

**И. В. Андронов**

## **ДИФРАКЦИЯ НА УЗКОМ КОНУСЕ ПРИ КОСОМ ПАДЕНИИ**

### §1. ВВЕДЕНИЕ

При рассмотрении задач дифракции на конусе в первую очередь исследуется волна, расходящаяся от вершины [1], поскольку считается, что остальные компоненты поля можно описать в рамках лучевого метода [2]. Однако вблизи вершины кривизна поверхности велика, что может препятствовать использованию формул лучевого метода для отражённой волны. В случае узкого конуса эта область увеличивается и эффекты протекающие в ней могут быть существенны.

В статье используется подход, разработанный для описания явления дифракции на сильно вытянутых телах, см., например, [3, 4]. Случай падения вдоль оси конуса был рассмотрен в [5].

### §2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

В статье рассматривается задача дифракции на узком круговом конусе при падении плоской волны под малым углом к оси. Введём цилиндрическую систему координат  $(r, \phi, z)$  и зададим поверхность конуса в виде

$$r = \alpha z, \quad z > 0. \quad (1)$$

Параметр  $\alpha$  имеющий смысл тангенса угла при вершине, считаем малым. Ниже мы более точно укажем характер этой малости.

В акустическом случае волновое поле подчиняется уравнению Гельмгольца

$$\Delta U + k^2 U = 0 \quad (2)$$

и краевому условию Дирихле

$$U = 0, \quad r = \alpha z > 0 \quad (3)$$

или Неймана

$$\frac{\partial U}{\partial r} - \alpha \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad r = \alpha z > 0. \quad (4)$$

---

*Ключевые слова:* высокочастотная дифракция, узкий конус, косое падение.

Падающая плоская волна в цилиндрической системе координат  $(r, \phi, z)$  имеет вид

$$U^i = \exp(ikz \cos \theta + ikr \sin \theta \cos \phi).$$

Здесь  $\theta$  – угол между волновым вектором и осью конуса. Далее будем называть  $\theta$  углом падения и считать его малым.

Ввиду симметрии задачи решение удобно искать в виде ряда Фурье

$$U = \sum_{m=0}^{+\infty} U_m \cos(m\phi). \quad (5)$$

В случае осевого падения, при  $\theta = 0$ , ряд (5) сводится к одному члену  $U_0$ , который был исследован в [5]. В случае падения под углом, гармоники Фурье можно строить по-отдельности.

Дифракционная картина известна. Поле можно представить в виде суперпозиции падающей волны, волны отражённой от поверхности конуса и сферической волны, расходящейся от его вершины. Мы будем рассматривать поле вблизи поверхности. На больших расстояниях от вершины конуса основной вклад даёт сумма падающей и отражённой волн, причём обе эти волны могут быть описаны в рамках лучевого метода. При приближении точки наблюдения к вершине лучевой метод перестаёт работать, так как радиус кривизны поверхности становится сравним с длиной волны. При ещё большем приближении к вершине конуса увеличивается вклад волны, идущей от вершины.

Мы будем рассматривать промежуточную область, в которой лучевой метод уже неприменим, но вклад волны от вершины ещё не существен. Итак, пусть эта область характеризуется некоторым расстоянием  $Z$  от вершины. Введём в этой области координаты  $(\eta, \nu)$  так, что

$$\begin{cases} z = Z \left( p^{-1/3} - \frac{\nu}{2p} \right) \eta, \\ r = Z p^{-2/3} \eta \sqrt{\nu}, \end{cases} \quad (6)$$

где  $p = kZ$  – большой параметр задачи.

