Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 451, 2016 г.

А. М. Будылин, С. В. Соколов

УРАВНЕНИЯ В СВЁРТКАХ НА РАСШИРЯЮЩЕМСЯ ИНТЕРВАЛЕ С СИМВОЛАМИ, ИМЕЮЩИМИ НУЛИ ИЛИ ПОЛЮСА НЕЦЕЛОГО СТЕПЕННОГО ПОРЯДКА

§1. Постановка задачи

Уравнениям в свёртках вида

$$\int_0^l A(x-t)f(t)dt = g(x)\,, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1.1}$$

посвящена обширная литература в связи с их приложениями в многочисленных задачах математической физики, теории связи, теории случайных матриц, квантовой статистической физики. Данное уравнение определяется символом a, под которым понимается образ Фурье функции A, в свою очередь определяющей ядро соответствующего оператора. Мы полагаем

$$a(\xi) = \int_{\mathbb{R}} A(x)\, e^{-ix\xi}\, dx\,.$$

Отметим, что с точки зрения теории псевдодифференциальных операторов под символом следовало бы понимать функцию $\sigma(x,\xi,y) = \theta(x)a(\xi)\theta(y)$, где $\theta = \chi_{[0,l]}$ – характеристическая функция интервала $[0,l]$. Символ σ мы будем называть полным.

Одним из наиболее интересных вопросов в связи с уравнением (1.1) является вопрос об асимптотическом поведении решений такого уравнения при $l \to \infty$.

Ключевые слова: квазиклассические асимптотики, сингулярные интегральные уравнения, метод Винера–Хопфа, альтернирующий метод Шварца.

Работа выполнена при поддержке гранта СПбГУ 11.38.263.2014.

Элементарная замена переменных приводит нас к эквивалентному уравнению

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-1}^{1} A\Big(\frac{x-t}{\varepsilon}\Big) f(t)\,dt = g(x)\,, \quad x\in[-1,1]\,, \tag{1.2}$$

с малым параметром $\varepsilon = l^{-1}$ и, естественно, переопределёнными функциями f и g. Вопросам асимптотического при $\varepsilon\to 0$ обращения оператора $\mathcal{A}$

$$(\mathcal{A}f)(x) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-1}^{1} A\Big(\frac{x-t}{\varepsilon}\Big) f(t)\,dt$$

(и некоторых его обобщений) был посвящён цикл работ [2, 4–6], в которых предполагалось, что символ $\sigma(x,\xi,y) = \theta(x)a(\varepsilon\xi)\theta(y)$ $(\theta = \chi_{[-1,1]})$ оператора $\mathcal{A}$ может иметь скачок по переменной ξ (но нигде не обращается в ноль). Следует заметить, что в случае гладкости символа по ξ ядро оператора $\mathcal{A}$ относится к короткодействующим (т.е. убывающим на бесконечности быстрее кулоновского), для которых возможно использовать идеи локализации. Наличие скачка превращает оператор $\mathcal{A}$ в дальнодействующий, концы интервала начинают нетривиально взаимодействовать, что препятствует использованию стандартных методов сшивания асимптотических представлений. Для учёта взаимодействия концов интервала в упомянутых выше работах был использован альтернирующий метод Шварца, который позволял выделить модельную задачу и реализовать стандартную схему возмущений.

В данной работе будет рассмотрен случай символа оператора $\mathcal{A}$, имеющего нули или полюсы нецелого степенного порядка. Априори ясно, что асимптотика решений зависит от аналитического характера нулей (полюсов) символа. В данной работе мы остановимся на случае символа вида

$$a(\xi) = b(\xi)\prod_{k=1}^{n} |\xi-\xi_k|^{\alpha_k}\,, \tag{1.3}$$

где b – гладкая функция на оси со степенным поведением на бесконечности

$$b(\xi)\sim b_0|\xi|^{\beta} \quad \text{при} \quad \xi\to\infty \tag{1.4}$$

и

$$-1 < \alpha_k < 1 \quad (\forall k)\,, \qquad \beta = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\,. \tag{1.5}$$

Наконец, желая ограничиться лишь описанными особенностями символа, мы будем предполагать, что гладкая на замкнутой вещественной оси функция

$$c(\xi) = b(\xi)(1+\xi^2)^{-\beta/2}$$

имеет нулевой индекс.

