

Н. Я. Кирпичникова, М. М. Попов, Н. М. Семченко

**О КОРОТКОВОЛНОВОЙ ДИФРАКЦИИ НА  
ВЫТЯНУТОМ ТЕЛЕ. ЧИСЛЕННЫЕ  
ЭКСПЕРИМЕНТЫ.**

§1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья является продолжением работ [2, 7] и посвящена численному анализу формул, полученных в них. Кратко напомним их содержание.

Рассматривается дифракция плоской волны на строго выпуклом и вытянутом теле вращения (осесимметрическая задача) в коротковолновом приближении, т.е. когда геометрические характеристики рассеивателя много больше длины волны. Предполагается, что волновое поле удовлетворяет уравнению Гельмгольца и краевому условию Дирихле на поверхности тела. Полное волновое поле  $U$ , т.е. сумма падающей  $U^{\text{inc}}$  и отраженной  $U^{\text{dif}}$  волн,  $U = U^{\text{inc}} + U^{\text{dif}}$ , строится в окрестности границы свет-тень, т.е. в области В. А. Фока, являющейся зародышевой зоной для поля в окрестности предельных лучей и затененной части тела. Поверхность тела получается вращением достаточно гладкой выпуклой кривой  $x = f(z)$  вокруг оси  $z$ , при этом считается, что  $f'(0) = 0$  и  $f''(0) < 0$ . В осесимметрическом случае набегающую плоскую волну берем в виде  $U^{\text{inc}} = \exp(ikz)$ , где  $k$  волновое число, так что граница свет-тень совпадает с сечением поверхности тела плоскостью  $z = 0$ , которую назовем экватором. В окрестности поверхности тела используются следующие криволинейные координаты:  $s$  – длина дуги вдоль геодезических (меридианов), отсчитываемая от экватора так, что  $s < 0$  соответствует освещенной части, а  $s > 0$  затененной части поверхности,  $n$  – длина вдоль внешней нормали к рассеивателю,  $\varphi$  – азимутальный угол. В осесимметрической задаче отыскивается решение, независящее от  $\varphi$ . Это означает, что достаточно построить решение в сечении  $\varphi = 0$ . В соответствии с методом

---

*Ключевые слова:* дифракция коротких волн на вытянутом теле вращения, уравнение Леонтовича–Фока, лучевой метод, согласование локальных асимптотик.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), (грант 14-01-00535-А).

параболического уравнения решение отыскивается в виде  $U = e^{iks}W$ , где первый множитель описывает быстрые осцилляции волнового поля вдоль геодезических, а  $W(s, n; k)$  называется функцией ослабления. При этом специфика исходной трехмерной задачи содержится в той части оператора Гельмгольца, которая содержит коэффициент Ламе  $h_\varphi$  (в [2] она обозначена буквой  $B$ , см. там (1.7)):

$$BW = \frac{1}{h_\varphi} \left[ \frac{df}{ds} \frac{1}{h_s} \left( ikW + \frac{\partial W}{\partial s} \right) + \frac{\partial h_\varphi}{\partial n} \frac{\partial W}{\partial n} \right].$$

Мы не приводим явную формулу для части  $A$  оператора Гельмгольца из [2], поскольку она в точности совпадает с уравнением для поля в двумерной задаче дифракции на выпуклом контуре и оказывается более громоздкой.

Пограничный слой в рассматриваемом трехмерном случае представляет собой круговое кольцо в окрестности границы свет-тьень (экватора). В сечении его плоскостью  $\varphi = 0$  он определяется теми же масштабами, что и в случае классического метода параболического уравнения, т.е.  $k^{1/3}s = O(1)$  и  $k^{2/3}n = O(1)$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Существенной особенностью коротковолновой дифракции на вытянутых телах является появление второго большого параметра в пограничном слое, который характеризует как раз вытянутость тела вращения. А именно, пусть  $\rho_0$  есть радиус кривизны поверхности тела вдоль геодезических (меридиан) в точках экватора,  $\rho_0 = -(f''(0))^{-1}$ . Тогда большой параметр Фока  $M_0$  равен  $M_0 = (k\rho_0/2)^{1/3}$ , а вторым большим параметром является  $\Lambda_0 = \rho_0/f(0)$ , где  $f(0)$  есть радиус кривизны поверхности тела вдоль экватора. При этом в коротковолновом приближении считается, что  $k\rho_0 \gg 1$  и  $kf(0) \gg 1$ .

