Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 450, 2016 г.

В. С. Самойлов

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА КОЛИЧЕСТВА РЁБЕР В ГРАФЕ, ДОПОЛНЕНИЕ k-ОЙ СТЕПЕНИ КОТОРОГО СВЯЗНО

§1. Введение

Экстремальная теория графов – современная и динамично развивающаяся область теории графов, в которой уже есть немало широко известных результатов. Это, прежде всего, классическая теорема Турана о максимальном количестве рёбер в графе без K_n и другие результаты из области задач о запрещённом подграфе. Есть теоремы о максимальном количестве висячих вершин в остовном дереве графа и другие результаты.

Экстремальная задача, изучаемая в этой работе, имеет прямое отношение к понятию степени графа. Достаточно много известно про степени графов, особенно про квадрат графа. Это, в первую очередь, теорема Флейшнера о том, что квадрат любого двусвязного графа гамильтонов [4]. Кроме того, известна теорема о том, что k-ая степень m-связного графа km-связна, если она не является полным графом, которую доказал Артур Хоббс в 1973 году [5], теорема о гамильтоновости куба связного графа (Чартранд, Капур, 1969 год [6]) и много других интересных результатов.

В данной работе мы накладываем на граф некоторое условие, связанное с его k-ой степенью, и ищем, какое максимальное количество рёбер может быть в этом графе.

Нам понадобятся несколько определений. Для начала напомним классическое определение степени графа.

Определение 1. Будем называть k-ой степенью G^k графа G граф на тех же вершинах, в котором соединены ребром те и только те вершины, расстояние между которыми в графе G не больше, чем k.

Теперь введём несколько новых определений.

Ключевые слова: экстремальная теория графов, степень графа, расстояние в графе.

Определение 2. Будем называть строго k-ой степенью $G^{|k|}$ графа G граф на тех же вершинах, в котором соединены ребром те и только те вершины, расстояние между которыми в графе G равно k.

Определение 3. Будем называть k-ой антистепенью ${}^kG$ графа G граф на тех же вершинах, в котором соединены ребром те и только те вершины, расстояние между которыми в графе G больше либо равно k.

Замечание. Несложно заметить следующие свойства:
1. $E({}^kG) = \cup_{i \geqslant k} E(G^{|i|})$,
2. $E(G^k) = \cup_{i \leqslant k} E(G^{|i|})$,
3. $E(G^{|k|}) = E({}^kG) \cap E(G^k)$,
4. $G^k = \overline{{}^{k+1}G}$.

В работе будут активно использоваться понятия радиуса и диаметра графа, а так же радиуса вершины, определения которых мы сейчас напомним.

Определение 4. *Радиусом вершины* v в графе G будем называть максимальное из расстояний в графе G от этой вершины до остальных вершин графа G. Назовём *радиусом графа* наименьший из радиусов вершин, а *диаметром* – наибольший. Также можно сказать, что диаметр графа – это максимальное из расстояний между вершинами. *Центром графа* называется любая вершина, на которой достигается минимум радиуса.

Радиус и диаметр графа G обозначаются как $R(G)$ и $D(G)$ соответственно. Радиус вершины x, если ясно из контекста, в каком графе измеряется радиус, обозначается как $r(x)$. Если надо упомянуть, что имеется в виду, например, радиус в графе H, то будем писать $r_H(x)$.

Напомним несколько классических обозначений и введём новое. Пусть имеется граф G. Тогда множество его вершин будем обозначать через $V(G)$, а множество его рёбер – через $E(G)$.

Пусть U – некоторое множество его вершин. Индуцированный подграф графа G на вершинах U будем обозначать, как $G(U)$.

Для множеств $U, V \subset V(G)$ через $E(U, V)$ будем обозначать множество рёбер, соединяющих вершину множества U с вершиной множества V.

Через $\overline{G}$ мы будем обозначать *дополнение* графа G, то есть граф на том же множестве вершин, что и G с ребрами, которых нет в G.

Кроме того, напомним классическое определение контролирующего множества.

Определение 5. Контролирующее множество графа G – это такое множество вершин графа, что любое ребро графа инцидентно хотя бы одной вершине из этого множества.

Расстояние между двумя вершинами a, b будем обозначать, как $|ab|$. Ребро между вершинами a и b – как ab, а путь между этими вершинами – как (ab).

Наконец, основные определения статьи.

Определение 6. Граф G будем называть *k-широким*, если для любого разбиения множества вершин графа на два непустых подмножества A и B найдутся такие вершины $a \in A$ и $b \in B$, что $|ab| \geqslant k$. *Шириной* графа G будем называть минимальное такое k, что граф G является k-широким.

Определение 7. Граф G будем называть *k-моноширoким*, если для любого разбиения множества вершин графа на два непустых подмножества A и B найдутся такие вершины $a \in A$ и $b \in B$, что $|ab| = k$. *Моношириной* графа G будем называть минимальное такое k, что граф G является k-моноширoким.

Замечание. Любой k-моноширокий граф, очевидно, является и k-широким. Обратное неверно. Кроме того, несложно заметить, что граф G является k-моноширoким тогда и только тогда, когда граф $G^{|k|}$ связен, и k-широким, тогда и только тогда, когда граф ${}^{k}G$ связен.

И введём ещё одно, вспомогательное определение.

Определение 8. Граф H является k-срезом графа G, если граф H связен и является остовным подграфом графа ${}^{k}G$.

В частности, ${}^{k}G$ является k-срезом графа G тогда и только тогда когда G является k-широким, а $G^{|k|}$ является k-срезом графа G тогда и только тогда, когда G является k-моноширoким. Кроме того, очевидно, что у графа G есть хотя бы один k-срез тогда и только тогда, когда он k-широкий.