Отметим, что особенности символа (в случае отрицательных показателей α_k), описанные соотношениями вида (1.3), (1.4), (1.5), известны в теории тёплицевых детерминантов как сингулярности Фишера–Хартвига, см., например, [1,3]. Подчеркнём, однако, что данная задача не является непрерывным аналогом для упомянутой задачи в теории тёплицевых операторов. Дело в том, что в настоящей работе акцент делается не на вычислении асимптотик функционалов от рассматриваемого оператора, а на асимптотическом обращении самого оператора. В случае разрывных символов, символ резольвенты также является разрывным и асимптотика обратного оператора может быть модифицирована в асимптотику резольвенты с последующим приложением к вычислению функционалов. В данном случае символ резольвенты рассматриваемого оператора уже не будет иметь структуры (1.3), по крайней мере при наличии положительных показателей α_k. Вместе с тем, в случае отрицательных показателей α_k, техника, развитая в настоящей работе, допускает модификацию и для изучения резольвенты и, как следствие, для вычисления асимптотик функционалов, однако это тема для отдельных исследований.

Данная работа развивает подход, намеченный в [7], где был рассмотрен специальный случай символа

$$a(\xi) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\nu + \sqrt{1-\xi^2}}\,, \quad \nu \neq 0\,,$$

нули которого, однако, имеют аналитический характер (точки ветвления), что существенно отличает его от рассматриваемого в данной работе. Это приведёт нас к совершенно иной модельной задаче.

Следует заметить, что даже когда ядро A рассматриваемого оператора является близкодействующим (случай положительных степеней α_k), данная асимптотическая задача не является тривиальной, поскольку взаимодействие концов интервала контролируется в значительной степени оператором с полным символом

$$\sigma_1(x,\xi,y) = \theta(x)[a(\varepsilon\xi)]^{-1}\theta(y),$$

а следовательно – дальнодействующим.

В настоящей работе, по-видимому впервые, предлагается прямой подход к асимптотическому исследованию обратного оператора для оператора свёртки на конечном интервале с особенностями степенного характера (1.3), основанный на известных свойствах сингулярного интеграла Гильберта в L_2-пространствах со степенными весами, см., например, [8, 9].

Альтернирующий метод Шварца и в данном случае ведёт к выделению модельной задачи (уже не содержащей малого параметра), вычленение которой позволяет реализовать метод возмущений. Как следствие, в данной работе построено полное в степенных порядках (но не степенное) разложение обратного оператора к оператору (1.2) в подходящем пространстве функций.

Следует также подчеркнуть, что интуитивная близость исходной задачи к уравнению Винера–Хопфа

$$\int\limits_0^\infty A(x-t)f(t)dt = g(x)\,, \qquad x \geqslant 0\,, \tag{1.6}$$

является обманчивой и может лишь усложнить асимптотический анализ. Решение уравнения (1.6) не приводит к старшему члену асимптотики уравнения (1.1) именно в силу дальнодействия оператора с символом $\sigma_1(x,\xi,y)$.

Опишем кратко план дальнейшего изложения. В следующем разделе мы опишем пространства с весами в двойственном представлении, в которых естественно рассматривать поставленную задачу обращения оператора и опишем достигнутый результат. Последний раздел, разбитый на несколько подразделов, посвящен доказательству теоремы. С использованием формулы Козака задача обращения будет "посажена" на внешность интервала, в результате чего станет возможным развить альтернирующую схему Шварца для выделения модельной задачи. Необходимые положения альтернирующей схемы описаны в отдельном разделе. Степенные разложения операторов отражения и метод итераций завершат доказательство.

§2. Определение пространств и формурировка результата

Итак, нас будет интересовать асимптотика при $\varepsilon \to 0$ обратного оператора к оператору $\mathcal{A}$:

$$(\mathcal{A}f)(x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{1} A\Big(\frac{x-t}{\varepsilon}\Big)f(t)dt = g(x)\,, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2.1}$$

где символ $a(\xi)$ ядра A определён соотношениями (1.3), (1.4), (1.5).