Решение возникающей задачи в этом пограничном слое строилось методом двух-масштабных разложений. Это означает, что при решении задачи оба параметра считаются независимыми, а приближенные формулы для расчета волнового поля получаются разными в зависимости от того, какое соотношение между  $M_0$  и  $\Lambda_0$  фиксируется.

В работе [2] было установлено, что параметр  $\Lambda_0$  входит в рекуррентную последовательность уравнений пограничного слоя в комбинации  $\frac{\Lambda_0}{2M_0^2}$  и ее положительных целочисленных степеней. Отсюда вытекают следующие ограничения на возможность применения погранслоя Фока к дифракции на вытянутых телах  $\Lambda_0 = 2M_0^{2-\varepsilon}$ , где  $\varepsilon$  положительное число из интервала  $0 < \varepsilon < 2$ . При  $\varepsilon = 2$  оказывается что

$\Lambda_0 = O(1)$  и, следовательно, оба радиуса кривизны мало отличаются друг от друга, так что рассеиватель не является в этом случае вытянутым. В случае же если  $\varepsilon = 0$ , большой параметр  $\Lambda_0$  компенсирует большой параметр Фока  $M_0$  и рекуррентная система уравнений погранслоя, во-первых, теряет асимптотический характер и, во-вторых, все уравнения этой системы приобретают сингулярность в коэффициентах, подробнее см. [7]. Применительно к эллипсоиду вращения это условие соответствует тому, что его большая полуось приблизительно в 30 раз больше малой полуоси, так что рассеиватель действительно сильно вытянутый. В этом случае мы предлагаем использовать другой пограничный слой в окрестности границы свет-тень [4], результаты см. в статье [11] настоящего сборника.

Параболическое уравнение Фока (точнее нестационарное уравнение типа Шрёдингера) замечательно тем, что переменные в нём разделяются. Поэтому В. А. Фоку удалось построить для этого уравнения точное решение возникающей задачи в явном аналитическом виде. Саму же задачу в области Фока следует квалифицировать, с математической точки зрения, как нестационарную задачу рассеяния для уравнения Шрёдингера, где роль времени играет безразмерная длина дуги вдоль геодезических.

Действительно, исходными данными для этой задачи являются лучевые формулы для падающей и отраженной волн в освещенной части зоны Фока, см. подробнее в [3]. При этом падающая волна есть точное решение уравнения во всей зоне Фока. Построение же отраженной волны в освещенной части области Фока сталкивается с той трудностью, что угол отражения близок к  $\pi/2$ . Предельные же лучи вообще касаются поверхности тела вращения в точках экватора. Далее задача состоит в том, чтобы продолжить это лучевое волновое поле во всю область Фока, включая и затененную её часть. Во втором разделе статьи мы решаем эту задачу рассеяния численными методами с целью сравнения результатов расчета с точным решением Фока. В случае сильно вытянутого тела в возникающем параболическом уравнении переменные не разделяются, см. [4]. Поэтому задачу о волновом поле в окрестности свет-тень приходится решать численными методами.

## §2. ИССЛЕДОВАНИЕ ТОКА В ОБЛАСТИ ФОКА

Током, в случае когда на поверхности рассеивателя задано краевое условие Дирихле, называют нормальную производную волнового поля,

вычисленную при  $n = 0$ , т.е. величину  $I_d = \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{n=0}$ . Следуя работе [1], мы будем далее оперировать с “безразмерным током”  $k^{-1}I_d$ , где  $k$  – волновое число.

В работе [1] была рассмотрена дифракция плоской волны на круге (двумерная задача) и на сфере (трехмерная задача) радиуса  $a$  при  $ka \gg 1$ . При этом вычислялась первая поправка к формулам Фока, дающим главный член асимптотики, и затем оба члена асимптотики сравнивались с точным решением этих задач, полученных численными методами (см. Приложение).

