Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 451, 2016 г.

М. И. Белишев

ОБ АЛГЕБРАХ ТРЕХМЕРНЫХ КВАТЕРНИОННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Памяти Геннадия Марковича Хенкина

§0. Введение

Мотивация. Пусть (Ω, g) есть гладкое[1] компактное риманово многообразие с краем Γ, Δ_g – оператор Бельтрами-Лапласа, $u = u^f(x)$ – решение задачи

$$\begin{aligned} &\Delta_g u = 0 && \text{в } \Omega \\ &u = f && \text{на } \Gamma, \end{aligned}$$

$\Lambda : f \mapsto \partial_\nu u^f|_\Gamma$ – оператор "Дирихле–Нейман", ν – внешняя нормаль к Γ. *Задача импедансной томографии* (ЗИТ) состоит в восстановлении (Ω, g) по заданному Λ.

В случае $\dim \Omega = 2$ алгебраический подход к ЗИТ предложен в [1]. Его ключевым инструментом является коммутативная банахова алгебра аналитических функций

$$\mathcal{A}(\Omega) := \{w = \varphi + \psi i \mid \varphi, \psi \in C(\Omega),\, d\psi = \star d\varphi \ \text{ в } \Omega \setminus \Gamma\}\,. \tag{0.1}$$

Гельфандов спектр $\widehat{\mathcal{A}(\Omega)} =: \Omega^{\mathbb{C}}$ (множество гомоморфизмов $\mathcal{A}(\Omega) \to \mathbb{C}$) этой алгебры гомеоморфен многообразию: $\Omega^{\mathbb{C}} \cong \Omega$. Алгебра граничных значений $\mathcal{A}(\Gamma) = \{w|_\Gamma \mid w \in \mathcal{A}(\Omega)\}$ изометрически изоморфна $\mathcal{A}(\Omega)$. В силу этого спектры этих алгебр канонически гомеоморфны: $\widehat{\mathcal{A}(\Gamma)} \cong \Omega^{\mathbb{C}}$. В то же время, $\mathcal{A}(\Gamma)$ определяется оператором Λ. Это позволяет восстановить Ω по схеме $\Lambda \Rightarrow \mathcal{A}(\Gamma) \Rightarrow \widehat{\mathcal{A}(\Gamma)} \cong \Omega^{\mathbb{C}} \cong \Omega$ (подробности см. в [1, 3]).

Ключевые слова: кватернионные гармонические поля, коммутативные банаховы алгебры, реконструкция многообразий.

Поддержано грантами РФФИ 14-01-00535А и VolksWagen Foundation.

[1]всюду в работе "гладкий" означает C^∞-гладкий

Для $\dim\Omega \geqslant 3$ известные результаты по ЗИТ [5, 8, 9] относятся к некоторому специальному классу допустимых метрик g. В то же время, попытка распространить алгебраический подход встречает следующее препятствие. Адекватным аналогом алгебры $\mathcal{A}(\Omega)$ оказывается пространство дифференциальных форм, удовлетворяющих условию Коши-Римана $d\psi = \star\, d\varphi$ [2, 4]. К сожалению, оно не является алгеброй. Тем не менее, по крайней мере в трехмерном случае оно может обладать определенными алгебраическими свойствами, что и составляет предмет нашей работы. С этими свойствами мы связываем надежду на продвижение в ЗИТ.

Содержание. Мы рассматриваем случай $\dim\Omega = 3$. *Кватернионное поле* в Ω это пара $p = \{\alpha, u\}$, состоящая из (вещественной) функции α векторного поля (сечения расслоения $T\Omega$) u. Пространство $\mathcal{C}(\Omega) = \{p \mid \alpha \in C(\Omega),\, u \in \vec{C}(\Omega)\}$ с sup-нормой есть некоммуативная банахова алгебра относительно умножения $pq = \{\alpha\beta - u\cdot v, \alpha v + \beta u + u\wedge v\}$, где $q = \{\beta, v\}$, $\cdot$ и $\wedge$ суть поточечные скалярное и векторное произведения в касательных пространствах $T\Omega_m$. Это пространство содержит (под)пространство *гармонических полей* $\mathcal{Q}(\Omega) = \{p \in \mathcal{C}(\Omega) \mid \nabla\alpha = \operatorname{rot} u\}$, которое не является (под)алгеброй: в общем случае $p, q \in \mathcal{Q}(\Omega)$ не влечет $pq \in \mathcal{Q}(\Omega)$.

Тем не менее, мы показываем, что при определенных условиях на метрику g, пространство $\mathcal{Q}(\Omega)$ может содержать коммутативные алгебры $\mathcal{A}_e(\Omega)$, связанные с геодезическими полями e и схожие с упомнавшимися выше двумерными алгебрами $\mathcal{A}(\Omega)$. Эти алгебры определяют *кватернионный спектр* $\Omega^{\mathbb{H}}$, который и является кандидатом на роль трехмерного аналога двумерного Гельфандова спектра $\Omega^{\mathbb{C}}$.

С точки зрения алгебры, случай $\Omega \in \mathbb{R}^3$ оказывается более содержательным: пространство $\mathcal{Q}(\Omega)$ содержит подпространство $\dot{\mathcal{Q}}(\Omega)$, являющееся AH-модулем [7], причем спектр $\Omega^{\mathbb{H}}$ корректно определен и гомеоморфен Ω.

Возможный гомеоморфизм $\Omega^{\mathbb{H}} \cong \Omega$ позволяет надеяться на приложения кватернионного спектра в трехмерной ЗИТ. Мы имеем ввиду реконструкцию Ω по схеме: $\Lambda \Rightarrow$ изометрическая копия $\tilde{\mathcal{Q}}(\Omega)$ пространства $\mathcal{Q}(\Omega) \Rightarrow$ ее спектр $\tilde{\Omega}^{\mathbb{H}} \cong \Omega^{\mathbb{H}} \cong \Omega$.

Благодарности. Работе над этой статьей помогли консультации моих коллег. Г. М. Хенкин познакомил меня со статьей Д. Джойса [7]. Понять ее содержание я смог благодаря пояснениям и комментариям

Ю. А. Кордюкова. У Л. Н. Пестова и С. В. Иванова я консультировался по вопросам, относящимся к геометрии. Всем им я чрезвычайно благодарен за добрую помощь. Приношу благодарность М. Сало за информацию и ссылки по работам [5, 8].

