathbf{k}_2,\mathbf{x}\rangle)}\\ \times\int\limits_1^{(0+)} dt_3(-t_3)^{-i\eta_3-1}(1-t_3)^{i\eta_3}e^{it_3(\frac{\sqrt{3}}{2}yk_3+\frac{1}{2}\langle\mathbf{k}_3,\mathbf{x}\rangle)}\\ \times\int\limits_{\mathbf{S}^2} d\widehat{\mathbf{y}}e^{iy\langle\widehat{\mathbf{y}},\mathbf{p}+\frac{\sqrt{3}}{2}t_2\mathbf{k}_2-\frac{\sqrt{3}}{2}t_3\mathbf{k}_3}G(\widehat{\mathbf{y}},t_2,t_3),\end{aligned} \tag{83}$$

где $G(\widehat{\mathbf{y}},t_2,t_3) = g(\widehat{\mathbf{y}})e^{i/2(t_2k_2\langle\mathbf{x},\widehat{\mathbf{y}}\rangle-t_3k_3\langle\mathbf{x},\widehat{\mathbf{y}}\rangle)}$.

Заметим сразу, что основные вклады в интегралы по переменным t_2 и t_3 порождаются обходами особых точек $t_2 = 0$ и $t_3 = 0$. Эти обходы вносят основной вклад в интеграл (83). Отметим, что интегрирование по переменным t_2 и t_3 вне упомянутых областей ведет к дополнительной малости, связанной с интегрированием быстро осциллирующих функций с большим параметром y.

Введем параметр $\varepsilon = y^{-\delta}$, $0 < \delta < 1$, $\varepsilon \ll 1$, $\varepsilon y \gg 1$ и ограничим области изменения переменных t_2, t_3:

$$t_2 \in l_2^\varepsilon, \quad t_3 \in l_3^\varepsilon.$$

При этом контура l_j^ε, $j = 2, 3$ состоят из полуокружностей радиуса ρ_j

$$C_j^\varepsilon : \ \{t_j : \ t_j = \rho_j e^{i\varphi_j}; \ \ \rho_j = \varepsilon, \ \ \pi/2 < \varphi_j < 3\pi/2\}$$

и отрезков

$$l_j^{(+,\varepsilon)} : \ t_j \in [i\varepsilon, \varepsilon^{1/2} + i\varepsilon], \qquad l_j^{(-,\varepsilon)} : \ t_j \in [-i\varepsilon, \varepsilon^{1/2} - i\varepsilon].$$

В этом приближении исследуемое нами выражение (83) принимает вид:

$$I_y = I_y^{[1]} \left(1 + O(y^{-1+\delta})\right),$$

где

$$\begin{aligned} I_y^{[1]} = A_0 \int\limits_{l_2^\varepsilon} & dt_2 (-t_2)^{-i\eta_2 - 1} (1 - t_2)^{i\eta_2} e^{it_2(\frac{\sqrt{3}}{2} y k_2 + \frac{1}{2}\langle \mathbf{k}_2, \mathbf{x}\rangle)} \\ \times \int\limits_{l_3^\varepsilon} & dt_3 (-t_3)^{-i\eta_3 - 1} (1 - t_3)^{i\eta_3} e^{it_3(\frac{\sqrt{3}}{2} y k_3 + \frac{1}{2}\langle \mathbf{k}_3, \mathbf{x}\rangle)} \\ \times \int & d\widehat{\mathbf{y}} \exp\Big\{ iy\Big(p + \frac{\sqrt{3}}{2} t_2 k_2 \langle \widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\mathbf{k}}_2\rangle \\ & \qquad - \frac{\sqrt{3}}{2} t_3 k_3 \langle \widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\mathbf{k}}_3\rangle\Big) \langle \widehat{\mathbf{y}}, \widehat{\mathbf{p}}'\rangle \Big\} G(\widehat{\mathbf{y}}, t_2, t_3), \end{aligned} \tag{84}$$

где введено обозначение $\mathbf{p}' \equiv \mathbf{p} + \frac{\sqrt{3}}{2} t_2 \mathbf{k}_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} t_3 \mathbf{k}_3$.