В наших расчетах мы берем такие значения большого параметра  $ka = k\rho_0$ , при которых в [1] было получено достаточно хорошее совпадение асимптотики Фока с точным решением, и исследуем влияние вклада в ток от слагаемого, содержащего параметр  $\Lambda_0$ . Напомним, что именно этот член появляется в 3D случае и характеризует степень вытянутости рассеивателя. Используемая нами формула для тока имеет вид:

$$k^{-1}I_d = \frac{1}{M_0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_L \frac{e^{i\sigma\xi}}{w_1(\xi)} d\xi - \frac{\Lambda_0}{2M_0^3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_L e^{i\sigma\xi} \left[ \frac{(w_1'(\xi))^2}{w_1^3(\xi)} - \frac{\xi}{w_1(\xi)} \right] d\xi, \quad (1)$$

где безразмерная координата  $\sigma = M_0 s / \rho_0$  описывает положение точки наблюдения на поверхности рассеивателя в области Фока,  $w_1(\xi)$  – функция Эйри в определении Фока, контур интегрирования  $L$  на комплексной плоскости  $\xi$  вдоль следующих лучей:  $\arg \xi = \frac{2\pi}{3}$ ,  $|\xi| \in (\infty, 0)$  и  $\arg \xi = 0$ ,  $\xi \in [0, \infty)$ . Подробный вывод этой формулы приведен в работе [2].

Первое слагаемое в (1) есть главная часть тока, полученная Фоком в двумерном случае. Второе слагаемое в (1) нуждается в некоторых комментариях. Если  $\rho'(0) = 0$ , что имеет место для сфероида, окружности и сферы, то первая поправка к формулам Фока порядка  $M_0^{-1}$  обращается в нуль, а следующая поправка уже имеет порядок  $M_0^{-2}$  (для тока это  $M_0^{-3}$ ). Поэтому в соотношении  $\Lambda_0 = 2M_0^{2-\varepsilon}$  величина  $\varepsilon$  должна быть строго меньше 2, чтобы второе слагаемое в (1) доминировало по сравнению со второй поправкой к формулам Фока. Расчеты выполнены для случая  $\rho'(0) = 0$ .

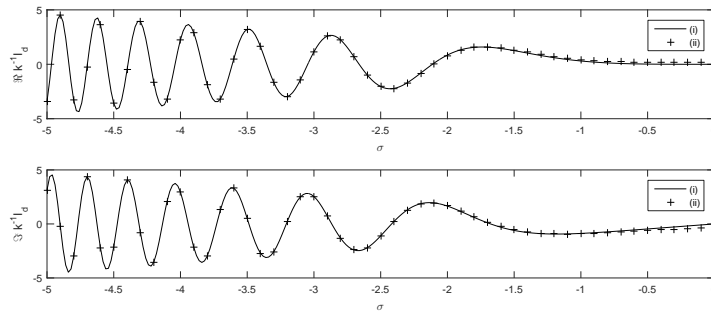


Рис. 1. Сравнение лучевого тока (i) с током по Фоку (ii). Здесь  $ka = 20$ .

Результаты расчетов тока приведены на рисунках 1, 2, 4. По горизонтальной оси отложены значения безразмерной длины дуги, а на вертикальной оси рисунков 1 и 2 отложены значения реальной и мнимой частей безразмерного тока.

Обратим внимание на рис. 1, где показано, что ток в зоне Фока с большой точностью совпадает с током, вычисленным по лучевому методу и продолженному нулем в затененной части. Напомним, что в лучевом методе ток на идеально отражающей границе равен удвоенному току, порождаемому падающей волной. В результате получаем элементарную формулу (8) для тока вместо интеграла по комплексному контуру в первом слагаемом формулы (1).

На рис. 2 продемонстрировано влияние второго слагаемого в (1) на ток для  $\epsilon = 0.1$  и  $\epsilon = 1.5$  соответственно. Результаты проведенных расчетов показывают, что поправка на вытянутость тела вращения оказывается столь малой, что она должна учитываться лишь в прецизионных вычислениях, если они необходимы. На рис. 4 показано, что относительная величина поправки на вытянутость (в процентах) возрастает вблизи экватора, где величина тока уже близка к нулю.