§1. Гармрнические кватернионные поля

Кватернионы. • Через $\mathbb{H}=\{q=a+P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}\mid a,P,Q,R\in\mathbb{R}\}$ мы обозначаем *алгебру кватернионов*, снабженную стандартными линейными операциями и умножением, определяемым таблицей $\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=-1$; $\mathbf{ij}=\mathbf{k}$, $\mathbf{jk}=\mathbf{i}$, $\mathbf{ki}=\mathbf{j}$ (см. например [6]). Также вводятся инволюция $q\mapsto\bar q=a-P\mathbf{i}-Q\mathbf{j}-R\mathbf{k}$ и модуль $|q|=(q\bar q)^{\frac12}=\left(a^2+P^2+Q^2+R^2\right)^{\frac12}$. Мы обозначаем $\operatorname{Re}q=a$, $\operatorname{Im}q=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$ и называем элементы подпространства $\mathbb{I}=\{q\in\mathbb{H}\mid\ \operatorname{Re}q=0\}$ мнимыми кватернионами.

• Пусть E есть вещественное ориентированное трехмерное евклидово пространство, $\cdot$ и $\wedge$ – скалярное и векторное произведения в E. О паре $q=\{\alpha,u\}$ с $\alpha\in\mathbb{R}$ и $u\in E$ говорят как о геометрическом кватернионе. Мы обозначаем $\operatorname{Re}q=\alpha$, $\operatorname{Im}q=u$.

Четырехмерное линейное пространство $\mathcal{C}$ таких пар с покомпонентным суммированием, умножением

$$qp:=\{\alpha\beta-u\cdot v,\alpha v+\beta u+u\wedge v\} \tag{1.1}$$

(здесь $p=\{\beta,v\}$), инволюцией $q\mapsto\bar q=\{\alpha,-u\}$ и модулем $|q|=(q\bar q)^{\frac12}=\left(\alpha^2+|u|^2_E\right)^{\frac12}$ является алгеброй. Элементы подпространства $\mathcal{I}=\{q\in\mathbb{H}\mid\ \operatorname{Re}q=0\}$ называются мнимыми (геометрическими) кватернионами.

Выбирая ортонормированный базис $e_1,e_2,e_3\in E$ и представляя $u=Ae_1+Be_2+Ce_3$, мы определяем изометрический изоморфизм между алгебрами $\mathcal{C}$ и $\mathbb{H}$, полагая $\{\alpha,Ae_1+Be_2+Ce_3\}\leftrightarrow\alpha+A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$, причем этот изоморфизм отображает $\mathcal{I}$ на $\mathbb{I}$. С этого момента мы отождествляем $\mathcal{C}$ с $\mathbb{H}$.

• Как и $\mathbb{H}$, алгебра $\mathcal{C}$ некоммутативна. Однако, она содержит коммутативные подалгебры вида

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_e&=\{p=\{\varphi,\psi e\}\mid\varphi,\psi\in\mathbb{R};\ e\in E,\ |e|=1\}\,;\\ \mathcal{A}_0&=\{q=\{\alpha,0\}\mid\alpha\in\mathbb{R}\}\,,\end{aligned} \tag{1.2}$$

которые изометрически изоморфны $\mathbb{C}$ (согласно $\mathcal{C} \ni p \leftrightarrow \varphi + \psi\mathbf{i} \in \mathbb{C}$) и $\mathbb{R}$ соответственно. Как легко видеть, любая коммутативная подалгебра в $\mathcal{C}$ имеет вид (1.2). В самом деле, если выполнено $p, q \in \mathcal{C}$ и $pq = qp$, то $\operatorname{Im} p \wedge \operatorname{Im} q \overset{(1.1)}{=} 0$, т.е. $\operatorname{Im} p$ и $\operatorname{Im} q$ должны быть линейно зависимы.

Векторный анализ. Пусть Ω есть гладкое ориентированное риманово многообразие, $\dim \Omega = 3$, g – метрический тензор, μ – 3-форма риманова объема, $\star$ – оператор Ходжа, ∇_u – ковариантная производная. На таком многообразии определены имманентные операции векторного анализа на гладких функциях и векторных полях (сечениях касательного расслоения $T\Omega$). Напомним, следуя [11], их определения.

• Для поля u определяется *сопряженная 1-форма* $u_\sharp$ согласно $u_\sharp(v) = g(u, v),\ \forall v$. Для 1-формы f определяется *сопряженное поле* $f^\sharp$ согласно $g(f^\sharp, u) = f(u),\ \forall u$.
• *Скалярное произведение* $\cdot\ : \{\text{поля}\} \times \{\text{поля}\} \to \{\text{функции}\}$ определено поточечно: $u \cdot v = g(u, v)$. *Векторное произведение* $\wedge : \{\text{поля}\} \times \{\text{поля}\} \to \{\text{поля}\}$ определяется поточечно согласно

$$g(u \wedge v, w) = \mu\,(u, v, w),\ \forall w.$$

• *Градиент* $\nabla : \{\text{функции}\} \to \{\text{поля}\}$ и *дивергенция* $\operatorname{div}\ : \{\text{поля}\} \to \{\text{функции}\}$ определяются согласно $\nabla\alpha = (d\alpha)^\sharp$ и $\operatorname{div} u = \star d \star u_\sharp$ соответственно, где d – внешняя производная.
• *Ротор* отображает $\{\text{поля}\}$ в $\{\text{поля}\}$ согласно $\operatorname{rot} u = (\star d\, u_\sharp)^\sharp$. Напомим основные тождества: $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$ и $\operatorname{rot}\nabla = 0$. Равенства

$$\nabla\alpha\ =\ \operatorname{rot} u \qquad \text{и} \qquad d\alpha = \star\, du_\sharp$$

равносильны. По аналогии с условиями Коши-Римана в (0.1) они называются CR-условиями.
• *Лапласиан* $\Delta : \{\text{функции}\} \to \{\text{функции}\}$ есть $\Delta = \operatorname{div}\nabla$.

