

М. Н. Демченко, Н. В. Филимоненкова

**РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ
КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ
(ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ)**

§1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается некорректная задача Коши для волнового уравнения в следующей постановке. Пусть функция $u(x, y, t)$, $x, t \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$, удовлетворяет волновому уравнению и краевому условию Дирихле:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u|_{y=0} = 0. \quad (1)$$

Требуется определить функцию u по значению нормальной производной $\partial u / \partial y$ на части границы $\{y = 0\}$. Мы приводим результаты применения регуляризующего алгоритма для такой задачи, предложенного в [5], в численных расчетах. Кроме того, приводится “аппаратная функция” алгоритма (определение и формула даны в п. 2).

Исследованию некорректной задачи Коши для гиперболических уравнений, а также связанных с ней задач интегральной геометрии, посвящено множество работ (в книгах [8, 9, 11] можно найти основные результаты). Первыми результатами были теорема Хольмгрена о единственности продолжения неаналитического решения через нехарактеристическую поверхность и результат Куранта (см. [10]) о единственности и конструктивном способе нахождения решения для случая ультрагиперболического уравнения. В работах [3, 15] рассматривался случай, когда данные Коши известны на всей пространственно-временной границе. В [3] получена формула обращения, показывающая устойчивость такой задачи. В работах [2, 6, 7, 12, 13] рассматривается случай распространения волн в ограниченной области. Среди

Ключевые слова: некорректная задача Коши, волновое уравнение, регуляризующий алгоритм.

Работа поддержана грантами РФФИ 15-31-20600-мол-а-вед и РФФИ 14-01-00535-а.

работ, посвященных численному решению задач продолжения волнового поля и определения источника, упомянем [4, 14], в которых применяется метод усеченного сингулярного разложения.

В работе [5] для определения $u(x_0, y_0, t_0)$, $y_0 > 0$, используются значения $\partial u / \partial y$ на множестве

$$U_{c,\varepsilon} = \left\{ (x, 0, t) \mid |x - x_0| \leq D \left(\sqrt{y_0^2 - (t - t_0)^2} \right) + \varepsilon, |t - t_0| \leq y_0 \right\}.$$

Здесь

$$D(z) = z \cdot \sqrt{\frac{c}{c + 2z}}, \quad z \geq 0,$$

c, ε – произвольные положительные числа. Множество $U_{c,\varepsilon}$ зависит от координат x_0, y_0, t_0 , а также от параметров c, ε . Это означает, что для нахождения $u(x_0, y_0, t_0)$ могут быть использованы данные Коши на разных подмножествах границы. Подобная неоднозначность имеет место во многих некорректных задачах, например, в задаче аналитического продолжения. Единственность решения рассматриваемой задачи (по крайней мере, для $u \in C^\infty$) следует (помимо работы [5]) из уже упомянутых теоремы Хольмгрена и результата Куранта. Отметим также, что $U_{c,\varepsilon}$ является подмножеством прямоугольника

$$\{(x, 0, t) \mid |x - x_0| \leq D(y_0) + \varepsilon, |t - t_0| \leq y_0\}, \quad (2)$$

который может быть сделан сколь угодно малым по оси x с помощью выбора достаточно малого c .

Основной результат, полученный в [5], выражается соотношением

$$u(x_0, y_0, t_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{U_{c,\varepsilon}} dx dt K_h(x - x_0, t - t_0) \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t), \quad (3)$$

в котором ядро K_h определяется следующим образом

$$K_h(x, t) = \frac{1}{2\pi^{3/2}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\sqrt{h(c+ix)}} \int_0^{\pi/2} ds \exp \left(-\frac{1}{4h(c+ix)} \left(x + i\sqrt{y_0^2 - t^2} \sin s \right)^2 \right) \right]$$

(ветвь корня $\sqrt{c+ix}$ выбирается так, что $\operatorname{Re}\sqrt{c+ix} > 0$).

В правой части соотношения (3) подинтегральная функция не зависит от ε . Более того, множество интегрирования можно заменить на более широкое, содержащее $U_{c,\varepsilon}$ при каком-либо $\varepsilon > 0$. Это верно

в силу того, что ядро $K_h(x - x_0, t - t_0)$ стремится к нулю при $h \rightarrow 0$, если $(x, t) \notin U_{c,0}$ (см. [5]).