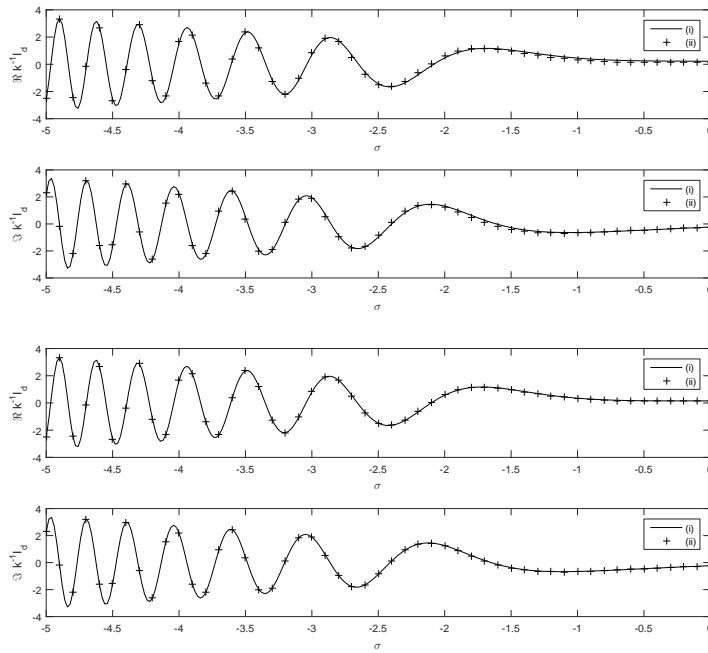


Рис. 2. Сравнение тока по формуле (1), (i), с током Фока, вычисленным только по первому слагаемому в (1), (ii), для разных значениях  $\varepsilon = 0.1, 1.5$ . Здесь  $ka = 50$ .

### §3. ЗАДАЧА ФОКА, КАК ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Остановимся на формулировке и результатах численного решения задачи Фока, как нестационарной задачи рассеяния для уравнения Шрёдингера.

В области Фока задача дифракции рассматривается в полуплоскости  $0 \leq \nu < +\infty$ ,  $-\infty < \sigma < +\infty$  во внутренних, растянутых, координатах пограничного слоя  $\nu = 2nM_0^2/\rho_0$ ,  $\sigma = sM_0/\rho_0$ . Само параболическое уравнение можно представить в традиционном для уравнения Шрёдингера виде  $i\frac{\partial W}{\partial \sigma} = HW$ , с гамильтонианом  $H = -\left(\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \nu\right)$ .

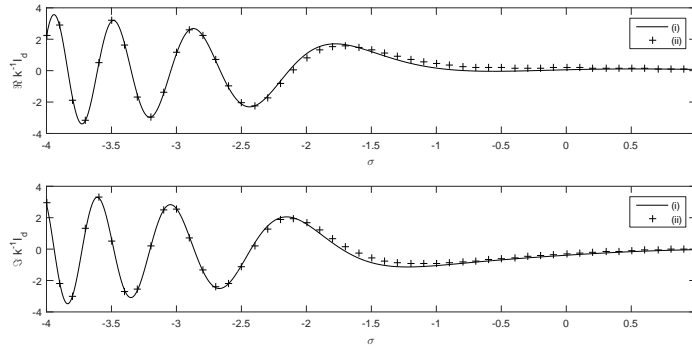


Рис. 3. Сравнение тока, вычисленного по численной схеме (4-7), (i) с током по Фоку из (1), (ii).

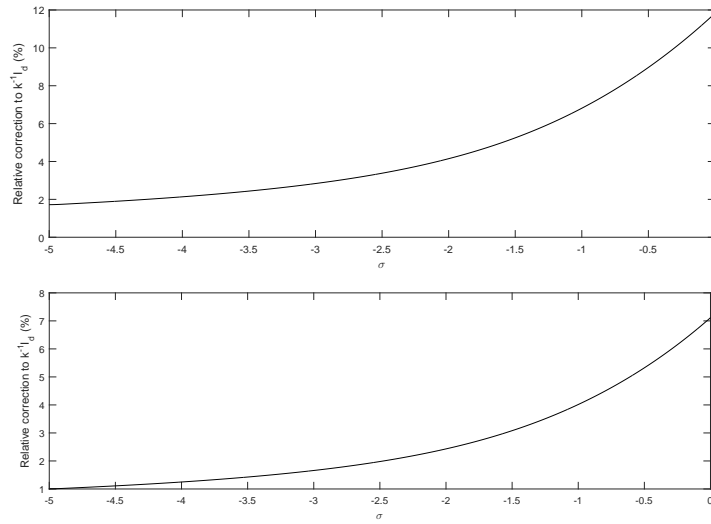


Рис. 4. Относительная поправка (по модулю) для тока по формуле (1). Взяты значения  $\varepsilon = 0.1, 1.5$ . Здесь  $ka = 50$ .