В работе мы будем изучать, какое максимальное количество рёбер может быть в k-широких и в k-моноширoких графах. Если точнее, для удобства мы будем изучать количество ребёр в дополнении такого графа, и будем искать минимум этой величины.

В случае $k = 2$ при $n \geqslant 5$ минимальное количество ребер в дополнении как k-широкого, так и k-моноширокого графа на n вершинах равно $n - 1$. Действительно, рассмотрим граф G, полученый из графа K_n выкидыванием рёбер, принадлежащих некоторому (любому) остовному дереву T графа K_n. Ясно, что для того, чтобы было выполнено ${}^2G = G^{|2|} = T$ достаточно, чтобы для любых двух смежных вершин u и v этого дерева существовала третяя вершина w, которая не соединена с вершинами u и v в дереве T. Для $n \geqslant 5$ в качестве такого дерева подходит цепочка. Таким образом, для $n \geqslant 5$ в дополнении k-широкого и k-моноширокого графа на n вершинах может быть $n-1$ ребро.

Пусть в $\overline{G}$ не больше, чем $n - 2$ ребра. Тогда, поскольку рёбер, которые есть в G, точно нет в ${}^2G$ и $G^{|2|}$, в этих графах тоже не больше, чем $n - 2$ ребра и, следовательно, они не могут быть связны. Отсюда ясно, что при $n \geqslant 7$ минимальное количество рёбер, которое может быть в дополнении 2-широкого и 2-моноширокого графа на n вершинах, равно $n - 1$.

Таким образом, в работе мы будем заниматься случаем $k \geqslant 3$. Основные факты, которые будут доказаны в работе:

Теорема 1. *Пусть G – 3-моноширокий граф на $n \geqslant 10$ вершинах. Тогда минимальное количество ребер в $\overline{G}$ равно $3n - 7$.*

Теорема 2. *Пусть G – 3-широкий граф на $n \geqslant 7$ вершинах. Тогда минимальное количество ребер в $\overline{G}$ равно $3n - 8$.*

Теорема 3. *Для k-широкого графа G на n вершинах верна оценка*

$$|E(\overline{G})| > (n - 2k)\,(2k - 4[\log_2 k] - 1)\,.$$

§2. Точная верхняя оценка количества рёбер в 3-широких и 3-моношироких графах.

Для начала докажем одну простую лемму.

Лемма 1. *Для любого $k \geqslant 2$ и связного графа G на $n > 1$ вершинах k-срез H графа G не может иметь одноточечного контролирующего множества.*

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть $a \in V(G)$ и $\{a\}$ – контролирующее множество графа H. Поскольку граф H связен, из каждой его вершины выходит по крайней мере одно ребро. Поскольку $\{a\}$ – контролирующее множество графа H, любое его ребро инцидентно a. Таким образом, в графе H любая вершина смежна с a. Следовательно, по определению графа H, в графе G все вершины находятся на расстоянии $\geqslant k$ от a. Поскольку $k \geqslant 2$, это означает, что в графе G никакая вершина не смежна с a. То есть, в графе G вершина a изолирована, что противоречит связности графа G. □

Отсюда очевидно следуют два факта.

Следствие 1. *Для любого $k \geqslant 2$ и связного k-широкого графа G более, чем на одной вершине, граф ${}^kG$ не может иметь одноточечного контролирующего множества.*

Следствие 2. *Для любого $k \geqslant 2$ и связного k-моноширокого графа G более, чем на одной вершине, граф $G^{|k|}$ не может иметь одноточечного контролирующего множества.*

Теперь докажем более сильную лемму, но только для моношироких графов.

Лемма 2. *При $k \geqslant 3$ для любого k-моноширокого графа G граф $G^{|k|}$ не может иметь контролирующего двоеточия.*

Доказательство. Пусть $G^{|k|}$ имеет контролирующее двоеточие $\{a, b\}$. Граф $G^{|k|}$ связен, значит, из любой вершины в нём выходит хотя бы одно ребро, а так как $\{a, b\}$ – контролирующее множество, то любое ребро графа $G^{|k|}$ входит одним концом в a или b. Разделим все вершины графа $G^{|k|}$, кроме a и b, на два множества: A – те, которые смежны с a, B – все остальные. Легко видеть, что в графе $G^{|k|}$ все вершины множества B смежны с b.

Рассмотрим кратчайший путь l между вершинами a и b в графе G. Пусть длина пути l больше 1. Тогда рассмотрим среднюю вершину x этого пути (или, при нечётной длине пути l, одну из двух средних). Вершина x смежна с a или с b в графе $G^{|k|}$, то есть, расстояние от неё до a или до b в графе G должно быть равно k. Следовательно, расстояние $|ab|$ может быть равно только $1, 2k-1, 2k$ или $2k+1$. Так как $1 < k < 2k-1, 2k, 2k+1$, то из этого следует, что в графе $G^{|k|}$ вершины a и b несмежны.

Далее, по следствию из леммы 1, в графе $G^{|k|}$ нет одноточечного контролирующего множества, поэтому множество A непусто. То есть, существует некая вершина, находящаяся на расстоянии ровно k от a в графе G. Значит, есть вершины на расстоянии $1, 2, \ldots, k-1$ от a в графе G, причём все эти вершины лежат в множестве B.

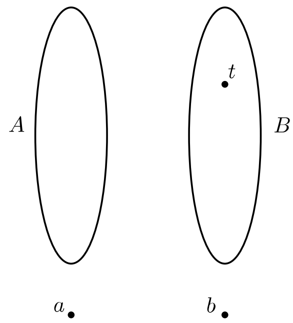

Рис. 1. Схема графа и вершина t.

Возьмём какую-то вершину $t \in B$, такую, что $|at|_G = k - 2 > 0$. Как мы знаем, так как $t \in B$, то $|tb|_G = k$. Следовательно, в графе G есть путь длины k, соединяющий t и b. На этом пути есть вершина s, смежная с t. При этом $|sb|_G = k - 1$.