Для дальнейшего мы определим оператор A как оператор с ядром $\frac{1}{\varepsilon}A(\frac{x-t}{\varepsilon})$ на оси, т.е.

$$(Af)(x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} A\Big(\frac{x-t}{\varepsilon}\Big)f(t)dt\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Тогда оператор в левой части равенства (2.1) запишется как $\theta A\theta$, где θ – оператор умножения на характеристическую функцию $\theta(x)$ интервала $[-1,1]$. Допуская известную вольность, мы будем обозначать обратный к оператору $\mathcal{A} = \theta A\theta$, как к оператору на пространстве функций, определённых на интервале $[-1,1]$, через $(\theta A\theta)^{-1}\theta$.

Введём далее оператор $\boldsymbol{a}$ умножения на функцию $a(\varepsilon\xi)$ и оператор T умножения на функцию $e^{i\xi}$. Введём также операторы p, q проецирования на функции, допускающие аналитическое продолжение, соответственно, в верхнюю и нижнюю комплексные полуплоскости. Напомним, что ядра этих операторов могут быть описаны при помощи обобщённых функций

$$p \sim \frac{-1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\xi-\eta+i0}\,, \quad q \sim \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\xi-\eta-i0}\,.$$

Операторы p и q можно трактовать как Фурье-образы операторов Q и P умножения на характеристические функции $Q(x)$ и $P(x)$ полуосей $(-\infty,0)$ и $(0,\infty)$ соответственно.

Напомним, что сингулярный оператор $s = p - q$ ограничен и ограниченно обратим в пространствах квадратично интегрируемых функций с весами вида

$$|1+\xi^2|^{\alpha/2}\prod|\xi-\xi_k|^{\alpha_k}$$

(здесь и далее $k = 1, \dots n$) при условии

$$-1 < \alpha_k < 1\,, \quad -1 < \alpha + \sum \alpha_k < 1\,,$$

см. [8, 9]. Фурье-образ оператора A примет вид

$$\frac{1}{4}(T^{-1}sT - TsT^{-1})\boldsymbol{a}(T^{-1}sT - TsT^{-1})$$

и, как следствие, действует как ограниченный оператор из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(\rho)$, где через $L_2(\rho)$ обозначено пространство квадратично интегрируемых функций с весом $\rho = \rho(\varepsilon\xi)$, где

$$\rho(\xi) = (1 + \xi^2)^{-\beta/2} \prod |\xi - \xi_k|^{-\alpha_k}\,.$$

Обозначим через $H(\rho)$ пространство функций на интервале $[-1, 1]$, Фурье-образы которых лежат в $L_2(\rho)$. Для определённости, мы рассмотрим построение асимптотики обратного к $\mathcal{A}$ оператора как оператора $\mathcal{A}^{-1} : H(\rho) \to L_2([-1, 1])$. Само существование асимптотического обратного связано с разрешимостью модельной задачи, которая будет выделена в ходе дальнейших построений.

Модельная задача представляет собой систему однотипных интегральных уравнений вида

$$\varphi(x) - b_k \int\limits_1^\infty e^{i\frac{\xi_k}{\varepsilon}(x-y)}\,\frac{\varphi(y)}{x-y}\ln\frac{x+1}{y+1}\,dy = \psi(x)\,, \quad x > 1\,, \tag{2.2}$$

где параметры b_k зависят от показателей α_k, причём

$$|b_k| = 4\sin^2\frac{\pi\alpha_k}{2}\,. \tag{2.3}$$

Уравнение (2.2) – уравнение Фредгольма второго рода с гладким интегральным ядром, однако его разрешимость должна рассматриваться в пространстве функций $P_+H(\sqrt{\rho})$, где P_+ – оператор умножения на характеристическую функцию полуоси $(1, +\infty)$.