Для гладких функций α, β и полей u, v выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\nabla\alpha\beta = \beta\nabla\alpha + \alpha\nabla\beta;\ \ \nabla\, u\cdot v = \nabla_v u + \nabla_u v + v \wedge \operatorname{rot} u + u \wedge \operatorname{rot} v;\\
&\operatorname{rot}\alpha v = \nabla\alpha \wedge v + \alpha \operatorname{rot} v;\ \ \operatorname{rot}(u \wedge v) = \nabla_v u - \nabla_u v - (\operatorname{div} u)v + (\operatorname{div} v)u;\\
&\operatorname{div} u \wedge v = v \cdot \operatorname{rot} u - u \cdot \operatorname{rot} v;\ \ \operatorname{div}\alpha v = \nabla\alpha \cdot v + \alpha \operatorname{div} v
\end{aligned} \tag{1.3}$$

(см. [6], раздел 16.8 и [11], глава 10).

В дальнейшем у нас Ω компактно и имеет край Γ. Через $C(\Omega)$ и $\vec{C}(\Omega)$ обозначаем банаховы пространства непрерывных функций и векторных полей, снабженные стандартными sup-нормами.

Кватернионные поля.
• Кватернионное *поле* это пара $q = \{\alpha, u\}$, в которой $\alpha = \operatorname{Re} q$ и $u = \operatorname{Im} q$ суть функция и векторное поле, заданные в Ω. Пространство пар $\mathcal{C}(\Omega) = \{q \mid \alpha \in C(\Omega),\ u \in \vec{C}(\Omega)\}$ с поточечными суммированием и умножением (1.1) и нормой

$$\|q\| \,=\, \sup_{x\in\Omega} |q(x)| \,=\, \sup_{x\in\Omega} \left(|\alpha(x)|^2 + |u(x)|^2_{T\Omega_x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

является некоммутативной банаховой алгеброй; в частности выполнено $\|qp\| \leqslant \|q\|\|p\|$. Множество мнимых полей

$$\mathcal{I}(\Omega) = \{q \in \mathcal{C}(\Omega) \mid \operatorname{Re} q = 0\}$$

есть подпространство, но не подалгебра в $\mathcal{C}(\Omega)$.
• Элементы подпространства

$$\mathcal{Q}(\Omega) \,=\, \{q \in \mathcal{C}(\Omega) \mid \nabla\alpha \,=\, \operatorname{rot} u \ \text{ в } \ \Omega \setminus \Gamma\}$$

называются *гармоническими полями.* Также мы вводим подпространство

$$\dot{\mathcal{Q}}(\Omega) \,=\, \{q \in \mathcal{C}(\Omega) \mid \nabla\alpha \,=\, \operatorname{rot} u,\ \operatorname{div} u = 0 \ \text{ в } \ \Omega \setminus \Gamma\} \,\subset\, \mathcal{Q}(\Omega)$$

и называем его элементы *чистыми гармоническими полями.*

§2. Аксиальные алгебры

Ни $\mathcal{Q}(\Omega)$, ни $\dot{\mathcal{Q}}(\Omega)$ не являются (под)алгебрами в $\mathcal{C}(\Omega)$, поскольку умножение (1.1), вообще говоря, не сохраняет гармоничности. Тем не менее, как будет показано, при некоторых условиях на многообразие Ω, эти подпространства могут содержать коммутативные алгебры. Эти алгебры и представляют для нас главный интерес.

Формулы. Пусть $p = \{\alpha, u\}$, $q = \{\beta, v\}$ суть гладкие в Ω кватернионные поля. Поле $\varepsilon(p) \,=\, \nabla\alpha - \operatorname{rot} u$ назовем *гармонической невязкой* поля p. По этому определению имеем $\varepsilon|_{\mathcal{Q}(\Omega)} \,=\, 0$. С использованием

(1.3) выводятся следующие равенства:

$$\begin{aligned}&\varepsilon(pq)\\&= \beta\varepsilon(p) + \alpha\varepsilon(q) + v \wedge \varepsilon(p) + u \wedge \varepsilon(q) + (\operatorname{div} u)v - (\operatorname{div} v)u - 2\nabla_v u\,,\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}\, \mathrm{Im}(pq) = \operatorname{div}\,(\alpha v + \beta u + u \wedge v)\\&= \alpha \operatorname{div} v + \beta \operatorname{div} u + u \cdot \varepsilon(q) + v \cdot \varepsilon(p) + 2v \cdot \operatorname{rot} u\,.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Если $p, q \in \mathcal{Q}(\Omega)$, то $\varepsilon(p) = \varepsilon(q) = 0$ и эти равенства влекут

$$\varepsilon(pq) = (\operatorname{div} u)v - (\operatorname{div} v)u - 2\nabla_v u\,, \tag{2.3}$$

$$(\alpha v + \beta u + u \wedge v) = \alpha \operatorname{div} v + \beta \operatorname{div} u + 2v \cdot \operatorname{rot} u\,. \tag{2.4}$$

Для $p, q \in \dot{\mathcal{Q}}(\Omega)$ мы получаем

$$\varepsilon(pq) = -2\nabla_v u\,, \quad \operatorname{div}\,(\alpha v + \beta u + u \wedge v) = 2v \cdot \operatorname{rot} u\,. \tag{2.5}$$

Алгебры $\mathcal{A}_e(\Omega)$. Предположим, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{Q}(\Omega)$ есть алгебра и $p = \{\varphi, h\} \in \mathcal{A}$, $h \neq 0$. Такое поле p должно обладать следующими свойствами.

• Соотношение $\nabla\varphi = \operatorname{rot} h$ ведет к $\operatorname{div} \nabla\varphi = \Delta\varphi = 0$, так что φ гармонична в $\Omega \setminus \Gamma$ и, следовательно, $\varphi \neq 0$ почти везде.

• Поскольку $p^2 \in \mathcal{A}$, выполняется $\varepsilon(p^2) = 0$, и (2.3) для $q = p$ влечет $\nabla_h h = 0$. Представляя $h = \psi e$ с гладким ψ и $|e| = 1$, мы имеем

$$0 = \nabla_h h = \psi\,[(\nabla_e \psi)e + \psi \nabla_e e]\,,$$

($\nabla_e \psi := e \cdot \nabla\psi$), при этом выполнено $e \cdot \nabla_e e = 0$. Это ведет к

$$\nabla_e \psi = 0\,, \quad \nabla_e e = 0 \tag{2.6}$$

и означает, что линии векторного поля h суть геодезические и $|h| = |\psi| = \mathrm{const}$ вдоль этих линий.