Так как s смежна с t в графе G и $|ta|_G = k - 2$, то $|sa|_G \leqslant k - 1$ и поэтому $s \notin A$. Кроме того, так как $|sb|_G = k - 1$, то $s \notin B$ и $s \neq b$. Следовательно, $s = a$ и $|ab|_G = |sb|_G = k - 1$, что противоречит тому, $|ab|_G$ может равняться только $1, 2k - 1, 2k, 2k + 1$, поскольку $1 < k - 1 < 2k - 1 < 2k < 2k + 1$. $\square$

Далее мы будем оценивать количество рёбер в графах, строгая степень или антистепень которого связна, используя наличие в них паросочетания размера три. Как будет доказано в следующей лемме, наличие такого паросочетания следует из того, что минимальное контролирующее множество имеет размер не меньше трёх. В свою очередь, согласно лемме 2, размер минимального контролирующего множества всегда не меньше трёх у связной строгой степени при $k \geqslant 3$. У связной антистепени может быть контролирующее множество размера 2 (но не 1, согласно лемме 1), и мы будем отдельно оценивать количество рёбер в этом случае.

Лемма 3. *Пусть G – связный граф на $n \geqslant 7$ вершинах, а H – его k-срез (где $k \geqslant 3$), в котором размер минимального контролирующего множества не меньше 3. Тогда в H есть паросочетание размера три.*

Доказательство. Поскольку H – срез графа G, то в нём то же самое множество вершин, следовательно, в графе H тоже не меньше семи вершин.

Будем доказывать, что максимальное паросочетание имеет размер не меньше трёх от противного.

Пусть $\{e\}$ – максимальное паросочетание графа H. Тогда два конца ребра e – контролирующее множество, что противоречит условию леммы.

Тогда пусть $\{ab, cd\}$ – максимальное паросочетание графа H. Любое ребро графа H входит хотя бы одним концом в одну из четырёх вершин $\{a, b, c, d\}$. Введём обозначение $U = V(G) \setminus \{a, b, c, d\}$. Заметим, что если есть две вершины $\bar{a}, \bar{b} \in U$ смежные в графе H с вершинами a и b соответственно, то можно в паросочетании заменить ребро ab на эти два ребра, что увеличит размер паросочетания до трёх.

Пусть в графе H вершина a смежна хотя бы с двумя вершинами множества U, а именно, с вершинами x и y. Тогда, если из вершины b выходит хотя бы одно ребро в вершину из U, то эта вершина – либо не x, либо не y, и имеет место описанная выше ситуация.

Таким образом, в графе H либо a и b смежны только с одной вершиной множества U, причём с одной и той же, либо какая-то из вершин a и b не смежна ни с одной вершиной множества U. Аналогично с вершинами c и d. Разберём три варианта.

1. Пусть в графе H все четыре вершины a, b, c, d смежны только с одной вершиной множества U: вершины a и b смежны с вершиной x, а вершины c и d – с вершиной y. Тогда в графе всего шесть вершин, противоречие.

2. Теперь, пусть в графе H вершины b и d не смежны ни с одной вершиной множества U. При этом, если в графе H нет ребра bd, то в этом графе имеется контролирующее множество $\{a, c\}$, что противоречит условию леммы. Значит, ребро bd есть.

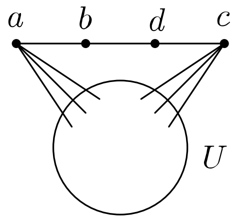

Рис. 2. Вариант **2.**

Пусть есть две различные вершины $x, y \in U$, смежные в графе H с вершинами a и c соответственно. Тогда в графе H есть паросочетание $\{ax, bd, cy\}$.

Пусть таких вершин x, y нет. Это означает, что если в графе H вершина a смежна с некоторой вершиной $x \in U$, и вершина c смежна с некоторой вершиной $y \in U$, то $y = x$. При этом, согласно условию леммы, в графе H нет контролирующего двоеточия, в частности, множества $\{a, d\}$ и $\{b, c\}$ не являются контролирующими, откуда следует, что как a, так и c смежны с некоторыми вершинами множества U в графе H. Согласно доказаному выше, это означает, что обе эти вершины смежны только с одной и той же вершиной $x \in U$. Таким образом, $n = 5$, что противоречит условию леммы.

3. И, наконец, пусть из вершин c и d выходит в U только по одному ребру, причём в одну и ту же вершину x, а из вершины b не выходит ни одного ребра в U. Поскольку $n \geqslant 7$, в U хотя бы 3 вершины. Кроме того, любая вершина из U смежна в графе H с какой-то из вершин $\{a, b, c, d\}$. При этом вершина b ни с кем не смежна, а c и d смежны только с x. Поэтому все остальные вершины множества U, кроме x (их как минимум две) смежны с вершиной a. Обозначим одну из этих вершин за y.

Тогда, если в H есть ребро bc, то есть и паросочетание $\{ay, bc, dx\}$. Значит, ребра bc нет. Аналогично, нет и ребра bd.

Теперь, пусть вершина a смежна в графе H с одной из вершин x, c, d – неважно, с какой именно, например, с x. Тогда есть только две вершины – c и d – которые могут быть от a на расстоянии меньшем чем k в графе G. Заметим, что, поскольку $k \geqslant 3$, то есть путь длины 2, начинающийся в вершине a и состоящий только из вершин a, c и d.

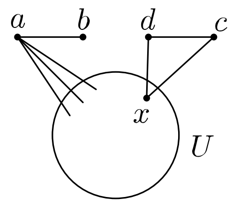

Рис. 3. Вариант **3.**

Тогда $cd \in E(G)$, что противоречит нашему соглашению о том, что $cd \in E(H)$.