При  $\nu = 0$  краевое условие  $W|_{\nu=0} = 0$  следует из исходного условия Дирихле. Сложнее обстоит дело с условием при  $\nu \rightarrow +\infty$ .

При построении отраженной волны в методе параболического уравнения используется принцип предельного поглощения: при малой положительной мнимой части для волнового числа  $k$  решение параболического уравнения должно стремиться к нулю при  $\nu \rightarrow \infty$ . Отсюда следовал выбор функции Эйри  $w_1$ , и построенное решение описывало волну, уходящую от рассеивателя. Далее, оператор  $H$  на полуоси  $0 \leq \nu < +\infty$  с условием Дирихле при  $\nu = 0$  является самосопряженным в  $L_2$ , так что требование  $W \rightarrow 0$  при  $\nu \rightarrow \infty$  было бы естественным краевым условием. Однако падающая волна  $W^{\text{inc}} = \exp\{i(\sigma\nu - \frac{\sigma^3}{3})\}$  не принадлежит  $L_2$  в пограничном слое. Тем не менее при численном решении параболического уравнения приходится вводить краевые условия при больших  $\nu$ , и мы будем требовать, чтобы  $W = 0$  при  $\nu = \nu_*$  для больших  $\nu_*$ , что приведет, разумеется, к появлению отраженной волны. Как оказывается, ее влиянием в окрестности поверхности тела можно пренебречь при достаточно большом  $\nu_*$ . В монографии Фока, см. [10], было установлено, что при больших отрицательных  $\sigma$  отраженное поле  $W^{\text{ref}}$  совпадает с отраженной геометрической волной в погранслое Фока

$$W^{\text{ref}} = -\sqrt{\frac{|\sigma_*|}{\sqrt{\sigma^2 + 3\nu}}} \exp\left\{i\left(-\frac{5}{27}\sigma^3 - \frac{1}{3}\nu\sigma + \frac{4}{27}(\sigma^2 + 3\nu)^{3/2}\right)\right\}, \quad (2)$$

где  $\sigma_* = \frac{2}{3}\sigma - \frac{1}{3}\sqrt{\sigma^2 + 3\nu}$ . Параметр  $\sigma_*$  имеет смысл координаты точки отражения и является постоянной интегрирования в уравнении переноса вдоль индивидуального луча; на семействе отраженных лучей он описывается правой частью последней формулы для  $\sigma_*$ .

В работе [3] формула (2) получена в рамках лучевого метода, и из этого вывода следует, что она справедлива как в освещенной части погранслоя, так и в затененной его части выше предельного луча, т.е. всюду в области Фока, где есть отраженные лучи. Из (2) непосредственно следует также, что отраженная волна на предельном луче обращается в нуль и не имеет сингулярности в окрестности точки касания.

При  $\sigma \rightarrow -\infty$  и ограниченных  $\nu$  формулу (2) можно упростить, сохраняя главные члены от некоторых радикалов. Обозначая через  $W_{-\infty}^{\text{ref}}$  выражение для отраженной волны в этом случае, получаем



$$W_{-\infty}^{\text{ref}} = -\sqrt{\frac{2\sigma^2 + \nu}{2\sigma^2 + 3\nu}} \exp \left\{ i \left( -\nu\sigma - \frac{1}{3}\sigma^3 \right) \right\}. \quad (3)$$

Суммируя изложенное выше, задачу Фока для главного члена асимптотики  $W(\sigma, \nu)$  полного поля можно сформулировать следующим образом: в полуплоскости  $\nu > 0$ ,  $-\infty < \sigma < \infty$  построить решение уравнения типа Шрёдингера

$$i \frac{\partial W}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 W}{\partial \nu^2} + \nu W = 0, \quad (4)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$W|_{\nu=0} = 0, \quad W|_{\nu=\nu_*} = 0, \quad (5)$$

и асимптотическому условию

$$W \rightarrow W^{\text{inc}} + W_{-\infty}^{\text{ref}} \quad \text{при } \sigma \rightarrow -\infty. \quad (6)$$