§2. АППАРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

В данной работе мы применяем соотношение (3) для определения начальных данных u_0 в точке (x_0, y_0) в следующей начально-краевой задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \quad u|_{y=0} = 0, \\ u|_{t=t_0} &= u_0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=t_0} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь, как и в (1), $x, t \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$. Для приближенного вычисления значения $u_0(x_0, y_0) = u(x_0, y_0, t_0)$ достаточно вычислить интеграл в правой части (3) при некотором $h > 0$. Ввиду сказанного в конце п. 1 можно заменить множество интегрирования на прямоугольник

$$U = \{(x, 0, t) \mid |x - x_0| \leq b, |t - t_0| \leq y_0\}, \quad b > D(y_0), \quad (5)$$

(имеющий вид, аналогичный (2)) или на полосу

$$U_\infty := U_{c,\infty} = \{(x, 0, t) \mid x \in \mathbb{R}, |t - t_0| \leq y_0\},$$

так как эти множества содержат $U_{c,\varepsilon}$ для некоторого ε . Рассмотрим случай интегрирования по U_∞ (при этом интеграл конечен, если, например, начальные данные финитны). Всюду далее мы для простоты считаем, что $x_0 = t_0 = 0$. Поскольку значение данных Коши $\partial u / \partial y$ на границе определяются начальными данными u_0 , то интеграл от этих данных Коши, приближающий $u_0(x_0, y_0)$, является линейным функционалом от u_0 :

$$\int_{U_\infty} dx dt K_h(x, t) \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t) = \int_{\mathbb{R}} dx \int_0^{y_0} dy a_h(x, y) u_0(x, y), \quad (6)$$

$a_h(x, y)$ является обобщенной функцией, которую мы называем “аппаратной функцией”. Функция a_h сосредоточена в полосе $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq y \leq y_0$. Это следует из того, что данные Коши (а значит, и левая часть в (6)) зависят от значений u_0 только в этой полосе. В численном эксперименте мы будем приближенно находить $u_0(x_0, y_0)$ как интеграл в правой части (3), взятый по множеству U вида (5). Для него также можно определить аппаратную функцию, которая будет отлична от

a_h . Однако, a_h в этом случае может служить приближенной аппаратной функцией, по которой можно судить о разрешающей способности регуляризирующего алгоритма.

Из выкладок работы [5] можно извлечь следующее представление для a_h :

$$\begin{aligned} a_h(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{1/(4h)} d\mathcal{X} \frac{\cos(\mathcal{X}x)}{\sqrt{1-4h\mathcal{X}}} \int_0^\infty dl \sin(ly) l \left[G(k_1, \omega) e^{-hck_1^2} + G(k_2, \omega) e^{-hck_2^2} \right] \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\mathcal{X} \frac{\cos(\mathcal{X}x)}{\sqrt{1+4h\mathcal{X}}} \int_0^\infty dl \sin(ly) l \left[(F(k_3, \omega) - G(k_3, \omega)) e^{-hck_3^2} \right. \\ &\quad \left. + G(k_4, \omega) e^{-hck_4^2} \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

Здесь используются обозначения $\omega = \sqrt{\mathcal{X}^2 + l^2}$,

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4h\mathcal{X}}}{2h}, & k_2 &= \frac{1 + \sqrt{1 - 4h\mathcal{X}}}{2h}, \\ k_3 &= \frac{-1 + \sqrt{1 + 4h\mathcal{X}}}{2h}, & k_4 &= \frac{1 + \sqrt{1 + 4h\mathcal{X}}}{2h}, \end{aligned}$$

$$F(k, \omega) = \frac{\sin(y_0 \sqrt{\omega^2 - k^2})}{\pi \sqrt{\omega^2 - k^2}},$$

$$G(k, \omega) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-y_0}^{y_0} dt e^{i\omega t} \int_0^{\pi/2} ds e^{-k \sqrt{y_0^2 - t^2} \sin s}.$$

Оба интеграла по l в правой части (7) не являются абсолютно сходящимися. Подинтегральное выражение первого интеграла по l равно

$$\frac{1}{2\pi} \sin(ly) \sin(ly_0) (e^{-hck_1^2} + e^{-hck_2^2}) + O(l^{-1/2}), \quad l \rightarrow \infty.$$

Проинтегрировав по l старший член асимптотики, мы получим

$$\frac{1}{4} (e^{-hck_1^2} + e^{-hck_2^2}) \delta(y - y_0).$$

Интеграл от остатка дает функцию, неограниченную в окрестности точки $y = y_0$, которую можно оценить как $C(y_0 - y)^{-1/2}$. То же верно и для второго интеграла по l в правой части (7). Таким образом,