• Так как $p^2 = \{\varphi^2 - \psi^2, 2\varphi\psi e\} \in \mathcal{Q}(\Omega)$, те же аргументы, приведшие к первому равенству в (2.6), влекут $\nabla_e[2\varphi\psi] = 0$, откуда $\nabla_e \varphi = 0$. Таким образом, мы имеем

$$\nabla_e \psi = \nabla_e \varphi = 0\,. \tag{2.7}$$

• Скалярная компонента кватернионного поля $p^2 \in \mathcal{Q}(\Omega)$ обязана быть гармоничной. Значит, мы имеем

$$0 = \Delta(\varphi^2 - \psi^2) = 2\left[\varphi\Delta\varphi + |\nabla\varphi|^2 - \psi\Delta\psi - |\nabla\psi|^2\right]$$
$$= 2\left[|\nabla\varphi|^2 - \psi\Delta\psi - |\nabla\psi|^2\right], \quad \text{т.е.} \quad |\nabla\varphi|^2 = \psi\Delta\psi + |\nabla\psi|^2\,.$$

В силу последнего равенства, с учетом $\varphi \neq 0$, мы заключаем, что $\psi \neq 0$ почти везде.

• Используя третье из равенств (2.1), мы имеем

$$\nabla\varphi \,=\, \operatorname{rot}\psi e \,=\, \nabla\psi \wedge e + \psi \operatorname{rot} e\,. \tag{2.8}$$

Умножая скалярно на e, с учетом $e \perp [\nabla\psi \wedge e]$ и (2.7), приходим к соотношению $e \cdot \operatorname{rot} e = 0$, которое является векторной формой условия интегрируемости Фробениуса. Отсюда заключаем, что

$$e \,=\, \nabla\tau \qquad \text{локально в } \Omega\,. \tag{2.9}$$

В силу этого, *локально* поверхности уровня $S^c = \{x \in \Omega \,|\, \tau(x) = c\}$, $-\delta < c < \delta$ геодезически параллельны, причем $\tau(x) = \pm\operatorname{dist}(x, S_0)$.

• В силу (2.9), соотношение (2.8) принимает вид $\nabla\varphi = \nabla\psi \wedge \nabla\tau$, что равносильно $\nabla\psi = \nabla\tau \wedge \nabla\varphi$. Применяя к последнему div, с учетом четвертого равенства в (1.3), получаем $\Delta\psi = 0$. Итак, мы имеем

$$\Delta\varphi \,=\, \Delta\psi \,=\, 0 \quad \text{and} \quad \nabla\psi \,=\, \nabla\tau \wedge \nabla\varphi \quad \text{локально в } \Omega\,. \tag{2.10}$$

Тем самым, любое $p \in \mathcal{A} \subset \mathcal{Q}(\Omega)$ представляется в виде

$$p \,=\, \{\varphi,\, \psi\nabla\tau\} \qquad \text{локально в } \Omega \tag{2.11}$$

с $|\nabla\tau| = 1$ и φ, ψ удовлетворяющими (2.10).

Как нетрудно проверить, обратное тоже верно в следующем смысле. Если $\mathcal{Q}(\Omega)$ содержит поле $p = \{\varphi, h\}$ вида (2.11), то существует коммутативная алгебра $\mathcal{A}_e(\Omega) \subset \mathcal{Q}(\Omega)$, состоящая из элементов $q = \{\lambda, \mu\nabla\tau\}$ и выполнено

$$pq \,=\, qp \,=\, \{\varphi\lambda - \psi\mu,\, (\varphi\mu + \psi\lambda)\nabla\tau\}\,.$$

Алгебра $\mathcal{A}_e(\Omega)$ очевидным образом связана с $\mathcal{A}_e$ (1.2), что и мотивирует сходные обозначения. Более того, она фактически идентична алгебре аналитических функций (0.1). В самом деле, пусть p имеет вид (2.11). Определим комплекснозначную функцию $w = \varphi + \psi i$; пусть $w^c = w|_{S^c} = \varphi^c + \psi^c i$ суть ее следы на поверхностях уровня τ. Тогда, в силу второго равенства в (2.10), φ^c и ψ^c оказываются сопряженными по Коши–Риману в том же смысле, что и в (0.1). Поэтому w^c принадлежит $\mathcal{A}(S^c)$, а $\mathcal{A}_e(\Omega)$ представляется как расслоение $\mathcal{A}_e(\Omega) = \cup_c \mathcal{A}(S^c)$.

• Примем дополнительно, что $p \in \mathcal{A}_e(\Omega) \cap \dot{\mathcal{Q}}(\Omega)$, так что $\operatorname{div} \operatorname{Im} p = \operatorname{div} \psi \nabla\tau$
$= 0$. В этом случае имеем

$$0 = \operatorname{div} \psi \nabla\tau \overset{(1.3)}{=} \nabla\psi \cdot \nabla\tau + \psi\Delta\tau \overset{(2.10)}{=} \psi\Delta\tau$$

и, следовательно, выполнено $\Delta\tau = 0$. Таким образом, если p – чистое гармоническое поле, то соответствующая дистанционная функция τ является гармонической. Обратное тоже верно.

Мы называем $\mathcal{A}_e(\Omega)$, а также соответствующие функции, удовлетворяющие (2.10) и ассоциированные с геодезическими векторными полями e, *аксиальными* алгебрами и *аксиальными* гармоническими функциями (e есть ось (axis)).

• Элементы аксиальных алгебр подчиняются принципу максимума модуля: для их элементов $p = \{\varphi, h\}$ выполнено соотношение

$$\max_{\Omega} |p| \;=\; \max_{\Gamma} |p|\,. \tag{2.12}$$

В самом деле, в силу $p \in \mathcal{A}_e(\Omega)$ имеем $\Delta\varphi = 0$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot} h = 0$ and $\nabla_h h = 0$, что влечет

$$\Delta|p|^2 = \operatorname{div} \nabla(\varphi^2 + h\cdot h) \overset{(1.3)}{=} 2\left[\varphi\Delta\varphi + |\nabla\varphi|^2 + \operatorname{div}\left(\nabla_h h + h \wedge \operatorname{rot} h\right)\right]$$
$$= 2\left[|\nabla\varphi|^2 + \operatorname{div} \nabla_h h + |\operatorname{rot} h|^2 - h \wedge \operatorname{rot}\operatorname{rot} h\right] = 2\left[|\nabla\varphi|^2 + |\operatorname{rot} h|^2\right] \;>\; 0.$$

Значит, $|p|^2$ есть субгармоническая функция и, как таковая, достигает своего максимума на границе. Следовательно, то же справедливо и для $|p|$.