При численном решении этой задачи условие (6) естественно заменялось условием Коши

$$W(\sigma_0, \nu) = W^{\text{inc}}(\sigma_0, \nu) + W_{-\infty}^{\text{ref}}(\sigma_0, \nu) \quad (7)$$

при этом значение  $\sigma_0 = -|\sigma_0|$  выбиралось методом проб и ошибок так, чтобы ток, вычисленный посредством разностных схем, с достаточной точностью совпадал с током  $k^{-1}I_d$ , порождаемым лучевыми формулами, т.е. с выражением:

$$k^{-1}I_d = \frac{2i\sigma}{M_0} \exp \left( -i \frac{\sigma^3}{3} \right). \quad (8)$$

Этим обеспечивается согласование условия Коши с асимптотикой (6).

Задача (4)–(7) на сетке решалась как с помощью разностной схемы, следуя работе [8], так и с помощью варианта метода Галеркина, описанного в работе [9]. При этом значения  $W(\sigma, \nu)$ , полученные обоими методами, совпадали в узлах сетки в пределах заданной погрешности.

Результаты расчетов представлены на рисунках 3 и 5. На рис. 3 показано совпадение безразмерных токов, вычисленных по разностным схемам и по формуле Фока, т.е. по первому слагаемому в формуле (1). На рис. 5 представлена визуализация модуля полного волнового поля в окрестности границы свет-тень, т.е. в области Фока, полученного в результате решения задачи рассеяния (4), (5), (7). Здесь по горизонтали отложены значения нормали  $\nu$ , по вертикали – значения

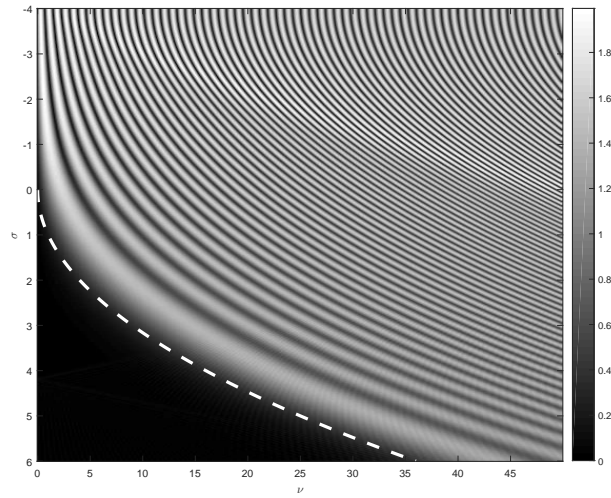


Рис. 5. Визуализация численного решения для  $|W(\sigma, \nu)|$ . Пунктиром изображен предельный луч.

безразмерной длины дуги  $\sigma$ . Предельный луч изображен пунктиром. На рисунке отчетливо видна интерференционная картина падающей и отраженной волн и эволюция её при приближении к предельному лучу. Подчеркнем, что полностью отсутствует волна, отраженная от мнимой границы в краевом условии (5). Это достигнуто путем надлежащего подбора параметров разностных схем. Ниже предельного луча образуется зона тени.

С математической точки зрения эта задача нуждается в существенных уточнениях, см. например, работы [5, 6] о волнах шепчущей галереи в окрестности точек уплощения границы, где теоретически исследовались и численно решались похожие задачи рассеяния для уравнений типа Шрёдингера.

#### §4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной целью проведенных вычислений было получение ответа на вопрос, как в задаче коротковолновой дифракции плоской волны

вытянутость выпуклого тела вращения влияет на волновое поле в зоне Фока в случае, когда применение классического метода параболического уравнения Леонтовича–Фока не встречает математических трудностей. Такая ситуация имеет место при следующем соотношении между большими параметрами  $\Lambda_0$  и  $M_0$ , характеризующими вытянутость тела:  $\Lambda_0 = 2M_0^{2-\varepsilon}$ ,  $0 < \varepsilon < 2$ . Чтобы получить ответ, мы обратились к работе [1], где прямыми вычислениями было показано, что метод параболического уравнения и точное решение задачи дифракции совпадают с большой точностью. Для наших расчетов мы использовали значения параметров из этой работы.

Параметр  $ka$  в [1], для которого вычислялось точное решение задач дифракции на круге и сфере радиусов  $a$ , принимал значения  $ka = 20, 30, 40, 50$ . При этом большой параметр Фока оказывался равным  $M_0 = 2, 15; 2, 47; 2, 72; 2, 92$ , соответственно. К сожалению, расчеты волнового поля для сферы в [1] вызывают сомнения, поскольку приведенные там формулы для падающей и отраженной волн ошибочны.