Мы использовали здесь оценку

$$|\mathbf{p} + \frac{\sqrt{3}}{2} t_2 \mathbf{k}_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} t_3 \mathbf{k}_3| = p + \frac{\sqrt{3}}{2} t_2 k_2 \langle \widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\mathbf{k}}_2\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2} t_3 k_3 \langle \widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\mathbf{k}}_3\rangle + O(\varepsilon^2).$$

При этом интеграл по $d\widehat{\mathbf{y}}$ сводится к интегралу с быстро осциллирующей функцией

$$\begin{aligned} R_y^{[1]} = {} & g(\widehat{\mathbf{p}}) \frac{2\pi}{iyp} e^{iyp} e^{it_2 y \frac{\sqrt{3}}{2} k_2 \langle \widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\mathbf{k}}_2\rangle - it_3 y \frac{\sqrt{3}}{2} k_3 \langle \widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\mathbf{k}}_3\rangle} e^{i/2 \langle \mathbf{x}, \widehat{\mathbf{p}}\rangle (t_2 k_2 - t_3 k_3)} (1 + O(\varepsilon)) \\ & - g(-\widehat{\mathbf{p}}) \frac{2\pi}{iyp} e^{-iyp} e^{-it_2 y \frac{\sqrt{3}}{2} k_2 \langle \widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\mathbf{k}}_2\rangle + it_3 y \frac{\sqrt{3}}{2} k_3 \langle \widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\mathbf{k}}_3\rangle} e^{-i/2 \langle \mathbf{x}, \widehat{\mathbf{p}}\rangle (t_2 k_2 - t_3 k_3)} (1 + O(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Возвращаясь к выражению (84), получим соотношение

$$
\begin{aligned}
&I_y^{[1]} \sim A_0 g(\widehat{\mathbf{p}}) \frac{2\pi}{iyp} e^{iyp} \\
&\times \int\limits_{l_2^\varepsilon} dt_2 (-t_2)^{-i\eta_2 - 1} (1-t_2)^{i\eta_2} e^{it_2(\frac{\sqrt{3}}{2} y k_2 + \frac{1}{2} x k_2 \langle \widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{k}}_2 \rangle)} e^{it_2(\frac{\sqrt{3}}{2} y k_2 \langle \widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\mathbf{k}}_2 \rangle + \frac{1}{2} x k_2 \langle \widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{p}} \rangle)} \\
&\times \int\limits_{l_3^\varepsilon} dt_3 (-t_3)^{-i\eta_3 - 1} (1-t_3)^{i\eta_3} e^{it_3(\frac{\sqrt{3}}{2} y k_3 + \frac{1}{2} x k_3 \langle \widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{k}}_3 \rangle)} e^{it_3(-\frac{\sqrt{3}}{2} y k_3 \langle \widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\mathbf{k}}_3 \rangle - \frac{1}{2} x k_3 \langle \widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{p}} \rangle)} \\
&- A_0 g(-\widehat{\mathbf{p}}) \frac{2\pi}{iyp} e^{-iyp} \left\{ \widehat{\mathbf{p}} \to -\widehat{\mathbf{p}} \right\}.
\end{aligned} \tag{85}
$$

Перейдем от переменной t_2 к новой переменной $s_2 = yt_2$, от переменной t_3 к новой переменной $s_3 = yt_3$.

Тогда

$$
\begin{aligned}
I_y^{[1]} \sim A_0 g(\widehat{\mathbf{p}}) \frac{2\pi}{iyp} e^{iyp} &\int\limits_{l_2} \frac{ds_2}{y} \left(-\frac{s_2}{y} \right)^{-i\eta_2 - 1} \\
&\times \exp \left\{ is_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_2 (1 + \langle \widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\mathbf{k}}_2 \rangle) + \frac{1}{2} \frac{x}{y} k_2 (\langle \widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{k}}_2 \rangle + \langle \widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{p}} \rangle) \right) \right\} \\
&\times \int\limits_{l_3} \frac{ds_3}{y} \left(-\frac{s_3}{y} \right)^{-i\eta_3 - 1} \\
&\quad \times \exp \left\{ is_3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_3 (1 - \langle \widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\mathbf{k}}_3 \rangle) + \frac{1}{2} \frac{x}{y} k_3 (\langle \widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{k}}_3 \rangle - \langle \widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{p}} \rangle) \right) \right\} \\
&\qquad \times (1 + O(1/y)) - A_0 g(-\widehat{\mathbf{p}}) \frac{2\pi}{iyp} e^{-iyp} \{ \widehat{\mathbf{p}} \to -\widehat{\mathbf{p}} \}.
\end{aligned} \tag{86}
$$