Допустимые метрики. Возникает вопрос: для каких Ω аксиальные алгебры существуют? Полный ответ не известен и ниже излагаются некоторые соображения по этому поводу.

• Приведем пример алгебры $\mathcal{A}_e(\Omega)$. Наши рассмотрения имеют локальный характер.

Возьмем гладкую поверхность $S \subset \Omega$. Пусть σ^1, σ^2 суть локальные координаты на S и $\tau := \pm \operatorname{dist}(\,\cdot\,, S)$. Вблизи S полугеодезические координаты σ^1, σ^2, τ регулярны. Предположим, что метрика g имеет вид

$$ds^2 \;=\; d\tau^2 \;+\; \rho(\tau) g_{ik}(\sigma^1, \sigma^2)\sigma^i\sigma^k \tag{2.13}$$

с гладким положительным конформым фактором ρ. Выберем две функции φ^0, ψ^0 на S, связанные CR-условиями $d\psi^0 = \star d\varphi^0$ (относительно индуцированной метрики $g|_S$). Продолжим их в Ω соотношением $\varphi(\sigma^1, \sigma^2, \tau) = \varphi^0(\sigma^1, \sigma^2), \psi(\sigma^1, \sigma^2, \tau) = \psi^0(\sigma^1, \sigma^2)$. Как легко видеть, φ и ψ удовлетворяют (2.10), а поле $p = \{\varphi, \psi\nabla\tau\}$ является гармоническим и входящим в соответствующую алгебру $\mathcal{A}_e(\Omega)$.

Нельзя исключить, что этот пример исчерпывает все возможные случаи. Если так, то для существования алгебр $\mathcal{A}_e(\Omega)$ метрика в Ω должна иметь вид (2.13) вдоль соответствующих направлений e. В частности, такие алгебры существуют в пространствах постоянной кривизны[2].

• Что касается чистых гармонических p, условие $\Delta\tau = 0$ оказывается очень ограничительным. К примеру, оно не может выполняться на трехмерной сфере S^3 даже локально[3].

§3. $\mathbb{H}$-спектр

Аксиальные алгебры в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ есть (открытая) ограниченная область с гладкой границей Γ. В этом случае имеется большой запас алгебр $\mathcal{A}_e(\Omega)$.

• Фиксируем $O \in \mathbb{R}^3$ и сферическую систему координат ϕ, θ, r с полюсом O. Напомним, что в сферических координатах $\mathbb{R}^3$-метрика принимает вид (2.13).

Для точки x, через $\vec{r}(x)$ обозначим ее радиус-вектор, приложенный в x, так что $|\vec{r}| = r$. Таким образом, мы имеем сферически-симметричное геодезическое поле $e = r^{-1}\vec{r}$ с дивергенцией $\operatorname{div} e(x) = 2r^{-1}$.

Обозначим $S^c_O = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid r(x) = \operatorname{dist}(x, O) = c\}$. Для точки $x = x(\phi, \theta, r) \neq O$ обозначим через $\pi(x) \in S^1_O$ ее геодезическую проекцию на единичную сферу, т.е. точку с координатами $(\phi, \theta, 1)$.

Пусть Ω и O таковы, что выбранная система координат регулярна в окрестности $\bar\Omega$. В этом случае область регулярно расслаивается: $\bar\Omega = \cup_c[\bar\Omega \cap S^c_O]$.

Пусть φ^1, ψ^1 суть две функции на S^1_O (переменных ϕ, θ), непрерывные в $\pi(\bar\Omega)$ и такие, что $d\psi^1 = \star\, d\varphi^1$ в $\pi(\Omega)$. В $\bar\Omega$ определим функции

---

[2] С. В. Иванов, частное сообщение.

[3] С. В. Иванов, частное сообщение.

$\varphi = \varphi^1(\pi(x)), \psi = \psi^1(\pi(x))$. Тогда по построению кватернионное поле $p = \{\varphi, \psi e\}$ оказывается гармоническим и входит в $\mathcal{Q}(\Omega)$. Поля этого вида составляют аксиальную алгебру $\mathcal{A}_e(\Omega)$. При этом построенные поля p не являются чисто гармоническими, т.е. $\mathcal{A}_e(\Omega) \not\subset \dot{\mathcal{Q}}(\Omega)$, поскольку $\operatorname{div} \psi e = \nabla\psi \cdot e + \psi \operatorname{div} e \overset{(2.6)}{=} \psi 2r^{-1} \neq 0$.

При фиксированной Ω, варьируя положение полюса O, мы "просвечиваем" область радиальными полями e и получаем богатое семейство алгебр $\mathcal{A}_e(\Omega) \subset \mathcal{Q}(\Omega)$.

• Можно заменить сферы на плоскости. Фиксируем ω, $|\omega| = 1$ и обозначим $\Pi^c_\omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot \omega = c\}$. В этом случае область расслаивается: $\bar\Omega = \cup_c [\bar\Omega \cap \Pi^c_\omega]$, при этом $\pi(\bar\Omega) = \{x - (x \cdot \omega)\omega \mid x \in \bar\Omega\}$ есть ее проекция на Π^0_ω.

Выберем две функции φ^0, ψ^0 на Π^0_ω, непрерывные в $\pi(\bar\Omega)$ и такие что $d\psi^0 = \star d\varphi^0$ в $\pi(\Omega)$. В $\bar\Omega$, определим функции $\varphi = \varphi^0(\pi(x)), \psi = \psi^0(\pi(x))$. Кватернионное поле $p = \{\varphi, \psi e\}$ является гармоническим и входит в $\mathcal{Q}(\Omega)$. Такие поля образуют аксиальную алгебру $\mathcal{A}_\omega(\Omega)$ (здесь ω понимается как постоянное векторное поле $e \equiv \omega$ в $\mathbb{R}^3$). Более того, в силу $\operatorname{div} \omega = 0$, ее элементы оказываются чисто гармоническими, так что выполнено $\mathcal{A}_\omega(\Omega) \subset \dot{\mathcal{Q}}(\Omega)$.