Результаты наших расчетов приводят к следующему выводу. Волновое поле в зоне Фока оказывается мало чувствительным к вытянутости тела вращения при всех допустимых значениях  $\varepsilon$  и использованных значений параметра  $M_0$ . Если относительная погрешность в несколько процентов приемлема в приложениях, то в формуле (1) для тока поправочным членом можно пренебречь. Отсюда следует, что этот результат имеет место и для волнового поля в окрестности предельных лучей, так как поле в зоне свет-тень полностью определяет поле в окрестности предельного луча.

Иными словами, в каждом сечении  $\varphi = \text{const}$  волновое поле в указанных областях практически оказывается таким же, как в плоской задаче дифракции на круге.

## §5. ПРИЛОЖЕНИЕ

В работе [2] построены три первых члена асимптотики в общем случае строго выпуклого и гладкого тела вращения, поэтому поправочный член, т.е. следующий за главным членом асимптотики из [1], может быть получен следующей редукцией из формул работы [2].

В случае дифракции на круге, следует положить  $\rho_0 = a$  и  $\rho'(0) = \rho''(0) = 0$ , параметр  $\Lambda_0 = 0$ , что соответствует условию  $f(0) = \infty$ , так что оператор  $B$  в [2] исчезает.

В случае дифракции плоской волны на сфере радиус кривизны  $\rho(s)$  вдоль меридианов постоянный  $\rho(s) \equiv \rho_0 = a$  и, очевидно,  $\Lambda_0 = 1$ , т.к.  $\rho_0 = f(0)$ . Задача является осесимметрической.

В обоих случаях первый поправочный член имеет порядок  $O(M_0^{-2})$ . Мы приводим формулы для поправочного члена в обозначениях статьи [2].

Разложение для падающего поля в обеих задачах, очевидно, одно и то же ввиду осесимметричности второй из них:

$$W_2^{\text{inc}}(\sigma, \nu) = \left(\frac{2}{\rho_0}\right)^{2/3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{i\sigma\xi} [P_2(\xi, \nu)v(\xi - \nu) + Q_2(\xi, \nu)v'(\xi - \nu)] d\xi \quad (9)$$

где полиномы  $P_2$  и  $Q_2$  имеют вид

$$\begin{aligned} P_2(\xi, \nu) &= -\frac{8\alpha}{5!}(\xi - \nu) - \frac{\nu\beta}{3!}, \\ Q_2(\xi, \nu) &= -\frac{2\alpha}{5!}(\xi - \nu)^2 - \frac{\nu(\xi - \nu)\beta}{3!}, \end{aligned} \quad (10)$$

причем оказывается, что  $\alpha = \beta = 1$  в рассматриваемых в [1] случаях<sup>1</sup>.

Более громоздкий вид имеет отраженная волна

$$\begin{aligned} W_2^{\text{ref}}(\sigma, \nu) &= \left(\frac{2}{\rho_0}\right)^{2/3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{i\sigma\xi} \left[ B_2(\xi)w_1(\xi - \nu) + P_2^{(1)}(\xi)\nu w_1(\xi - \nu) \right. \\ &\quad \left. + \left( Q_2^{(2)}(\xi)\nu^2 + Q_2^{(1)}(\xi)\nu + Q_2^{(0)}(\xi) \right) w_1'(\xi - \nu) \right] d\xi, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} B_2(\xi) &= -\frac{\xi^2}{60w_1^2(\xi)} + \frac{\xi v(\xi)}{15w_1(\xi)} + \frac{\Lambda_0 w_1'(\xi)}{2 w_1^3(\xi)}; \\ P_2^{(1)}(\xi) &= \frac{1}{10} \frac{v(\xi)}{w_1(\xi)}; \quad Q_2^{(2)}(\xi) = -\frac{3}{20} \frac{v(\xi)}{w_1(\xi)}; \\ Q_2^{(1)}(\xi) &= \frac{2\xi}{15} \frac{v(\xi)}{w_1(\xi)}; \quad Q_2^{(0)}(\xi) = \frac{\xi^2}{60} \frac{v(\xi)}{w_1(\xi)} - \frac{\Lambda_0}{2} \frac{1}{w_1^2(\xi)}. \end{aligned} \quad (12)$$

В приведенных формулах функции  $w_1(\xi)$  и  $v(\xi)$  есть функции Эйри в определении Фока.