Как станет ясно в дальнейшем, ограниченность интегрального оператора (2.2) является как раз следствием ограниченности сингулярного интеграла Гильберта в пространстве квадратично интегрируемых функций со степенным весом. Разрешимость данных уравнений является отдельной аналитической задачей и не рассматривается в настоящей короткой публикации, посвященной именно асимптотическим вопросам. Отметим здесь лишь очевидный факт разрешимости уравнений (2.2) при достаточно малых b_k, что в виду (2.3) эквивалентно малости показателей α_k.

Мы назовём набор α_k *регулярным*, если уравнения (2.2) разрешимы. Как результат, будет доказана

Теорема 2.1. *Пусть символ оператора* (1.2) *удовлетворяет условиям* (1.3), (1.4), (1.5) *и набор показателей* α_k *регулярен. Тогда при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *оператор* (1.2) *обратим как оператор*

$$L_2([-1,1]) \to H(\rho)$$

и обратный оператор допускает асимптотическое разложение вида

$$\mathcal{A}^{-1} = \theta(A^{-1} - K\sum_{j\geqslant 0}\Phi_j\varepsilon^j N)\theta + O(\varepsilon^\infty)\,, \quad \Phi_j = \sum_{k,m=1}^{n} T_k\Psi_{jkm}T_m^*\,, \tag{2.4}$$

где K *и* N *– операторы свёртки с ядрами вида* $\frac{1}{\varepsilon}K\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)$, $\frac{1}{\varepsilon}N\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)$, Ψ_{jkm} *– интегральные операторы, не зависящие от* ε, *а* T_k *– операторы умножения на* $\exp(i\frac{\xi_k}{\varepsilon}x)$. *Более точно операторы* K, N *и* Ψ_{jkm} *определяются равенствами* (3.2), (3.8), (3.11), (3.13).

Отметим, что наличие операторов типа K и N в асимптотике обратного является характерным для задач с дальнодействием, см. также [2, 4, 5]. Они описывают так называемые эффекты пограничного слоя.

Следующие раздел посвящен доказательству теоремы.

§3. Доказательство теоремы

3.1. Формула Козака. Прежде чем воспользоваться альтернирующим методом Шварца, удобно переписать обратный к A оператор в виде

$$(\theta A\theta)^{-1}\theta = \theta A^{-1}\theta - \theta A^{-1}(\theta' A^{-1}\theta')^{-1}\theta' A^{-1}\theta\,, \tag{3.1}$$

где $\theta' = I - \theta$. Это хорошо известная в проекционных методах формула Козака, см., например, [10].

Оператор A^{-1} определен как ограниченный из $H(\rho)$ в $L_2(\mathbb{R})$. Используя метод Шварца мы найдём условия, при которых для малых ε оператор $(\theta' A^{-1}\theta')^{-1}\theta'$ существует и ограничен как оператор из $L_2(\mathbb{R})$ в $H(\rho)$ и найдём его асимптотическое разложение.

3.2. Аналитическая факторизация символа. Опишем аналитическую факторизацию функции $a(\xi)$:

$$a(\xi) = a_+(\xi)a_-(\xi)\,,$$

где $a_\pm$ - функции, аналитические соответственно в $\mathbb{C}_\pm$.

Введём семейство функций ξ^γ , $|\gamma| < 1$, определённое на плоскости с разрезом по положительной полуоси. При этом считаем

$$(\xi + i0)^\gamma \begin{cases} |\xi|^\gamma\,, & \xi > 0\,, \\ |\xi|^\gamma e^{\pi i\gamma}\,, & \xi < 0\,, \end{cases} \quad \text{и} \quad (\xi - i0)^\gamma \begin{cases} |\xi|^\gamma e^{2\pi i\gamma}\,, & \xi > 0\,, \\ |\xi|^\gamma e^{\pi i\gamma}\,, & \xi < 0\,. \end{cases}$$

Тогда равенство

$$|\xi|^\gamma = e^{-\pi i\gamma}(\xi + i0)^{\gamma/2}(\xi - i0)^{\gamma/2}$$

определяет аналитическую факторизацию функции, стоящей в его левой части. Подвергнем аналогичной факторизации каждый множитель $|\xi - \xi_k|^{\alpha_k}$ в символе $a(\xi)$.