В координатах  $(\eta, \nu)$  поверхность конуса задаётся уравнением

$$\nu = \nu_0,$$

где  $\nu_0$  определяется из квадратного уравнения

$$p^{-2/3} \sqrt{\nu_0} = \alpha \left( p^{-1/3} - \frac{\nu_0}{2p} \right)$$

и приближённо

$$\nu_0 \approx p^{2/3} \alpha^2.$$

Будем считать параметр  $\alpha$  настолько малым, что

$$p^{1/3} \alpha = O(1). \quad (7)$$

Предположим аналогичным образом, что

$$p^{1/3} \theta = \vartheta = O(1). \quad (8)$$

Отметим, что в качестве характерного размера  $Z$  можно было бы взять величину  $Z = k^{-1} \alpha^{-3}$ . В этом случае  $p^{-1/3} = \alpha$ ,  $\nu_0 \approx 1$ .

### §3. ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

При предположениях (7), (8) поле  $U$  может быть описано в рамках приближения параболического уравнения. Положим

$$U_m = \exp\left(ip^{2/3}\eta\right) u_m(\eta, \nu). \quad (9)$$

Будем считать что функция ослабления  $u_m$  зависит от своих аргументов таким образом, что дифференцирование по ним не меняет асимптотический порядок величины по параметру  $p$ . Можно показать, что функция  $u$  представима в виде асимптотического ряда по обратным степеням  $p^{1/3}$ , однако мы ограничимся лишь рассмотрением старшего члена, для которого сохраним обозначение  $u_m$ .

Проводя несложные выкладки, получим параболическое уравнение

$$\nu \frac{\partial^2 u_m}{\partial \nu^2} + \frac{\partial u_m}{\partial \nu} + \frac{i}{2} \eta^2 \frac{\partial u_m}{\partial \eta} + \frac{i}{2} \eta u_m - \frac{m^2}{4\nu} u_m = 0. \quad (10)$$

Здесь и далее нижними индексами обозначены производные.

Уравнение (10) допускает разделение переменных. Частное решение выражается через цилиндрические функции  $Z_m()$ :

$$\frac{1}{\eta} \exp\left(-\frac{\lambda}{\eta}\right) Z_m\left(e^{i\pi/4} \sqrt{2\lambda\nu}\right). \quad (11)$$

Здесь  $\lambda$  – параметр разделения переменных. Будем искать решение задачи в виде суперпозиции частных решений (11)

$$u_m = \frac{1}{\eta} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{\lambda}{\eta}\right) \Omega_m(\lambda) \times \left\{ J_m\left(e^{i\pi/4} \sqrt{2\lambda\nu}\right) + R_m(\lambda) H_m^{(1)}\left(e^{i\pi/4} \sqrt{2\lambda\nu}\right) \right\} d\lambda. \quad (12)$$

Здесь функции  $\Omega_m$  и  $R_m$  должны быть определены из условия сшивания с падающим полем и из граничного условия (3) или (4). Анализируя поведение частных решений по переменной  $\nu$  можно отождествить в (12) слагаемое с функцией Бесселя с падающим полем ввиду регулярности решения при  $\nu = 0$ , а слагаемое с Функцией Ханкеля – с отражённой волной, которая должна вести себя как уходящая от поверхности волна. Тогда функция  $\Omega_m(\lambda)$  должна быть определена из условия сшивания с падающей плоской волной, а функция  $R_m(\lambda)$  определяется из граничного условия. Соответственно для условий Дирихле и Неймана имеем

$$R_m^D = -\frac{J_m(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu_0})}{H_m^{(1)}(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu_0})}, \quad R_m^N = -\frac{\dot{J}_m(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu_0})}{\dot{H}_m^{(1)}(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu_0})}, \quad (13)$$

где точкой обозначена производная функции.