Итак, вершины c, d, x не смежны в графе H ни с a, ни с b, ни с вершинами множества $U \setminus \{x\}$. Следовательно, треугольник cdx образует компоненту связности графа H, что противоречит его связности.

□

Итак, мы доказали основные леммы для произвольного $k \geqslant 3$. Теперь докажем важную структурную лемму о 3-срезе графа, которая поможет в доказательстве оценок числа рёбер как в 3-широком, так и 3-моноширoком графах.

Лемма 4. *Пусть G – граф на n вершинах, а H – его 3-срез. Пусть в H есть паросочетание $\{a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2\}$ размера три и имеются множества $M = \{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2\}$ и $U = V(G) \setminus M$. Тогда:*

1) *В графе G между вершинами множества M не больше 6 рёбер, а именно, степень каждой вершины в графе $G(M)$ не больше двух.*

2) *Каждая вершина множества U смежна не более, чем с тремя вершинами множества M. В частности, $|E_G(M, U)| \leqslant 3(n-6)$. Если же $|E_G(M, U)| = 3(n-6)$, то каждая вершина множества U смежна ровно с одним концом каждого из рёбер паросочатания*

$$\{a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2\}.$$

3) *Если в графе G между вершинами множества M ровно 6 рёбер, то либо $|E(\overline{G(U)})| \geqslant 2$, либо $|E_G(M, U)| \leqslant 3(n-6) - 2$.*

Доказательство.

1) Докажем, что в графе $G(M)$ степени всех вершин не больше, чем 2. Действительно, рассмотрим, например, вершину a_1. В графе G

она не смежна с a_2, поскольку $|a_1a_2|_G \geqslant 3$. Кроме того, поскольку $|b_1b_2|_G \geqslant 3$, то у b_1 и b_2 не может быть общей смежной вершины. Поэтому вершина a_1 может быть смежна максимум с одной из вершин b_1 и b_2. Аналогично, a_1 может быть смежна максимум с одной из вершин c_1 и c_2. Следовательно, степень вершины a_1 в графе $G(M)$ не больше 2. По аналогичным причинам, степени остальных вершин тоже не превосходят двух. Поэтому в графе $G(M)$ не больше 6 рёбер.

2) Рассмотрим произвольную вершину множества U. Поскольку $|a_1a_2|_G \geqslant 3$, то у a_1 и a_2 не может быть общей смежной вершины. Поэтому любая вершина x множества U смежна не более, чем с одной из них. И так же, она смежна не более, чем с одной из двух вершин b_1, b_2 и из двух вершин c_1, c_2. Следовательно, вершина x смежна не более, чем с тремя вершинами множества M. Значит, $|E_G(U,M)| \leqslant 3(n-6)$ и равенство может наступить только в случае, если каждая вершина x множества U смежна ровно с одной из вершин a_1 и a_2, ровно с одной из вершин b_1 и b_2 и ровно с одной из вершин c_1 и c_2.

3) Пусть в графе $G(M)$ ровно 6 рёбер. Тогда, как мы знаем, степень каждый вершины в графе $G(M)$ равна 2. Как известно, каждая компонента связности 2-регулярного графа является циклом. Поскольку длина цикла не может быть меньше трёх, то граф $G(M)$ либо является циклом длины 6, либо состоит из двух компонент связности, которые являются циклами длины 3. Разберём два этих варианта.

а. Пусть граф $G(M)$ – цикл длины 6.

Исследуем вопрос о порядке вершин в этом цикле. Поскольку $|b_1b_2|_H = 1$, то $|b_1b_2|_G \geqslant 3$. Однако вершины цикла длины 6 могут лежать друг от друга на расстоянии $\geqslant 3$, только если это противоположные вершины цикла. Таким образом, b_1 и b_2 обязательно являются противоположными вершинами цикла. То же касается вершин a_1 и a_2, а также вершин c_1 и c_2. Таким образом, соседями вершины b_1 в цикле являются вершины a_i и c_j для каких-то i, j. И, поскольку мы не делали никакого различия между вершинами a_1 и a_2 и между вершинами c_1 и c_2, то путём простого переобозначения можно добиться того, чтобы соседями вершины b_1 были a_1 и c_1.

Таким образом, можно считать, что мы имеем дело с циклом $(a_1b_1c_1a_2b_2c_2)$.

Предположим, что $|E_G(M,U)| \geqslant 3(n-6)-1$ и в графе $\overline{G(U)}$ не более одного ребра и докажем, что в таком случае в графе H меньше, чем $n-1$ ребро. Поскольку H – связный подграф графа ${}^3G$, а в связном графе на n вершинах должно быть как минимум $n-1$ ребро, этого достаточно для доказательства пункта **3)**.

Докажем следующее утверждение: если некая вершина $x \in U$ смежна хотя бы с одной вершиной множества M в графе G и хотя бы с одной – в графе H, то как минимум с двумя вершинами множества M она не смежна ни в графе G, ни в графе H. Действительно, заметим, что в силу дискретной непрерывности для любого графа A и любых вершины x и пути (ab) в нём верно следующее:

$$\forall l : |xa|_A \leqslant l \leqslant |xb|_A \quad \exists c \in (ab) : |xc|_A = l.$$

Значит, если вершина $x \in U$ смежна с вершиной $t \in M$ в графе G и с вершиной $s \in M$ в графе H, то $|xt|_G = 1$ и $|xs|_G \geqslant 3$, и на дугах (ts) и (st) цикла M найдутся вершины u и v соответственно, такие, что $|xu|_G = |xv|_G = 2$.