Введём, далее, функцию $(\xi - i)^{\beta/2}$ как функцию на плоскости с разрезом $[i, i\infty)$ и асимптотикой $|\xi|^{\beta/2}$ при $\xi \to +\infty$, а функцию $(\xi + i)^{\beta/2}$ – как функцию на плоскости с разрезом $[-i, -i\infty)$ и также асимптотикой $|\xi|^{\beta/2}$ при $\xi \to +\infty$.

Тогда множитель $b(\xi)$ в символе $a(\xi)$ запишется в виде

$$b(\xi) = (\xi + i)^{\beta/2}(\xi - i)^{\beta/2}c(\xi)\,.$$

В связи с принятыми ограничениями, функция c допускает стандартную аналитическую факторизацию

$$c(\xi) = c_+(\xi)c_-(\xi)\,.$$

Как следствие, с точностью до несущественных множителей, будем иметь

$$a_+(\xi) = c_+(\xi)(\xi + i)^{\beta/2}\prod(\xi - \xi_k + i0)^{\alpha_k/2}\,,$$
$$a_-(\xi) = c_-(\xi)(\xi - i)^{\beta/2}\prod(\xi - \xi_k - i0)^{\alpha_k/2}\,.$$

Введём операторы умножения на функции $a_\pm(\varepsilon\xi)$, обозначив их соответственно $\boldsymbol{a}_\pm$. Эти операторы можно трактовать как Фурье-образы операторов $A_\pm$ свёртки на оси с символами $a_\pm(\varepsilon\xi)$.

Следующие аналитические соотношения обычно называются свойствами треугольности операторов $\boldsymbol{a}_\pm$:

$$p\boldsymbol{a}_- q = 0\,, \quad q\boldsymbol{a}_+ p = 0\,.$$

Фурье-прообразы этих соотношений принимают вид

$$QA_-P = 0\,, \quad PA_+Q = 0\,.$$

Обратные операторы $\boldsymbol{a}_\pm^{-1}$ также являются треугольными, при этом соотношения

$$p\boldsymbol{a}_-^{-1}q = 0\,, \quad q\boldsymbol{a}_+^{-1}p = 0\,, \quad QA_-^{-1}P = 0\,, \quad PA_+^{-1}Q = 0$$

остаются верными в случаях трактовки данных операторов как ограниченных, т.е. при соответствующем распределении весовых функций.

Положим $\theta' = P_+ + P_-$, где P_+ – оператор умножения на характеристическую функцию полуоси $(1,\infty)$ и P_- – оператор умножения на характеристическую функцию полуоси $(-\infty,-1)$. В силу инвариантности оператора свертки относительно сдвига имеем также

$$\begin{aligned} &(I-P_+)A_-^{\pm 1}P_+ = 0\,, \qquad && P_-A_-^{\pm 1}(I-P_-) = 0\,,\\ &(I-P_-)A_+^{\pm 1}P_- = 0\,, && P_+A_+^{\pm 1}(I-P_+) = 0\,. \end{aligned}$$

Введём дополнительно весовую функцию $\sqrt{\rho} = \sqrt{\rho}(\varepsilon\xi)$, где, естественно,

$$\sqrt{\rho}(\xi) = |\xi - i|^{-\beta/2}\prod|\xi-\xi_k|^{-\alpha_k/2}\,.$$

Из выписанных выше соотношений треугольности легко заключаем, что операторы

$$\begin{aligned} U &= \sum P_\alpha A_\alpha P_\alpha \;:\quad \theta' L_2(\mathbb{R}) \to \theta' H(\sqrt{\rho})\,,\\ V &= \sum P_\alpha A_{\alpha'} P_\alpha \;:\quad \theta' H(\sqrt{\rho}) \to \theta' H(\rho)\,, \quad \alpha = +,-\,, \quad \alpha' \neq \alpha\,, \end{aligned}$$

обратимы и

$$U^{-1} = \sum P_\alpha A_\alpha^{-1} P_\alpha\,, \quad V^{-1} = \sum P_\alpha A_{\alpha'}^{-1} P_\alpha\,, \quad \alpha = +,-\,, \quad \alpha' \neq \alpha\,.$$