Таким образом, имеется семейство чистых гармонических аксиальных алгебр, индексируемых ортами ω.

• Проводя выкладки, вполне аналогичные приведшим к (2.12), можно показать, что для элементов пространства $\dot{\mathcal{Q}}(\Omega)$ справедлив принцип максимума модуля.

АН-структура в $\dot{\mathcal{Q}}(\Omega)$. Специфика случая $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ в том, что кватернионные поля канонически отождествляются с $\mathbb{H}$-полями ($\mathbb{H}$-значными функциями) соответствием $\{\alpha, u\} \equiv \alpha + (u \cdot e_1)\mathbf{i} + (u \cdot e_2)\mathbf{j} + (u \cdot e_3)\mathbf{k}$, где e_1, e_2, e_3 – фиксированный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$. Как следствие, пространство $\dot{\mathcal{Q}}(\Omega)$ оснащено дополнительной алгебраической структурой. Опишем ее, придерживаясь понятий и обозначений работы [7].

• Начнем с некоторых абстрактных определений.

Пусть вещественное линейное пространство $\mathcal{U}$ является (левым) $\mathbb{H}$-модулем с действием $u \mapsto au$ для $u \in \mathcal{U}$, $a \in \mathbb{H}$.

Через $\mathcal{U}^\times$ обозначим $\mathbb{H}$-двойственное пространство, т.е. пространство линейных отображений $f : \mathcal{U} \to \mathbb{H}$, таких что $f(au) = af(u)$, $a \in \mathbb{H}$. Будем называть такие f $\mathbb{H}$-*функционалами.* Заметим, что $\mathcal{U}^\times$

является левым $\mathbb{H}$-модулем с действием $(bf)(u) = f(u)\bar{b}$, $b \in \mathbb{H}$. Если $\mathcal{U}$ – нормированное пространство, то и $\mathcal{U}^{\times}$ также оснащено нормой $\|f\|_{\times} = \sup\limits_{\|u\|=1} |f(u)|$.

Пусть $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ – подпространство. Отметим, что инвариантность $\mathcal{U}'$ относительно $\mathbb{H}$-действия не предполагается. Определим подпространство $\mathcal{U}^{\dagger} = \{f \in \mathcal{U}^{\times} \mid$
$f(u) \in \mathbb{I}$ для всех $u \in \mathcal{U}'\}$.

Скажем, что пара $\{\mathcal{U},\mathcal{U}'\}$ является *АН-модулем* (аугментированным $\mathbb{H}$-модулем), если из равенства $f(u) = 0$ при любом $f \in \mathcal{U}^{\dagger}$ следует $u = 0$. Это означает, что подпространство $\mathcal{U}^{\dagger}$ обладает свойством *тотальности*: оно различает элементы пространства $\mathcal{U}$.

• Покажем, что чистые гармонические поля в $\mathbb{R}^3$ образуют АН-модуль.

Определим действие $\mathbb{H}$ на $\dot{\mathcal{Q}}(\Omega)$. Фиксируем $a \in \mathbb{H}$ и обозначим через $\tilde{a}(\cdot) = a$ постоянное кватернионное поле в Ω. Теперь для $p = \{\varphi, h\} \in \dot{\mathcal{Q}}(\Omega)$ положим $ap = \tilde{a}(\cdot)p(\cdot)$ (поточечно). В силу (2.5) выполнено

$$\varepsilon(ap) = -2\nabla_h \operatorname{Im}\tilde{a} = 0\,, \quad \operatorname{div}\,\operatorname{Im}(ap) \,=\, 2h\cdot\operatorname{rot}\,\operatorname{Im}\tilde{a} = 0\,,$$

просто потому, что $\tilde{a}$ постоянно. Значит, $ap \in \dot{\mathcal{Q}}(\Omega)$, так что $\mathbb{H}$-действие определено корректно. Таким образом, $\dot{\mathcal{Q}}(\Omega)$ есть $\mathbb{H}$-модуль.

Пусть $[\dot{\mathcal{Q}}(\Omega)]^{\times}$ есть $\mathbb{H}$-двойственное пространство.

Возьмем $[\dot{\mathcal{Q}}(\Omega)]' = \{p \in \dot{\mathcal{Q}}(\Omega) \mid \operatorname{Re} p = 0\} = \dot{\mathcal{Q}}(\Omega) \cap \mathcal{I}(\Omega)$. Это подпространство состоит из полей $p = \{0, h\}$, таких что $\operatorname{div} h = 0$ и $\operatorname{rot} h = 0$. Напомним, что $[\dot{\mathcal{Q}}(\Omega)]^{\dagger} = \{f \in [\dot{\mathcal{Q}}(\Omega)]^{\times} \mid f(u) \in \mathbb{I}$ для всех $u \in [\dot{\mathcal{Q}}(\Omega)]'\}$. Это подпространство содержит *кватернионные меры Дирака* θ_m, ассоциированные с точками $m \in \bar{\Omega}$ и действующие по правилу $\theta_m(p) = p(m) \in \mathbb{H}$. Эти меры различают элемнты $\dot{\mathcal{Q}}(\Omega)$: если $\theta_m(p) = 0$ для всех m то $p = 0$. Значит, более широкое множество $[\dot{\mathcal{Q}}(\Omega)]^{\dagger}$ различает элементы, т.е. обладает свойством тотальности.

Резюмируя, мы заключем, что $\{\dot{\mathcal{Q}}(\Omega), [\dot{\mathcal{Q}}(\Omega)]'\}$ есть АН-модуль.