Пусть $k_i = |\{y \in M : |xy|_G = i\}|$. Согласно утверждению выше, если $k_1, k_3 \geqslant 1$, то $k_2 \geqslant 2$. При этом $k_1 + k_2 + k_3 \leqslant |M| = 6$. Следовательно, если $k_1, k_3 \geqslant 1$, то $k_1 + k_3 \leqslant 4$. В частности, если $k_1 = 2$, то $k_3 \leqslant 2$, а если $k_1 = 3$, то $k_3 \leqslant 1$.

Во множестве $E_G(M,U)$ не меньше, чем $3(n-6)-1$ рёбер. Следовательно, согласно пункту **2)** есть $n-7$ вершин множества U, которые смежны с тремя вершинами множества M и ещё одна вершина x, которая смежная с двумя или тремя. Следовательно, $n-7$ вершин множества U смежны в графе H не более, чем с одной вершиной множества M, а оставшаяся вершина x – не более, чем с двумя.

Итого, во множестве $E_H(M,U)$ не более, чем $(n-7)+2 = n-5$ рёбер.

Любая вершина множества M находится от двух вершин множества M на расстоянии 1 (так как это цикл), и от двух – на расстоянии 2. Значит, степень каждой вершины графа $H(M)$ не больше единицы. Следовательно, в графе $H(M)$ не больше, чем 3 ребра.

В $\overline{G(U)}$ не больше одного ребра, следовательно, $D(G(U)) \leqslant 2$. Следовательно, $H(U)$ – антиклика графа H.

Итого, в графе H не больше, чем $(n-5)+3 = n-2$ ребра.

b. Пусть граф $G(M)$ представляет собой две треугольные компоненты связности. Поскольку вершины каждого из рёбер паросочетания $\{a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2\}$ должны находиться на расстоянии не меньше 3, они не могут находиться в одном треугольнике. Поэтому треугольники имеют вид $(a_1b_1c_1)$ и $(a_2b_2c_2)$ с точностью до переобозначений вида $a_1 \leftrightarrow a_2$. Предположим, что во множестве $E_G(M,U)$ как минимум $3(n-6)-1$ ребро и в графе $\overline{G(U)}$ не более одного ребра; и докажем, что в таком случае в графе H есть изолированная вершина. Поскольку H – связный подграф графа ${}^3G$, а в связном графе на $n > 1$ вершинах не может быть изолированной вершины, этого достаточно для доказательства пункта **3**.

Заметим, что, поскольку в графе $\overline{G(U)}$ не более одного ребра, то граф $H(U)$ – антиклика графа H.

Пусть некая вершина $z \in U$ смежна в графе G хотя бы с одной вершиной каждого из треугольников. Тогда, поскольку треугольники являются кликами, вершина z находится на расстоянии не больше, чем 2 от всех вершин обоих треугольников. Кроме того, $D(G(U)) \leqslant 2$, поэтому $r_G(z) \leqslant 2$. Следовательно, вершина z изолирована в графе H.

Теперь, пусть каждая вершина $z \in U$ не смежна ни с одной вершиной одного из треугольников. Пусть A – множество вершин U, не смежных с вершинами второго треугольника, а B – множество вершин U, не смежных с вершинами первого треугольника.

Поскольку граф G связен, существуют смежные (в графе G) вершины $x \in A$ и $y \in B$. Поскольку во множестве $E_G(M,U)$ как минимум $3(n-6)-1$ ребро, есть не больше одной вершины из U, которая смежна менее, чем с тремя вершинами из M. Значит, x или y смежна с тремя вершинами из M. Не умаляя общности, это вершина x. Тогда она находится на расстоянии 1 от всех вершин первого треугольника, и, значит, вершина y находится от них на расстоянии 2. Также, поскольку $D(G(U)) \leqslant 2$, вершина y находится на расстоянии не более, чем 2 от всех вершин множества U. Наконец, поскольку вершина y смежна с какой-то вершиной второго треугольника, то она находится на расстоянии не более, чем 2 от всех вершин второго треугольника. Таким образом, что $r_G(y) \leqslant 2$, и, значит, она изолирована в графе H. □

Из этой леммы немедленно следует следующее утверждение:

Следствие 3. *Пусть у графа G на n вершинах есть 3-срез H, в котором присутствует паросочетание размера 3. Тогда $|E(\overline{G})| \geqslant 3n-8$.*

Теперь, наконец, перейдём к доказательству основных теорем.

Теорема 1. *Пусть G – 3-моноширокий граф на $n \geqslant 10$ вершинах. Тогда минимальное количество рёбер в $\overline{G}$ равно $3n-7$.*

Доказательство. Так как граф G является 3-моношироким, то граф $G^{|3|}$ является его 3-срезом. Кроме того, согласно лемме 3, в $G^{|3|}$ есть паросочетание размера три. Таким образом, выполняются условия леммы 4 при $H = G^{|3|}$. Введём те же обозначения, что и в лемме 4: a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 – рёбра паросочетания в $G^{|3|}$, M – множество концов рёбер паросочетания, $U = V(G) \setminus M$.

Представим количество рёбер в графе $\overline{G}$ в виде суммы:

$$|E(\overline{G})| = |E(\overline{G(M)})| + |E_{\overline{G}}(M,U)| + |E(\overline{G(U)})|.$$

Согласно первому пункту леммы 4 верно, что

$$|E(G(M))| \leqslant 6 \Rightarrow |E(\overline{G(M)})| \geqslant C_6^2 - 6 = 9.$$

Согласно второму – что

$$|E_G(M,U)| \leqslant 3(n-6) \Rightarrow$$
$$|E_{\overline{G}}(M,U)| \geqslant |M| \times |U| - 3(n-6) = 6(n-6) - 3(n-6) = 3(n-6).$$

Также следует заметить, что $|E(\overline{G(U)})| \geqslant 0$. Таким образом, имеет место неравенство

$$|E(\overline{G})| \geqslant 9 + 3(n-6) + 0 = 3n - 9.$$

Рассмотрим все варианты значений $|E(G(M))|$.