<sup>1</sup>К сожалению, авторы [2] в формулах для этих полиномов допустили ошибки именно в приведенных в (10) двух слагаемых. Здесь они исправлены. Ошибки были допущены при оформлении рукописи, поэтому они не повлияли на последующие вычисления в [2].

В случае дифракции плоской волны на круге наши формулы в точности совпадают с формулами Иванова [1]. В случае же дифракции на сфере совпадения нет ни с падающей, ни с отраженной волнами. Здесь следует обратить внимание на следующий факт. Ввиду того, что эта задача осесимметрична, формула для падающей волны должна быть точно такая же, как и в двумерном случае дифракции на круге (или круговом цилиндре в ортогональном к оси сечении). Однако в цитируемой статье [1] это требование не выполняется. Поэтому нет совпадения и с дифрагированной волной.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Иванов, *Вычисление поправок к асимптотике Фока для волнового поля вблизи круглого цилиндра и сферы*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **104** (1981), 102–110.
2. Н. Я. Кирпичникова, М. М. Попов, *Метод параболического уравнения Леонтовича–Фока в задаче дифракции на вытянутых телах*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **409** (2012), 55–79.
3. Н. Я. Кирпичникова, М. М. Попов, *Сращивание асимптотик в освещенной части области Фока*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **426** (2014), 49–63.
4. N. Ya. Kirpichnikova, M. M. Popov, *Diffraction by strongly elongated bodies and matching of the asymptotics in illuminated part of the light-shadow boundary*, Proceedings of the International Conference “Days of Diffraction 2014” (2014), pp. 124–127.
5. М. М. Попов, *К задаче о волнах шепчущей галереи в окрестности простого нуля эффективной кривизны границы*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **62** (1976), 197–206.
6. М. М. Попов, *Корректность задачи о волнах шепчущей галереи в окрестности точек распрямления границы*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **89** (1979), 261–269.
7. М. М. Попов, Н. Я. Кирпичникова, *О проблемах применения параболического уравнения к дифракции на вытянутых телах*. — Акустический журнал **60**, No. 4 (2014), 365–372.
8. М. М. Попов, И. Пшенчик, *Численное решение задачи о волнах шепчущей галереи в окрестности простого нуля эффективной кривизны границы*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **62** (1976), 207–219.
9. R. D. Skeel, M. Berzins, *Method for the Spatial Discretization of Parabolic Equations in One Space Variable*, SIAM J. Sci. Statist. Comp. **11** (1990), 1–32.
10. В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн*, Советское радио, М., 1970.
11. М. М. Попов, Н. М. Семченко, Н. Я. Кирпичникова, *О коротковолновой дифракции на сильно вытянутом теле вращения*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **451** (2016), 156–177.

Kirpichnikova N. Ya., Popov M. M., Semtchenok N. M. On shortwave diffraction by elongated body. Numerical experiments.

The paper is a continuation of previous works of the authors dealing with the exploration of shortwave diffraction by smooth and strictly convex bodies of revolution (axisymmetric case). In these problems the boundary layer method contains two large parameters: one is the Fock parameter  $M$  and the second one  $\Lambda$  which characterizes the oblongness of the scatterer. It naturally generates a possibility to use the two scaled asymptotic expansion where both  $M$  and  $\Lambda$  are regarded as independent. The approximate formulae for the wave field in this situation depend on mutual strength between the large parameters and may vary. In the paper we carry out numerical experiments with our formulae, in the case when Fock analytical solution is in good coincidence with exact solution of a model problem, in order to examine influence of the parameter  $\Lambda$  on the wave field. It follows from our numerical experiments that the influence of the oblongness of the scatterer on the wave field is really insignificant if the method of Leontovich–Fock parabolick equation does not meet mathematical problems.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН,  
наб. р. Фонтанки, д. 27,  
191023 С.-Петербург, Россия

*E-mail:* mpopov@pdmi.ras.ru

*E-mail:* nkirp@pdmi.ras.ru

*E-mail:* semtchenok@gmail.com

Поступило 21 сентября 2016 г.