#### §4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ $\Omega_m(\lambda)$

Гармоника с номером  $m$  падающей волны, очевидно, выражается формулой

$$U_m^i = 2i^m \exp(ikz \cos \theta) J_m(kr \sin \theta).$$

После перехода к координатам  $(\eta, \nu)$  и выделения быстрого множителя в старшем порядке по  $p$  получим:

$$u_m^i = 2i^m \exp\left(-i\frac{\vartheta^2 + \nu}{2}\eta\right) J_m(\vartheta\eta\sqrt{\nu}). \quad (14)$$

Здесь ввиду малости угла  $\theta$  произведены замены

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2, \quad \sin \theta \approx \theta.$$

Можно проверить, что функция  $u_m^i$ , определённая формулой (14) удовлетворяет параболическому уравнению (10) и, следовательно, может быть представлена в виде (12) с  $R_m \equiv 0$ . Таким образом, функция  $\Omega_m(\lambda)$  находится из интегрального равенства

$$\frac{1}{\eta} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{\lambda}{\eta}\right) \Omega_m(\lambda) J_m\left(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu}\right) d\lambda = u_m^i. \quad (15)$$

Воспользуемся формулой 6.615 из [6]:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} J_m(2\beta\sqrt{x}) J_m(2\gamma\sqrt{x}) dx = \frac{1}{\alpha} I_m\left(\frac{2\beta\gamma}{\alpha}\right) \exp\left(-\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha}\right). \quad (6.615)$$

Сравнивая её с (15), положим

$$\alpha = \frac{1}{\eta}, \quad \beta = e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\nu}{2}}, \quad \gamma = e^{i\pi/4} \frac{\vartheta}{\sqrt{2}}$$

откуда найдём

$$\Omega_m(\lambda) = 2J_m\left(e^{i\pi/4}\vartheta\sqrt{2\lambda}\right). \quad (16)$$

### §5. ТОК НА ПОВЕРХНОСТИ

Для задачи дифракции на акустически жёстком конусе вычислим поле на поверхности. Подставляя в (12) найденные выражения для  $\Omega_m$  и  $R_m^N$  и учитывая выражение

$$J_m(x)\dot{H}_m^{(1)}(x) - \dot{J}_m(x)H_m^{(1)}(x) = \frac{2i}{\pi x}$$

для вронскиана, получим

$$u_m(\eta, \nu_0) = \frac{4e^{5\pi i/4}}{\pi\eta} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda/\eta} \frac{J_m\left(e^{i\pi/4}\vartheta\sqrt{2\lambda}\right)}{\dot{H}_m^{(1)}\left(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu_0}\right)} \frac{d\lambda}{\sqrt{2\lambda\nu_0}}.$$

Перейдём к новой переменной интегрирования

$$t = \sqrt{2\lambda\nu_0}.$$

Тогда

$$u(\eta, \nu_0) = A\left(2\nu_0\eta, \frac{\vartheta}{\sqrt{\nu_0}}, \phi\right), \quad (17)$$

где

$$A(\xi, \sigma, \phi) = \frac{1}{2}A_0(\xi, \sigma) + \sum_{m=1}^{+\infty} A_m(\xi, \sigma) \cos(m\phi), \quad (18)$$

$$A_m(\xi, \sigma) = \frac{8e^{5\pi i/4}}{\pi\xi} \int_0^{+\infty} e^{-t^2/\xi} \frac{J_m\left(e^{i\pi/4}\sigma t\right)}{\dot{H}_m^{(1)}\left(e^{i\pi/4}t\right)} dt. \quad (19)$$

Или, возвращаясь к исходным параметрам задачи

$$U = \exp\left(ip^{2/3}\eta\right) A\left(2p^{2/3}\alpha^2\eta, \frac{\theta}{\alpha}, \phi\right). \quad (20)$$

В случае акустически мягкой поверхности конуса вычислим значение нормальной производной поля на поверхности. Имеем

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\nu=\nu_0} = \frac{2p^{2/3}\sqrt{\nu_0}}{Z\eta} \frac{\partial U(\eta, \nu_0)}{\partial \nu} = k\alpha \exp\left(ip^{2/3}\eta\right) B\left(2p^{2/3}\alpha^2\eta, \frac{\theta}{\alpha}, \phi\right), \quad (21)$$

где

$$B(\xi, \sigma, \phi) = \frac{1}{2}B_0(\xi, \sigma) + \sum_{m=1}^{+\infty} B_m(\xi, \sigma) \cos(m\phi), \quad (22)$$

$$B_n(\xi, \sigma) = -\frac{16i}{\pi\xi^2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2/\xi} \frac{J_m(e^{i\pi/4}\sigma t)}{H_m^{(1)}(e^{i\pi/4}t)} t dt. \quad (23)$$

В случае  $m = 0$  формулы (19)–(23) согласуются с полученными ранее в [5].