Пусть $|E(G(M))| = 6$. Тогда, согласно пункту **3** леммы 4,

$$\left[\begin{array}{l} |E_{\overline{G}}(M,U)| \geqslant 3(n-6) + 2 \\ \quad |E(\overline{G(U)})| \geqslant 2. \end{array}\right.$$

В обоих случаях получается, что

$$|E(\overline{G})| \geqslant 9 + 3(n-6) + 2 = 3n - 9 + 2 = 3n - 7.$$

Теперь, пусть $|E(G(M))| \leqslant 4$. Тогда

$$|E(\overline{G})| \geqslant 3(n-6) + (15-4) = 3n - 7.$$

Наконец, пусть $|E(G(M))| = 5$.

Тогда $|E(\overline{G(M)})| = 10$. Как мы уже упоминали в начале доказательства теоремы, из леммы 4 следует неравенство $|E_{\overline{G}}(M,U)| \geqslant 3(n-6)$, а также имеет место очевидное неравенство $|E(\overline{G(U)})| \geqslant 0$. Следовательно,

$$|E(\overline{G})| \geqslant 10 + 3(n-6) = 3n - 8.$$

Докажем неравенство $|E(\overline{G})| \geqslant 3n - 7$ от противного.

Действительно, пусть $|E(\overline{G})| = 3n - 8$. Это равенство может иметь место только в том случае, если оба неравенства $|E_{\overline{G}}(M,U)| \geqslant 3(n-6)$ и $|E(\overline{G(U)})| \geqslant 0$ обращаются в равенства.

Итак, предположим, что $|E_{\overline{G}}(M,U)| = 3(n-6)$ и $G(U)$ – клика в графе G. Согласно пункту **2)** леммы 4, равенство $|E_{\overline{G}}(M,U)| = 3(n-6)$ (а значит, и $|E_G(M,U)| = 3(n-6)$) означает, что каждая вершина множества U смежна ровно с одним концом каждого из рёбер паросочетания $\{a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2\}$.

Несложно убедиться, что если в графе $G(M)$ ровно 5 рёбер, то он образует либо цепочку длины 5, либо треугольник и цепочку длины 2. Действительно, степени всех вершин в графе $G(M)$ не больше 2. Значит, поскольку рёбер в этом графе ровно пять, то степени как минимум четырёх вершин равны двум. Следовательно, обе вершины какого-то из рёбер паросочетания $\{a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2\}$ имеют степень два. Не умаляя общности, это ребро b_1b_2. Вершина b_1 смежна с одной из вершин a_1, a_2 и с одной из вершин c_1, c_2. Опять же, не умаляя общности, с a_1 и c_1. Вершина b_2 также смежна с одной из вершин a_1, a_2 и с одной из вершин c_1, c_2. Поскольку вершины a_1 и a_2 не могут быть смежны с одной и той же вершиной в графе G, то вершина b_2 в графе G смежна с вершинамой a_2. Аналогично, вершина b_2 смежна с вершиной c_2.

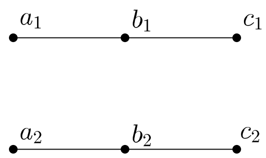

Рис. 4. Часть графа $G(M)$.

Помимо этих четырёх рёбер, есть ещё одно ребро, причём оно соединяет одну из вершин a_1, a_2 с одной из вершин c_1, c_2. В зависимости от того, как мы его проведём, получится либо путь длины 5 (в случае рёбер a_1c_2 и a_2c_1), либо треугольник и путь длины 2 (в случае рёбер a_1c_1 и a_2c_2).

Итак, разберём эти два варианта.

1. *Пусть* $G(M)$ *– путь* $(a_1b_1c_1)$ *и цикл* $(a_2b_2c_2)$.

Заметим что, поскольку $G(U)$ – клика в графе G, то $G^{|3|}(U)$ – антиклика в графе $G^{|3|}$. Тем не менее, граф $G^{|3|}$ связен, и это означает, что каждая вершина множества U должна быть смежна в графе $G^{|3|}$ с какой-то вершиной множества M.

Кроме того, заметим, что если некая вершина $x \in U$ смежна в графе G с какой-то вершиной треугольника $(a_2b_2c_2)$, то

$$|xa_2|_G, |xb_2|_G, |xc_2|_G \leqslant 2.$$

Пусть существует такая вершина $z \in U$, которая смежна с вершиной b_1 или с обеими вершинами a_1, c_1 в графе G. Тогда

$$|za_1|_G, |zb_1|_G, |zc_1|_G \leqslant 2.$$

Но, поскольку вершина z не может быть изолированной в графе $G^{|3|}$, в графе G она не смежна ни с одной из вершин треугольника $(a_2b_2c_2)$ (иначе $r_G(z) = 2$). Значит, поскольку z смежна с тремя вершинами множества M, она смежна со всеми тремя вершинами пути $(a_1b_1c_1)$. И, поскольку граф G связен, есть вершина $x \in U$, смежная с какой-то из вершин треугольника $(a_2b_2c_2)$ (не умаляя общности, x смежна с a_2). Однако в таком случае, поскольку $G(U)$ – клика, то $|xz|_G = 1$, и, следовательно $|xa_1|_G, |xb_1|_G, |xc_1|_G \leqslant 2$. Кроме того, $|xa_2|_G = 1$ и, следовательно, $|xb_2|_G, |xc_2|_G \leqslant 2$. Таким образом, $r_G(x) \leqslant 2$, что противоречит связности H.