Рассмотрим оператор

$$L = U(\theta' A^{-1}\theta')V = \theta' + P_+A_+A_-^{-1}P_- + P_-A_-A_+^{-1}P_+ \;: \\ \theta' H(\sqrt{\rho}) \to \theta' H(\sqrt{\rho})\,.$$

При этом $\theta' A^{-1}\theta' = U^{-1}LV^{-1}$ и

$$(\theta' A^{-1}\theta')^{-1}\theta' = VL^{-1}U\,.$$

Отметим, что в силу свойств треугольности операторов $\boldsymbol{a}_\pm$ формула (3.1) примет вид

$$(\theta A\theta)^{-1}\theta = \theta A^{-1}\theta - \theta A^{-1}\sum_\alpha A_{\alpha'}P_\alpha L^{-1}\sum_\gamma P_\gamma A_\gamma A^{-1}P\,, \quad \alpha' \neq \alpha\,. \tag{3.2}$$

Задача свелась к асимптотическому обращению оператора L.

3.3. Альтернирующий метод Шварца для оператора L^{-1}. Оператор

$$L = \theta' + P_+A_+A_-^{-1}P_- + P_-A_-A_+^{-1}P_+\,.$$

в пространстве $\theta' H(\sqrt{\rho})$ имеет вид $I - G_+ - G_-$, где

$$G_+ = -P_+A_+A_-^{-1}P_-\,, \quad G_- = -P_-A_-A_+^{-1}P_+\,.$$

Ясно, что

$$(I - G_+)^{-1} = I - P_+A_+A_-^{-1}P_-\,, \quad (I - G_-)^{-1} = I - P_-A_-A_+^{-1}P_+\,.$$

Положим

$$I - \Gamma_+ = (I - G_+)^{-1}\,, \quad I - \Gamma_- = (I - G_-)^{-1}\,,$$

так что

$$\Gamma_+ = P_+A_+A_-^{-1}P_-\,, \qquad \Gamma_- = P_-A_-A_+^{-1}P_+\,.$$

Операторы $\Gamma_+\,, \Gamma_-$ носят название операторов отражения.

Тогда согласно альтернирующему методу Шварца, см. [2,6],

$$(I - G_+ - G_-)^{-1} = I - \Gamma\,, \quad \Gamma = \sum \gamma_{\alpha\beta}\,,$$

где матрица операторов $\gamma_{\alpha\beta}$ является решением уравнения

$$\begin{pmatrix} I & \Gamma_+ \\ \Gamma_- & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_{++} & \gamma_{+-} \\ \gamma_{-+} & \gamma_{--} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma_+ & 0 \\ 0 & \Gamma_- \end{pmatrix}\,.$$

Формально оператор Γ может быть представлен альтернирующим рядом

$$\Gamma = \Gamma_+ + \Gamma_- - \Gamma_+\Gamma_- - \Gamma_-\Gamma_+ + \dots$$

Для нас важно, что оператор $I - \Gamma$ может быть описан в компактной форме

$$I - \Gamma = (I - \Gamma_-)(I - \Gamma_+\Gamma_-)^{-1}(I - \Gamma_+)\,. \tag{3.3}$$

3.4. Асимптотика операторов отражения и их произведений. Найдем асимптотику операторов $\Gamma_\pm$ и их альтернирующих произведений. На носителе (т.е. при $x \geqslant 1$, $y \leqslant -1$) ядро оператора Γ_+ определяется равенством

$$\Gamma_+(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\xi(x-y)} \frac{a_+(\varepsilon\xi)}{a_-(\varepsilon\xi)}\, d\xi$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\xi(x-y)} \prod \frac{(\varepsilon\xi-\xi_k+i0)^{\alpha_k/2}}{(\varepsilon\xi-\xi_k-i0)^{\alpha_k/2}} \frac{(\varepsilon\xi+i)^{\beta/2}}{(\varepsilon\xi-i)^{\beta/2}} \frac{c_+^2(\varepsilon\xi)}{c(\varepsilon\xi)}\, d\xi\,. \qquad (3.4)$$