Контуры l_2 и l_3 охватывают вещественную положительную полуось в комплексных плоскостях s_2 и s_3.

Мы воспользуемся здесь представлением Г-функции в виде контурного интеграла [20] 1.6.5:

$$
\Gamma(s) = \zeta^s (e^{2\pi i s} - 1)^{-1} \int\limits_{\infty e^{i\phi}}^{(0+)} t^{s-1} e^{-t\zeta} dt, \tag{87}
$$

$$-\frac{\pi}{2}-\phi<\arg\zeta<\frac{\pi}{2}-\phi,\quad \phi\leqslant\arg t\leqslant 2\pi+\phi,\quad s\neq 0,\pm1,\pm2,\ldots.$$

Контур интегрирования в представлении (87) при $\phi=0$ совпадает с контурами $l_{2(3)}$ в выражении (86). Преобразуя в соответствии с выражением (87) контурные интегралы в выражении (86), получаем

$$\begin{aligned} I_y^{[1]} &= A_0 g(\widehat{\mathbf{p}})\frac{2\pi}{iyp}e^{iyp}e^{i(\eta_2+\eta_3)\log y}\Gamma(-i\eta_2)\Gamma(-i\eta_3)\\ &\times e^{-\frac{\pi(\eta_2+\eta_3)}{2}}(1-e^{2\pi\eta_2})(1-e^{2\pi\eta_3})\\ &\times\left[\frac{\sqrt{3}}{2}k_2(1+\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_2\rangle)\right]^{i\eta_2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}k_3(1-\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_3\rangle)\right]^{i\eta_3}\\ &\times\left\{1+i\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{x}{y}\left(\eta_2\frac{\langle\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{k}}_2\rangle+\langle\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{p}}\rangle}{1+\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_2\rangle}+\eta_3\frac{\langle\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{k}}_3\rangle-\langle\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{p}}\rangle}{1-\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_3\rangle}\right)\right\}\\ &\times\left(1+O\left(\frac{1}{y^{2-2\delta_0}}\right)\right)-A_0 g(-\widehat{\mathbf{p}})\frac{2\pi}{iyp}e^{-iyp}\left\{\widehat{\mathbf{p}}\to-\widehat{\mathbf{p}}\right\}. \end{aligned}\tag{88}$$

Таким образом, поведение интеграла I_y (80) в старшем порядке описывается выражением (88).

Сформулируем окончательный результат:

$$\begin{aligned} \Psi^{\text{BBK}} \underset{y\to\infty}{\sim} & A_0(\mathbf{x},\mathbf{q})\delta(\widehat{\mathbf{y}},\widehat{\mathbf{p}})\frac{2\pi}{iyp}e^{iyp}e^{i(\eta_2+\eta_3)\log y}\Gamma(-i\eta_2)\Gamma(-i\eta_3)\\ &\times e^{-\frac{\pi(\eta_2+\eta_3)}{2}}(1-e^{2\pi\eta_2})(1-e^{2\pi\eta_3})\\ &\times\left[\frac{\sqrt{3}}{2}k_2(1+\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_2\rangle)\right]^{i\eta_2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}k_3(1-\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_3\rangle)\right]^{i\eta_3}\\ &\times\left\{1+i\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{x}{y}\left(\eta_2\frac{\langle\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{k}}_2\rangle+\langle\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{p}}\rangle}{1+\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_2\rangle}+\eta_3\frac{\langle\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{k}}_3\rangle-\langle\widehat{\mathbf{x}},\widehat{\mathbf{p}}\rangle}{1-\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_3\rangle}\right)\right\}\\ &\times\Big(1+O\Big(\frac{1}{y^{2-2\delta_0}}\Big)\Big)\\ &\qquad -A_0(\mathbf{x},\mathbf{q})\delta(\widehat{\mathbf{y}},-\widehat{\mathbf{p}})\frac{2\pi}{iyp}e^{-iyp}\left\{\widehat{\mathbf{p}}\to-\widehat{\mathbf{p}}\right\}. \end{aligned}$$