В частности, в графе G никакая вершина множества U не смежна с вершиной b_1, следовательно, каждая вершина множества U смежна с вершиной b_2 в графе G. А значит, в графе $G^{|3|}$ ни одна из вершин множества U не может быть смежна ни с одной из вершин треугольника $(a_2b_2c_2)$. Поэтому, каждая вершина множества U в графе $G^{|3|}$ смежна с одной из вершин пути $(a_1b_1c_1)$.

Поскольку граф G связен, существует вершина $x \in U$, смежная хотя бы с одной из вершин пути $(a_1b_1c_1)$. Как мы знаем, это означает, что она смежна с одной из вершин a_1, c_1. Не умаляя общности, вершина x смежна с вершиной a_1. Тогда ясно, что вершина x смежна с c_1 в графе $G^{|3|}$ (потому что ни с какой другой она не может быть смежна). Легко заметить, что, поскольку $|xc_1|_G = 3$, ни одна из вершин множества U не смежна в графе G с вершиной c_1. Таким образом, в графе G вершина b_1 – единственный сосед вершины c_1. Как доказано выше, вершина a_1 – единственный сосед вершины b_1, помимо c_1. Тогда, поскольку $|c_1c_2|_G = 3$, вершина a_1 смежна с вершиной c_2 в графе G. Но это противоречит нашему предположению о структуре графа $G(M)$.

2. *Пусть вершины множества M образуют путь* $(a_1b_1c_1a_2b_2c_2)$ *длины* 5. Для удобства рассуждений переименуем вершины a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 в $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ соответственно (то есть, таким образом, что $\forall i = 0 \ldots 4$ вершины a_i и a_{i+1} смежны в графе G), и будем нумеровать их по модулю 6, например, $a_7 = a_1$.

Посмотрим, с какими тремя вершинами цепочки может быть смежна вершина $x \in U$. Во-первых, она должна быть соединена ровно с одной вершиной из $\{a_0, a_3\}$, ровно с одной из $\{a_1, a_4\}$, и ровно с одной из $\{a_2, a_5\}$. Соответственно, в совокупности есть 8 вариантов. Сразу заметим, что два из них – когда x соединена с тремя вершинами через одну (то есть, с a_0, a_2 и a_4 или с a_1, a_3 и a_5) – невозможны, так как в этих случаях радиус вершины x в графе G оказывается равным двум.

В остальных шести вариантах, как несложно убедиться, вершина x оказывается соединена с тремя вершинами a_{i-1}, a_i, a_{i+1}. Действительно, если вершина не соединена с тремя вершинами через одну, то она соединена с какими-то двумя соседними вершинами, допустим, с a_i и a_{i+1}. Тогда ей остаётся быть соединённой ещё с одной из вершин a_{i-1} и a_{i+2}. Обе они являются соседними к одной из вершин a_i, a_{i+1}.

Разделим вершины множества U на 6 типов согласно тому, с какими из вершин множества M они смежны в графе G. Вершинами типа i будем считать вершины, смежные с a_{i-1}, a_i и a_{i+1}.

Для удобства назовём вершину множества M свободной, если она в графе G не смежна ни с одной из вершин множества U и занятой в противном случае.

Докажем, что в множестве M есть как минимум 2 свободные вешины. Действительно, пусть есть не более одной свободной вершины. Пусть a_k – единственная свободная вершина множества M (или любая вершина множества M, если свободных вершин нет). Вершина a_{k-1} или вершина a_{k+1} смежна с a_k в графе G и обе эти вершины занятые. Не умаляя общности, a_{k-1} смежна с a_k в графе G. Рассмотрим вершину $x \in U$, смежную с a_{k-1} в графе G. Поскольку для любой вершины $a_i \neq a_k$ множества M есть вершина из U, смежная с a_i, ясно, что $r_G(x) \leqslant 2$.

Таким образом, в множестве M есть как минимум две свободные вершины. Если это две вершины a_k и a_{k+1}, то в множестве U могут присутствовать только вершины типов $k+3$ и $k+4$. Если это две вершины a_k и a_{k+2} – то только типа $k+4$. А если это две вершины

a_k и a_{k+3}, то вершины множества U не могут быть вообще никакого типа.

Отсюда следует, что из шести вышеописаных типов вершин реально присутстовать могут максимум два. Причём, если их два, то это два соседних типа.

Докажем, что в графе $G^{|3|}$ все вершины множества U – висячие. Каждая вершина множества U может быть смежна в графе $G^{|3|}$ только с вершинами множества M. Легко убедиться в том, что вершины типов 0, 2, 3 и 5 могут быть смежны в графе $G^{|3|}$ только с одной вершиной множества M (например, вершина x типа 0 смежна с вершинами a_5, a_0 и a_1, при этом $|xa_2|, |xa_4| \leqslant 2$, значит, если $|xa_i| = 3$, то $i = 3$). Значит, если в графе $G^{|3|}$ есть невисячая вершина, то это вершина типа 1 или 4.

Не умаляя общности, это вершина x типа 1. Две вершины, с которыми может быть смежна вершина типа 1 в графе $G^{|3|}$ – это a_4 и a_5. Давайте проверим, что $|xa_5| \neq 3$. Действительно, если среди множества U есть только вершины типа 1 или есть, кроме того, вершина типа 2, то $|xa_5| = 4$. Если, кроме вершин типа 1, есть вершина типа 0, то $xa_5 = 2$ (поскольку вершина типа 0 смежна с a_5).

Итак, в графе $G^{|3|}$ все вершины множества U – висячие. Значит, их можно выкинуть без потери связности. Таким образом, граф $G^{|3|}(M)$ связен.

Поскольку в графе G есть рёбра $a_0a_1, \ldots, a_4a_5$, в нём $|a_ia_j| \leqslant |i-j|$. Поэтому в графе $G^{|3|}$, кроме заведомо существующих рёбер a_0a_3, a_1a_4, a_2a_5 могут быть только рёбра a_0a_4, a_1a_5, a_0a_5. В связном графе на шести вершинах обязательно есть хотя бы 5 рёбер, поэтому в графе $G^{|3|}(M)$ есть хотя бы два из рёбер a_0a_4, a_1a_5, a_0a_5.