• Обозначим $\Theta(\Omega) = \{\theta_m \mid m \in \bar{\Omega}\} \subset [\dot{\mathcal{Q}}(\Omega)]^{\times}$. Для любых θ_m и $p \in \dot{\mathcal{Q}}(\Omega)$ имеем

$$|\theta_m(p)| = |p(m)| \leqslant \sup_{\Omega} |p(\cdot)| = \|p\|,$$

что ведет к $\|\theta_m\|_\times \leqslant 1$. В то же время, sup достигается на $p = \{1, 0\}$. Следовательно, $\|\theta_m\|_\times = 1$, т.е. $\Theta(\Omega)$ вложено в единичную сферу двойственного пространства $[\dot{\mathcal{Q}}(\Omega)]^\times$. Эта сфера компактна в $*$-топологии, определяемой поточечной сходимостью $\mathbb{H}$-функционалов на элементах $\dot{\mathcal{Q}}(\Omega)$. Как можно показать, в этой топологии $\Theta(\Omega)$ является компактом. Более того, биекция $\Theta(\Omega) \ni \theta_m \leftrightarrow m \in \bar{\Omega}$ есть гомеоморфизм топологических пространств.

Выберем единичный вектор ω; пусть $y, z \in \mathcal{A}_\omega(\Omega)$. Напомним, что $\mathcal{A}_\omega(\Omega)$ – коммутативная алгебра. Для любой θ_m выполнено

$$\theta_m(yz) = (yz)(m) = y(m)z(m) = \theta_m(y)\theta_m(z)\,,$$

т.е. $\mathbb{H}$-функционал θ_m является *мультипликативным* на $\mathcal{A}_\omega(\Omega)$.

• Упомянутые выше свойства мер Дирака характеризуют множество $\Theta(\Omega)$. Именно, определим $\Omega^{\mathbb{H}} \subset [\dot{\mathcal{Q}}(\Omega)]^\times$ как множество $\mathbb{H}$-функционалов с нормой 1, которые действуют мультипликативно на каждую алгебру $\mathcal{A}_\omega(\Omega)$. Тогда, должным образом изменяя аргументы [7] (раздел 3.4), можно показать, что $\Omega^{\mathbb{H}} = \Theta(\Omega)$.

Скажем, что $\Omega^{\mathbb{H}}$ есть $\mathbb{H}$-*спектр* области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Как следует из сказанного выше, $\mathbb{H}$-спектр гомеоморфен области.

• По Гельфанду, нулевое подпространство $\operatorname{Ker}[\theta_m|_{\mathcal{A}_\omega(\Omega)}]$ соответствует максимальному идеалу в $\mathcal{A}_\omega(\Omega)$, состоящему из (аксиальных) аналитических функций $w = \varphi + \psi i$, аннулирующихся на прямой линии, которая проходит через $m \in \bar{\Omega}$ параллельно ω. Эта прямая пересекает проекцию $\pi(\bar{\Omega})$ области $\bar{\Omega}$ на ортогональную плоскость Π^0_ω в точке $\pi(m)$. Как следствие, также по Гельфанду, каждая алгебра $\mathcal{A}_\omega(\Omega)$ определяет эту проекцию с точностью до гомеоморфизма. Более того, она определяет $\pi(\bar{\Omega})$ (как двумерное риманово многообразие) с точностью до конформной эквивалентности [1].

Комментарии и гипотезы. • В общем случае трехмерного многообразия Ω векторные части u полей $p = \{\varphi, u\} \in \mathcal{Q}(\Omega)$ принимают свои значения в касательных пространствах $T\Omega_m$, а не в $\mathbb{R}^3$, и не видно какого-либо канонического способа отождествить поля p с $\mathbb{H}$-значными функциями (как в случае $\Omega \subset \mathbb{R}^3$). Разумеется, можно превратить $\mathbb{R} \times T\Omega_m$ в $\mathbb{H}$, выбирая локальный репер, но аналога постоянных полей $\tilde{a}$, определяющих действие $\mathbb{H}$ на $\mathcal{Q}(\Omega)$, не возникнет. Как следствие, исчезает АН-структура, что обедняет возможности алгебраического подхода к ЗИТ.

Тем не менее, можно определить $\mathbb{H}$-спектр следующим образом. Начав с пространства $\mathcal{Q}(\Omega)$, введем двойственное пространство $[\mathcal{Q}(\Omega)]^\times$ $\mathbb{R}$-линейных операторов из $\mathcal{Q}(\Omega)$ в $\mathbb{H}$. Затем *определим* $\Omega^{\mathbb{H}} \subset [\mathcal{Q}(\Omega)]^\times$ как множество элементов единичной нормы, которые действуют мультипликативно на аксиальные алгебры $\mathcal{A}_e(\Omega) \subset \mathcal{Q}(\Omega)$ (если таковые имеются; в противном случае принимаем $\Omega^{\mathbb{H}} = \emptyset$). Вопрос, однако, в том, насколько содержательно такое определение. В частности, можно ли надеяться на гомеоморфизм $\Omega^{\mathbb{H}} \cong \Omega$?

Возможно, адекватное общее определение $\Omega^{\mathbb{H}}$ можно извлечь из работы Д. Квиллена [10], которая интерпретирует конструкции Д. Джойса в терминах алгебраической геометрии. К сожалению, автор данной статьи недостаточно сведущ в алгебре, чтобы понять, что там написано.

• Есть случай, в котором $\mathcal{Q}(\Omega)$ содержит по крайней мере одну алгебру $\mathcal{A}_e(\Omega)$, а $\mathbb{H}$-спектр корректно определен и полезен для реконструкции Ω. Пусть многообразие является *цилиндрическим*, т.е. $\Omega = M \times [0,1]$, а метрика g имеет вид (2.13) с $\rho = \mathrm{const}$. Тогда имеется алгебра $\mathcal{A}_e(\Omega)$ с осевым полем e, линии которого суть образующие $\{m\} \times [0,1]$, $m \in M$. В этой ситуации "сечение" M может быть восстановлено как Гельфандов спектр $M^{\mathbb{C}}$ алгебры $\mathcal{A}_e(\Omega)$ (даже если метрика g_M не является простой). Если при этом $\mathcal{A}_e(\Omega)$ – единственная коммутативная алгебра в $\mathcal{Q}(\Omega)$, то будет выполнено $\Omega^{\mathbb{H}} \cong M^{\mathbb{C}}$.

В связи с этим отметим, что, простая комбинация результатов [1, 2] и данной статьи приводит к следующему утверждению о единственности решения ЗИТ.