### §6. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ $A$ И $B$

При вычислении функций  $A_m(\xi, \sigma)$  и  $B_m(\xi, \sigma)$  воспользуемся программами из библиотеки IMSL [7], для чего выразим производную

$$\dot{H}_m^{(1)}(e^{i\pi/4}t) = e^{-i\pi/4} \frac{m}{t} H_m^{(1)}(e^{i\pi/4}t) - H_{m+1}^{(1)}(e^{i\pi/4}t),$$

после чего перейдём к модифицированным функциям Бесселя

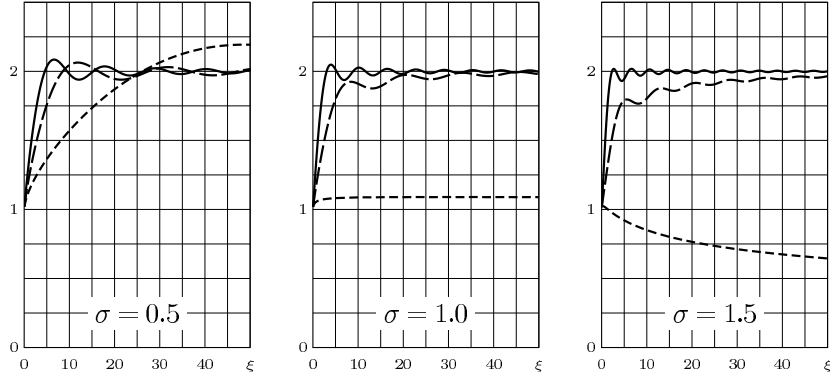
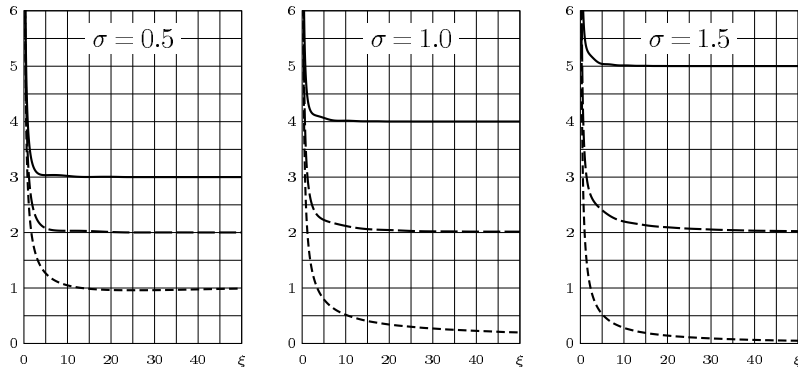
$$J_m(e^{i\pi/4}t) = i^m I_m(e^{-i\pi/4}t), \quad H_m^{(1)}(e^{i\pi/4}t) = \frac{2}{\pi i^{m+1}} K_m(e^{-i\pi/4}t).$$

В результате получим

$$A_m(\xi, \sigma) = \frac{4(-1)^m}{\xi} \int_0^{+\infty} e^{-t^2/\xi} \frac{I_m(e^{-i\pi/4}\sigma t) t dt}{mK_m(e^{-i\pi/4}t) - e^{-i\pi/4}tK_{m+1}(e^{-i\pi/4}t)}, \quad (24)$$

$$B_m(\xi, \sigma) = \frac{8(-1)^m}{\xi^2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2/\xi} \frac{I_m(e^{-i\pi/4}\sigma t)}{K_m(e^{-i\pi/4}t)} t dt. \quad (25)$$

При больших  $\xi$  вычисление интегралов (24), (25) осложнено тем обстоятельством, что подынтегральное выражение сначала нарастает, а лишь затем начинает экспоненциально убывать. Для компенсации

Рис. 1. Функция  $A(\xi, \sigma, \phi)$ .Рис. 2. Функция  $B(\xi, \sigma, \phi)$ .