аппаратная функция является обобщенной и ее можно представить в следующем виде

$$a_h(x, y) = a_h^0(x) \delta(y - y_0) + a_h^1(x, y),$$

где

$$\begin{aligned} a_h^0(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{1/(4h)} d\mathcal{K} \frac{\cos(\mathcal{K}x)}{\sqrt{1-4h\mathcal{K}}} (e^{-hck_1^2} + e^{-hck_2^2}) \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\mathcal{K} \frac{\cos(\mathcal{K}x)}{\sqrt{1+4h\mathcal{K}}} (e^{-hck_3^2} + e^{-hck_4^2}), \end{aligned}$$

а функция $a_h^1(x, y)$ имеет особенность в окрестности прямой $y = y_0$ порядка $(y_0 - y)^{-1/2}$. Для функции a_h^0 можно выписать явную формулу. Мы сделаем это, связав a_h^0 с K_h :

$$a_h^0(x) = 2K_h(x, y_0). \quad (8)$$

Отсюда и из формулы для K_h следует, что

$$a_h^0(x) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi h}(c+ix)} \exp\left(-\frac{x^2}{4h(c+ix)}\right) \right].$$

Соотношение (8) можно вывести из формул для a_h^0 и K_h , однако, мы приведем более наглядный (хотя и не совсем строгий) вывод. Пусть начальные данные имеют вид

$$u_0(x, y) = f(x) \Theta(y - \sigma),$$

где $0 < \sigma < y_0$, то есть имеют разрыв на прямой $y = \sigma$ (Θ — функция Хевисайда). Сначала заметим, что в случае $f \equiv 1$ соответствующее решение начально-краевой задачи имеет вид

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2} (\Theta(y - \sigma + t) + \Theta(y - \sigma - t) - \Theta(-y - \sigma + t) - \Theta(-y - \sigma - t)).$$

В случае произвольной гладкой финитной функции $f(x)$ с помощью лучевого метода [1] решение можно представить в виде

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \frac{f(x)}{2} (\Theta(y - \sigma + t) + \Theta(y - \sigma - t) - \Theta(-y - \sigma + t) \\ &- \Theta(-y - \sigma - t)) + g(x, y, t), \end{aligned}$$

где функция $g(x, y, t)$ имеет ограниченные производные, которые могут быть разрывными на тех же характеристических поверхностях, на которых разрывны Θ -функции. Для данных Коши имеем

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t) = f(x) (\delta(-\sigma + t) + \delta(-\sigma - t)) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, 0, t),$$

причем $(\partial u / \partial y)(x, 0, t) = 0$ при $|t| < \sigma$. Если теперь устремить σ к y_0 , то интеграл в левой части (6) стремится к пределу

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx (K_h(x, y_0) + K_h(x, -y_0)) f(x) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx K_h(x, y_0) f(x)$$

(в последнем переходе мы воспользовались четностью функции K_h по t). В силу тождества (6) и произвольности функции $f(x)$ мы получаем (8).

§3. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В этом параграфе мы покажем результаты применения описанного выше регуляризующего алгоритма к задаче восстановления начальных данных u_0 в (4). В численных расчетах были выбраны следующие значения параметров $y_0 = 1$, $c = 0.5$, $h = 0.02$. Как и ранее, мы полагаем $x_0 = t_0 = 0$. Графики функций $a_h^0(x)$ и $a_h^1(x, y)$, отвечающих выбранным значениям y_0 , c и h , приведены на рис. 1, 2. На рис. 2 не показаны значения функции a_h^1 для y близких к 1, так как в этой области функция неограниченно растет.

В численном эксперименте были использованы начальные данные следующего вида

$$u_0(x, y) = p(x - x_c) q(y - y_c),$$

где p и q – квадратичные сплайны (рис. 3). Использовались различные значения смещений (x_c, y_c) ; при $x_c = 0$, $y_c = 1$ функция u_0 равна 1 в целевой точке $(x_0, y_0) = (0, 1)$. Для начальных данных описанного вида решалась начально-краевая задача (4) и вычислялись данные Коши $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0}$. Затем $u_0(0, 1)$ находилось приближенно как применение K_h к v :

$$u_0(0, 1) \approx \int_U dx dt K_h(x, t) \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t), \quad h = 0.02, \quad (9)$$