В степенных порядках по ε вклад в асимптотику интеграла (3.4) (в рассматриваемой области) вносят лишь точки $\xi = \frac{\xi_k}{\varepsilon}$, что доказывается стандартной техникой ПДО (т.е. процедурой интегрирования по частям в применении к интегралу по внешности некоторой окрестности точки $\xi = \frac{\xi_k}{\varepsilon}$ от соответствующим образом сглаженной подынтегральной функции). При этом

$$\Gamma_+(x,y)$$
$$\sim \sum_{k=1}^{n} \sum_{j\geqslant 0} b_{k,j}^+ \int\limits_{\Lambda_k} e^{i\xi(x-y)} (\varepsilon\xi-\xi_k+i0)^{j+\alpha_k/2} (\varepsilon\xi-\xi_k-i0)^{-\alpha_k/2}\, d\xi + O(\varepsilon^\infty),$$

где контур Λ_k показан на рис. 1.

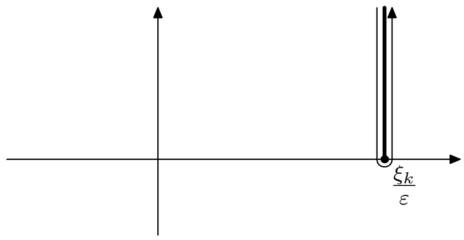

Рис. 1. Деформированный контур.

Тогда

$$\Gamma_+(x,y) \sim \sum_k e^{\frac{i\xi_k}{\varepsilon}(x-y)} \sum_{j\geqslant 0} \frac{\gamma_{k,j}^+ \varepsilon^j}{|x-y|^{j+1}} + O(\varepsilon^\infty)\,. \qquad (3.5)$$

Аналогично, при $x \leqslant -1$, $y \geqslant 1$,

$$\Gamma_-(x,y) \sim \sum_k e^{\frac{i\xi_k}{\varepsilon}(x-y)} \sum_{j\geqslant 0} \frac{\gamma^-_{k,j}\varepsilon^j}{|x-y|^{j+1}} + O(\varepsilon^\infty)\,. \tag{3.6}$$

Отметим, что

$$\gamma_k \equiv |\gamma^+_{k0}\gamma^-_{k0}| = 4\sin^2\frac{\pi\alpha_k}{2}\,. \tag{3.7}$$

Отсюда заключаем, что в старшем порядке произведение $\Gamma_+\Gamma_-$ является оператором вида

$$\Gamma_+\Gamma_- = \sum_{k=1}^n B_k + O(\varepsilon)\,, \quad B_k(x,y) = b_k e^{i\frac{\xi_k}{\varepsilon}(x-y)}\frac{1}{x-y}\ln\frac{x+1}{y+1} \tag{3.8}$$

на носителе, т.е при $x, y \geqslant 1$. При этом

$$|b_k| = \gamma_k\,. \tag{3.9}$$

Подчеркнём, что разложения (3.5), (3.6) позволяют элементарно получить полное степенное разложение произведения $\Gamma_+\Gamma_-$.

Следует заметить, что операторы B_k определены как ограниченные в пространстве $P_+H(\sqrt{\rho})$, поскольку в двойственном представлении они являются произведениями сингулярных операторов Гильберта с кусочно постоянными символами, см. [8, 9]. При этом, очевидно, при $k \neq j$ в операторной норме

$$B_k B_m = T_k \sum_{j\geqslant 1} C_{kmj}\varepsilon^j T^*_m = O(\varepsilon)\,, \tag{3.10}$$

где T_k – оператор умножения на $\exp(i\frac{\xi_k}{\varepsilon}x)$, а C_{kmj} – ограниченные интегральные операторы, не зависящие от ε. Обозначим через F_k операторы отражения по отношению к операторам B_k, т.е. положим

$$I - F_k = (I - B_k)^{-1}\,. \tag{3.11}$$

Тогда, согласно альтернирующему методу Шварца ([2, 6]),

$$(I - \Gamma_+\Gamma_-)^{-1} = I - \sum_{k=1}^n F_k + O(\varepsilon)\,. \tag{3.12}$$

Впрочем, ввиду (3.10), равенство (3.12) проверяется легко непосредственно.