Предложение 1. *Пусть трехмерное многообразие* $(\Omega, g^\dagger)$ *таково, что*

(1) $\Omega = M \times I$, *где* M *– односвязное двумерное компактное многообразие с краем,* $I = [0,1]$*;*
(2) *метрика* $g^\dagger$ *имеет вид* (2.13) *с* $\rho \equiv 1$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ (σ^1,σ^2*– локальные координаты на* M).

Пусть g*– метрика на* Ω, Λ_g *и* $\Lambda_{g^\dagger}$ *суть DN-операторы, отвечающие метрикам* g *и* $g^\dagger$. *Тогда, если* $\Lambda_g = \Lambda_{g^\dagger}$, *то* $g = \Phi_* g^\dagger$, *где* $\Phi : \Omega \to \Omega$ *– диффеоморфизм, тождественный на* $\partial\Omega$.

Доказательство (набросок). Так как M односвязно, то Ω тоже односвязно (как трехмерное многообразие). Поэтому Λ_g определяет оператор $\vec{\Lambda}_g$ ("магнитостатический" DN-оператор: см.[2]).

Располагая парой $\Lambda_g, \vec{\Lambda}_g$, можно определить следы полей $p \in \dot{\mathcal{Q}}(\Omega)$ на $\partial\Omega$ [2, 4]. Проверяя, входит ли след поля p^2 в $\dot{\mathcal{Q}}(\Omega)|_{\partial\Omega}$, можно отобрать "алгебраические" p и определить следы всех алгебр $\mathcal{A}_e(\Omega)$.

Следы элементов алгебры $\mathcal{A}_\omega(\Omega)$, отвечающей полю геодезических $\{\{m\} \times I \mid m \in M\}$ имеют специфический вид. Как таковые, они могут быть выделены и определят алгебру следов $\mathcal{A}_\omega(\Omega)|_{\partial\Omega}$.

В силу принципа максимума модуля, последняя алгебра определяет "невидимую" алгебру $\mathcal{A}_\omega(\Omega)$ с точностью до изометрического изоморфизма. Значит, мы можем найти Гельфандов спектр алгебры $\mathcal{A}_\omega(\Omega)|_{\partial\Omega}$ и, таким образом, определить $(M, \lambda g_M)$, где $\lambda = \lambda(m)$ есть (неизвестный) конформный фактор [1].

Символ оператора Λ_g определяет $g|_{\partial\Omega}$ (Г.Ульманн и др.). В частности, он определяет $g|_{M\times\{0\}}$ и, следовательно, задает фактор λ. Таким образом, метрика $g^\dagger$ восстановлена. □

Тем самым, по крайней мере в размерности 3, принятое в [5] требование инъективности лучевого преобразования оказывается излишним. Отметим, что если в дополнение к Λ задать оператор $\vec{\Lambda}$, то и условие односвязности M тоже можно снять.

Примечателен следующий факт: на текущем этапе исследования ЗИТ, класс допустимых метрик в геометро-оптическом и алгебраическом подходах один и тот же. Возможно, существует внутренняя связь между решениями геометрической оптики и алгебрами $\mathcal{A}_e(\Omega)$.

• Не исключено, что есть случаи, когда существует *конечное* число аксиальных алгебр, в совокуности пригодных для реконструкции. Также возможно, что реконструкция по схеме [7], где автор рассматривает четно-мерные гиперкомплексные многообразия, может быть адаптирована для некоторого класса задач импедансной томографии. Мы планируем затронуть эту тему в будущих работах.

Литература

1. M. I. Belishev, *The Calderon problem for two-dimensional manifolds by the BC-method.* — SIAM J. Math. Anal. **35**, No. 1 (2003), 172–182.
2. M. I. Belishev, *Some remarks on impedance tomography problem for 3d–manifolds.* — CUBO A Mathematical Journal **7**, no. 1 (2005), 43–53.
3. M. I. Belishev, *Recent progress in the boundary control method.* — Inverse Problems **23**, No. 5 (2007), R1–R67.
4. M. I. Belishev, V. A. Sharafutdinov, *Dirichlet to Neumann operator on differential forms.* — Bulletin de Sciences Mathématiques **132**, No. 2 (2008), 128–145.

5. D. Dos Santos Ferreira, Ya. Kurylev, M. Lassas, M. Salo, *The Calderon problem in transversally anisotropic geometries.* — J. Eur. Math. Soc. **18**, 2579–2626. DOI 10.4171/JEMS/649.
6. G. A. Korn, T. M. Korn, *Mathematical Handbook.* McGraw-Hill Book Company, 1968.
7. D. Joyce, *A theory of quaternionic algebras with applications to hypercomplex geometry. arXiv:math/00100/9v1 [math.DG] 9 Oct 2000.*
8. C. E. Kenig, M. Salo, G. Uhlmann, *Reconstruction from boundary measurements on admissible manifolds.* — Inverse Problems and Imaging. No. 4 (2011), 859–877. DOI:10.3934/ipi.2011.5.859
9. M. Lassas, M. Taylor, G. Uhlmann, *The Dirichlet-to-Neumann map for complete Riemannian manifolds with boundary.* — Comm. Anal. Geom. **11**, no. 2 (2003), 207–221.
10. D. Quillen, *Quaternionic algebra and sheaves on the Riemann sphere.* — Quart. J. Math. Oxford **49** (1998), 163–198.
11. G. Schwarz, *Hodge decomposition - a method for solving boundary value problems.* Lect. Notes Math., 1607. Springer–Verlag, Berlin, 1995.

Belishev M. I. On algebras of three-dimensional quaternionic harmonic fields.

A quaternionic field is a pair $p = \{\alpha, u\}$ of function α and vector field u given on a 3d Riemannian maifold Ω with the boundary. The field is said to be harmonic if $\nabla\alpha = \operatorname{rot} u$ in Ω. The linear space of harmonic fields is not an algebra w.r.t. quaternion multiplication. However, it may contain the commutative algebras, what is the subject of the paper. Possible application of these algebras to the impedance tomography problem is touched on.

Санкт-Петербургский
Государственный Университет,
7/9 Университетская наб., Санкт-Петербург,
199034, Россия
E-mail: m.belishev@spbu.ru

Поступило 1 ноября 2016 г.

Санкт-Петербургское Отделение
Математического Института им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: belishev@pdmi.ras.ru