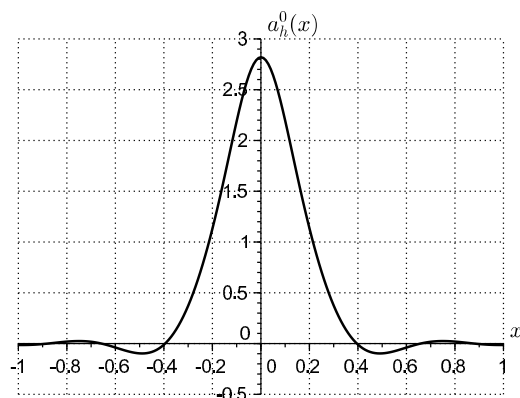


Рис. 1

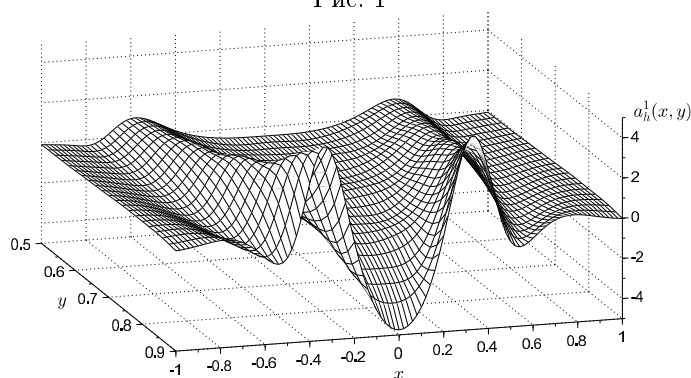


Рис. 2

где U определено в (5), $b = 0.6$ (условие $b > D(y_0)$ выполнено, так как при выбранных параметрах $D(y_0) = 1/\sqrt{5} \approx 0.45$).

На рис. 4 показана зависимость правой части (9) от смещения x_c при $y_c = 1$. На рис. 5 показана зависимость правой части (9) от смещения y_c при $x_c = 0$, а также результат применения аппаратной функции k (смещенным) начальным данным. Пологий вид графика на рис. 4 объясняется вытянутой формой носителя u_0 по оси x и низкой разрешающей способностью алгоритма по x при выбранном h , которую

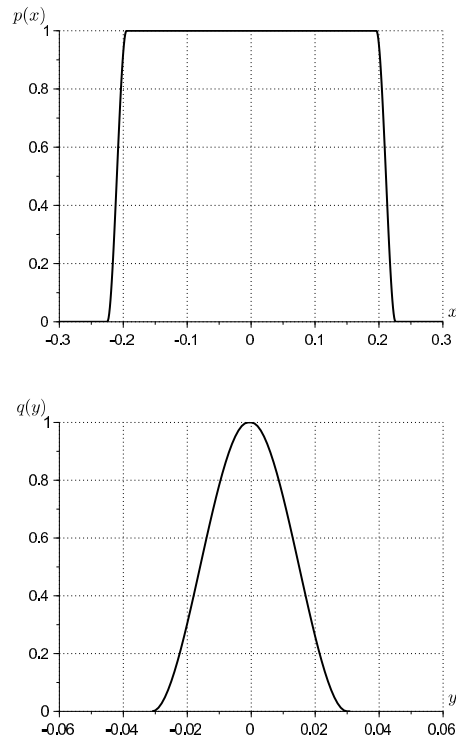


Рис. 3

можно заметить уже на графике аппаратной функции. Выбор сплайна p , столь вытянутого по сравнению со сплайном q , обусловлен как раз низкой разрешающей способностью по x – при выборе более локализованного сплайна вычисляемое приближенное значение $u_0(0, 1)$ при $x_c = 0$, $y_c = 1$ отличалось бы от истинного значения (единицы) более существенно, чем на графике 4.

Выбор меньших значений параметра h дает большую разрешающую способность алгоритма. С другой стороны, это приводит к увеличению ядра K_h , а значит, к увеличению “чувствительности” алгоритма к погрешностям в данных. При выбранных значениях параметров максимальное значение $|K_h|$ весьма велико (порядка 10^{10}). Однако,

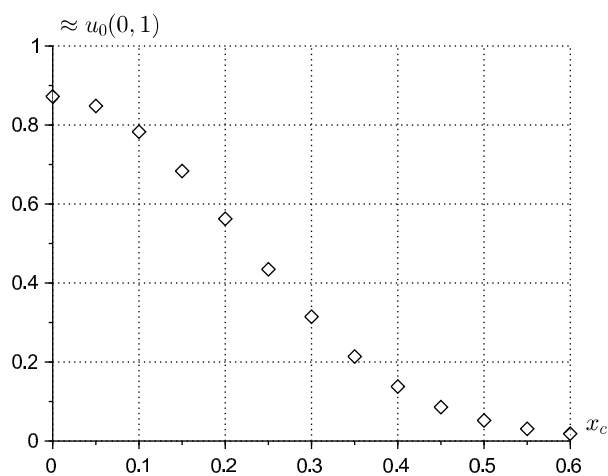


Рис. 4. приближенные значения $u_0(0,1)$, вычисленные для различных x_c ($y_c = 1$) с помощью (9).