Опять же отметим, что в формуле (3.12) величина $O(\varepsilon)$ может быть представлена асимптотическим степенным рядом, точнее рядом вида

$$\sum_{k,m=1}^{n} T_k \sum_{j\geqslant 1} D_{kmj}\varepsilon^j T_m^* + O(\varepsilon^\infty)\,,$$

где D_{kmj} – интегральные операторы, не зависящие от ε.

Вопрос о существовании операторов F_k связан с вопросом о разрешимости уравнений (2.2). Эти уравнения по сути (с точностью до подобия) уже не содержат малого параметра и должны быть решены точно. Ввиду (3.7), (3.9) они априори разрешимы при малых α_k. Вопросами их общей разрешимости в настоящей работе мы пренебрегаем. Однако, по сути дела они и составляют упомянутую ранее модельную задачу.

Итак, в случае регулярности показателей α_k, асимптотика оператора L^{-1}, в соответствии с (3.3), будет описываться формулой

$$L^{-1} = (I-\Gamma_-)(I-\sum F_k)(I-\Gamma_+) + O(\varepsilon)\,, \tag{3.13}$$

что совместно с (3.2) завершает построение асимптотики оператора $\mathcal{A}^{-1}$. Элементарные переразложения ведут к представлению L^{-1} в виде

$$L^{-1} = I - \sum_{k,m=1}^{n} T_k \sum_{j\geqslant 0} R_{kmj}\varepsilon^j T_m^* + O(\varepsilon^\infty)\,,$$

где R_{kmj} – интегральные операторы, не зависящие от ε.

На этом доказательство теоремы завершается.

Литература

1. A. R. Its, V. E. Korepin, *The Fisher-Hartwig Formula and Entanglement Entropy.* — J. Statist.Phys. **137** (1014), 2009.
2. A. M. Budylin, V. S. Buslaev, *Reflection operators and their applications to asymptotic investigations of semiclassical integral equations.* — Adv. Soviet Math. **7** (1991), 107–157.
3. H. Widom, *Toeplitz determinants with singular generating functions.* — Amer.J. Math. **95** (1973), 333–383.
4. А. М. Будылин, В. С. Буслаев, *Квазиклассические интегральные уравнения.* — ДАН СССР **319**, No. 3 (1991), 527–530.
5. А. М. Будылин, В. С. Буслаев, *Квазиклассические интегральные уравнения с медленно убывающими ядрами на ограниченных областях.* — Алгебра Анализ **5**, No. 1 (1993), 160–178.

6. А. М. Будылин, В. С. Буслаев, *Квазиклассическая асимптотика резольвенты интегрального оператора свёртки с синус-ядром на конечном интервале.* — Алгебра Анализ **7**, No. 6 (1995), 79–103.
7. А. М. Будылин, С. Б. Левин, *Уравнения в свёртках на конечном интервале большой длины с символами, имеющими нули степенного порядка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **438** (2015), 83–94.
8. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, *Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов.* Штиинца, Кишинев, 1973.
9. З. Прёсдорф, *Некоторые классы сингулярных уравнений.* Мир, М., 1979.
10. И. А. Фельдман, И. Ц. Гохберг, *Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. Наука, М., 1971.*

Budylin A. M., Sokolov S. V. Convolution equations on expanding interval with symbols having zeros or poles of nonintegral power.

The class of convolution equations on a large expanding interval is considered. The equations are characterized by the fact that the symbol of the corresponding operator has zeros or poles of the non-integer power in the dual variable, which leads to long-range influence. The power-order complete asymptotic expantions for kernel of the inverse operator while length of the interval tends to infinity is found.

С.-Петербургский
Государственный университет,
Университетская наб.7-9
С. Петербург, Россия
E-mail: a.budylin@spbu.ru, budylin@mph.phys.spbu.ru
E-mail: s.sokolov@spbu.ru

Поступило 24 октября 2016 г.