Таким образом мы описали асимптотику функции Ψ^{BBK} при $y\to\infty$ как обобщенную функцию по переменной $\widehat{\mathbf{y}}$.

Литература

1. В. С. Буслаев, С. П. Меркурьев, С. П. Саликов, Проблемы матем. физики, Ленингр. Университет, Ленинград, **183**, 9 (1979), сс.14-30
2. Д. Р. Яфаев, *Математическая теория рассеяния*, С.-Петербург, Издательство С.-Петербургского Университета, 1994.
3. Л. Д. Фаддеев, *Математические аспекты задачи трех тел в квантовой теории рассеяния.* — ЖЭТФ **12** (1961), 1014
4. В. С. Буслаев, С. П. Меркурьев, С. П. Саликов, *Граничные задачи математической физики и смежные вопросы в теории функций.* — 11. Зап. Научн. Сем. ЛОМИ 84 (1979), 16–22.
5. В. С. Буслаев, Н. А. Калитеевский. — ТМФ **70** (1987), 266–277.
6. M. Brauner, J. S. Briggs, H. Klar. — J.Phys.B **22** (1989), 2265–2287.
7. V. S. Buslaev, S. B. Levin, in: Selected topics in mathematical physics, - Amer.Math.Soc.Transl. (2) v.225 (2008), pp.55-71.
8. V. S. Buslaev, S. B. Levin, P. Neittaannmäki, T. Ojala. — J.Phys.A: Math.Theor. **43** (2010), 285205.
9. В. С. Буслаев, С. Б. Левин. — Алгебра и анализ, **22(3)** (2010), 60-79.
10. В. С. Буслаев, С. Б. Левин. — Функциональный анализ и его приложения, 46,в.2, (2012), с.83-89
11. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Гос. изд-во физ-мат. лит-ры, 1963.
12. В. С. Буслаев, *Сб.: Проблемы математической физики, (Спектральная теория и волновые процессы)*, **1**, с. 82–101, Изд-во Ленинградского Университета, Ленинград, 1966.
13. С. П. Меркурьев, Ядерная физика, **24** (1976), p.289
14. С. П. Меркурьев, Теор.Мат.Физ., **32** (1977), p.187
15. С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*, М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1985.
16. E. O. Alt, A. M. Mukhamedzhanov, JETP Lett., 56, 9 (1992), p.436
17. E. O. Alt, A. M. Mukhamedzhanov, Phys.Rev. A, 47 (1993), p.2004
18. G. Garibotti, J. E. Miraglia, Phys.Rev.A, 21 (1980), p.572
19. A. L. Godunov, Sh. D. Kunikeev, V. N. Mileev, V. S. Senashenko, (1983), Proc. 13th Int. Conf. on Physics of electronic and atomic collisions (Berlin), ed. J.Eichler (Amsterdam: Noth holland), Abstracts, p.380
20. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т.1, Наука, Москва, 1965.
21. M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, New York, 1965.
22. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Москва, 1959.

Levin S. B. On continuous spectrum eigenfunctions asymptotic behaviour at infinity in configuration space for the system of three three-dimensional like-charged quantum particles.

To our knowledge there are no complete results, even not strictly mathematically justified, related to the system of three and more quantum particles, interacting by Coulomb pair potentials, and expressed in terms of eigenfunctions. For the system of three such identical particles we suggest the asymptotic formulas describing the behaviour of eigenfunctions at infinity in configuration space.

С.-Петербургский Государственный университет,
Университетская наб.7/9, 199034
С.-Петербург, Россия,
E-mail: s.levin@spbu.ru

Поступило 31 октября 2016 г.