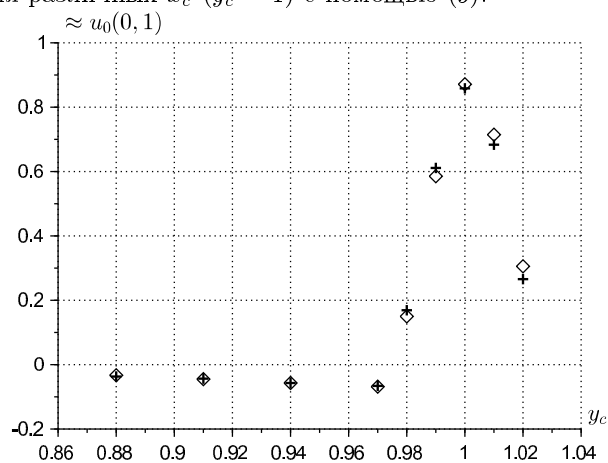


Рис. 5. приближенные значения $u_0(0,1)$, вычисленные для различных y_c ($x_c = 0$) с помощью (9) (\diamond) и с помощью аппаратной функции (+).

при некоторых ограничениях на u_0 столь большие значения K_h не дают вклад в интеграл в правой части (9). Например, если функция u_0

равна нулю в полосе $\{0 \leq y \leq L\}$ для некоторого $0 < L < 1$, то соответствующие данные Коши $\partial u / \partial y$ будут равны нулю при $|t| \leq L$. Это означает, что для оценки ядра K_h в (9) достаточно рассматривать его значения при $|t| > L$. В нашем случае при $L = 0.85$ ядро K_h можно оценить числом 350, а при $L = 0.8$ – числом 2300. Таким образом, устойчивость алгоритма зависит от геометрии носителя искомой функции u_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, И. А. Молотков, *Пространственно-временной лучевой метод: линейные и нелинейные волны*, Ленинград, Изд-во ЛГУ, 1985.
2. С. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, *Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary*. — SIAM J. Contr. Opt. **30** (1992), 1024–1065.
3. A. S. Blagoveshchensky, F. N. Podymaka, *On a Cauchy problem for the wave equation with data on a time-like hyperplane*, Proceedings of the International Conference DAYS on DIFFRACTION 2016, 31–34.
4. Т. А. Voronina, V. A. Tcheverda, V. V. Voronin, *Some properties of the inverse operator for a tsunami source recovery*. — Siberian Electronic Mathematical Reports **11** (2014), 532–547.
5. М. Н. Demchenko, *Regularization of an Ill-posed Cauchy Problem for the Wave Equation (Fourier Method)*, www.arxiv.org/abs/1609.05049, 2016.
6. David Finch, Sarah K. Patch, and Rakesh, *Determining a Function from Its Mean Values Over a Family of Spheres*. — SIAM J. Math. Anal. **35**, no. 5 (2004), 1213–1240.
7. Markus Haltmeier, *Universal Inversion Formulas for Recovering a Function from Spherical Means*, www.arxiv.org/abs/1206.3424v5, 2014.
8. V. Isakov, *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Appl. Math. Sciences, vol. 127, Springer, 2006.
9. С. И. Кабанихин, *Обратные и некорректные задачи*. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.
10. Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики, том II: Уравнения с частными производными*. Изд. Мир, Москва, 1964.
11. М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шишатский, *Некорректные задачи математической физики и анализа*. Наука, М., 1980.
12. А. С. Михайлов, В. С. Михайлов, *Уравнения метода Граничного Управления для обратной задачи об определении источника*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **409** (2012), 121–129.
13. F. Natterer, *Photo-acoustic inversion in convex domains*. — Inverse Probl. Imaging, **6**, no. 2 (2012), 1–6.
14. М. А. Шишленин, *Матричный метод в задачах определения источников колебаний*. — Сибирские электронные математические известия, **11** (2014), 161–171.

15. W. W. Symes, *A Trace Theorem for Solutions of the Wave Equation, and the Remote Determination of Acoustic Sources.* — Math. Meth. in the Appl. Sci., **5** (1983), 131–152.

Demchenko M. N., Filimonenkova N. V. Regularization of an ill-posed Cauchy problem for the wave equation (numerical experiment).

We discuss the results of numerical experiment of solving an ill-posed Cauchy problem for the wave equation. We give the instrumental function for the regularizing algorithm applied here and carry out the analysis of stability.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: demchenko@pdmi.ras.ru

Поступило 31 октября 2016 г.

Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого.
Политехническая ул. 29, 195251,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: nf33@yandex.ru