этого роста можно деформировать контур интегрирования в контур  $[0, t^*] \cup [t^*, t^* + \infty)$ , проходящий через седловую точку

$$t^* = \frac{1}{2} e^{-i\pi/4} \xi(\sigma + 1).$$

Численные значения  $|A|$  и  $|B|$  в зависимости от  $\xi$  представлены на рис. 1 и 2 для  $\sigma = 0.5, 1.0$  и  $1.5$ . Значения при  $\phi = 180^\circ$ , то есть на стороне конуса обращённой в сторону падающей волны, даны сплошными линиями, при  $\phi = 90^\circ$  – штриховыми с длинным штрихом, а

при  $\phi = 0^\circ$  – с коротким штрихом. Значения получены в результате суммирования 30 для  $\sigma = 0.5$ , 40 для  $\sigma = 1.0$  и 70 членов в рядах (18) и (22). Интегрирование проводилось с шагом  $\delta t = 0.05$ . Верхний предел интегрирования в (24), (25) заменялся значением 125.

## §7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построен старший член асимптотики дифракционного поля вблизи поверхности узкого конуса на расстояниях  $z$  порядка  $k^{-1}\alpha^{-2}$  от вершины. Как известно в задаче дифракции плоской волны на конусе имеются 4 безразмерных параметра. Это угол при вершине конуса  $\alpha$ , угол падения  $\theta$ , расстояние до вершины  $k\rho$  и угол  $\phi$ , измеряемый от плоскости падения. Полученные формулы показывают, что в случае узкого конуса поле в старшем порядке определяется тремя параметрами: параметром  $\xi = k\rho\alpha^2$ , отношением угла падения к углу конуса  $\theta/\alpha$  и углом  $\phi$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Бабиц, *Дифракция плоской волны на узком конусе в случае условия Дирихле*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **218** (1994), 3–11.
2. Кирпичникова Н.Я., Попов М.М. *Лучевой метод в задаче дифракции плоской волны на “тонком” конусе с малым углом при вершине*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **409** (2012), 49–54.
3. I. V. Andronov, *High-frequency Asymptotics for Diffraction by a Strongly Elongated Body*. — Antennas and Wireless Propagation Letters, IEEE, V. 8 (2009), p. 872.
4. И. В. Андронов, *Дифракция на сильно вытянутом теле вращения*. — Акуст. журн. **57**, вып. 2 (2011), 147–152.
5. И. В. Андронов, Д. Буш, *Дифракция на узком круговом конусе как на сильно вытянутом теле*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **393** (2011), 12–22.
6. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, М. Физматлит, 1963, с. 1108.
7. *IMSL Math/Library, Special Functions*, Visual Numerics, 1994.

Andronov I. V. Diffraction by a narrow cone at skew incidence.

The scalar problem of plane wave diffraction by a narrow cone is considered. The angle of the cone  $\alpha$  and the angle of incidence are assumed to be small and the field is studied in a boundary layer near the surface at such distances  $z$  from the cone tip that  $kz \sim \alpha^{-2}$ . The parabolic equation



method is applied and the leading order approximation is constructed in the form of an integral.

С.-Петербургский государственный университет      Поступило 1 ноября 2016 г.  
Университетская наб. 7/9  
С.-Петербург 199034, Россия  
*E-mail:* iva--@list.ru