Пусть есть вершина x типа 0. Она смежна в графе G с вершинами a_0, a_1, a_5, поэтому тогда $|a_0a_5| \leqslant 2, |a_1a_5| \leqslant 2$, и графе $G^{|3|}(M)$ есть не больше 4 рёбер. Аналогично, если есть вершина типа 5. Значит, нет вершин типов 0 и 5, могут быть только вершины типов 1–4.

Поскольку в графе $G^{|3|}$ из рёбер a_0a_4, a_1a_5, a_0a_5 есть хотя бы два, обязательно есть ребро a_0a_4 или a_1a_5. Не умаляя общности, в графе $G^{|3|}$ есть ребро a_0a_4. Рассмотрим путь l длины 3, с началом в вершине a_0 и концом в вершине a_4. Пусть на этом пути есть только одна вершина x множества U. Тогда в графе G эта вершина смежна с одним из двух концов пути l и находится на расстоянии 2 от другого. Если она смежна с a_0, то это вершина типа 1. Но тогда $|xa_4| = 3$. Если же вершина x находится на расстоянии 2 от a_0, то это вершина типа 2. Но тогда $|xa_4| = 2$.

Теперь, пусть на пути l две вершины $x, y \in U$. Тогда вершина x смежна с a_0 (то есть, это вершина типа 1), а вершина y смежна с a_4 (то есть, это вершина типа 3 или 4). Однако, как мы знаем, если в графе G есть вершины двух различных типов, то это соседние типы. Противоречие.

Итак, если граф G является 3-моноширокими, то в $\overline{G}$ найдётся не менее, чем $3n-7$ рёбер. На рисунке 5 приведён пример, как их может быть $3n-7$.

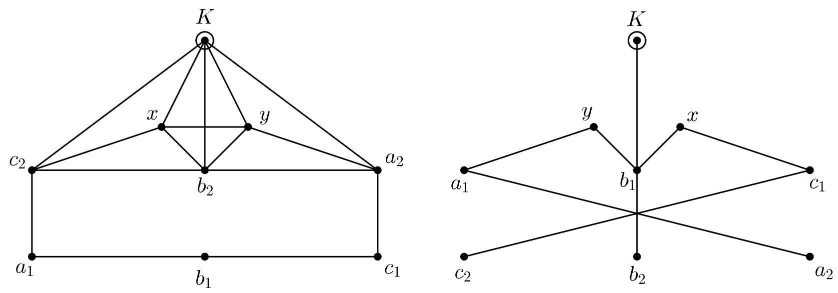

Рис. 5. Графы G и $G^{|3|}$.

На рисунке слева изображён граф G, а справа – граф $G^{|3|}$. Здесь обозначены вершины $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, x, y$, а остальные $n-8$ вершин содержатся в клике K. Также все вершины клики K смежны с вершинами x, y, a_2, b_2, c_2.

Посчитаем количество рёбер в $\overline{G}$. В графе $G(V(G) \setminus V(K))$ имеется 11 рёбер, значит, в $\overline{G}(V(G) \setminus V(K))$ их $\frac{8\times 7}{2} - 11 = 28 - 11 = 17$. Кроме того, $|E_{\overline{G}}(V(K), V(G) \setminus V(K))| = 3(n-8)$. Всего

$$3(n-8) + 17 = 3n - 24 + 17 = 3n - 7. \qquad \square$$

Итак, мы нашли точную оценку на количество рёбер 3-моноширокого графа. Лемма 4 и одна несложная идея помогут нам сделать это и в случае 3-широких графов.

Теорема 2. *Пусть G – 3-широкий граф на $n \geqslant 7$ вершинах. Тогда минимальное количество рёбер в графе $\overline{G}$ равно $3n - 8$.*

Доказательство. Согласно Лемме 1, минимальное контролирующее множество в графе ${}^3G$ имеет размер не меньше двух. Разберём два варианта: когда оно имеет размер 2, и когда больше.

Пусть минимальное контролирующее множество ${}^3G$ имеет размер хотя бы три. По условию теоремы, G – 3-широкий граф, следовательно, граф ${}^3G$ связен. Следовательно, он является 3-срезом. Поэтому можно применить лемму 3, согласно которой в ${}^3G$ есть паросочетание размера 3. Поэтому выполнены условия леммы 4, согласно следствию из которой в $\overline{G}$ есть хотя бы $3n - 8$ рёбер.

Теперь, пусть минимальное контролирующее множество ${}^3G$ состоит из двух вершин a и b. Докажем, что $|ab|_G \geqslant 5$. Действительно, пусть $|ab|_G \leqslant 4$. Тогда существует вершина c, находящаяся на расстоянии не больше, чем 2 от обеих вершин a и b. Эта вершина, следовательно, не смежна в ${}^3G$ ни с a, ни с b, что противоречит определению контролирующего множества.

Итак, действительно, $|ab|_G \geqslant 5$. Следовательно, в графе G есть вершины c и d на расстоянии ровно 5 друг от друга. Посмотрим на кратчайший путь l между этими вершинами. В нём 6 вершин. Каждая из оставшихся вершин графа соединена не более, чем с тремя вершинами этого пути – иначе существовал бы путь (cd) длины не больше, чем 4, проходящий через эту вершину.

Теперь посмотрим, сколько может быть рёбер в $\overline{G}$. Между вершинами пути l – ровно $\frac{6(6-1)}{2} - 6 + 1 = 15 - 5 = 10$ рёбер. И между вершинами пути и всеми остальными – хотя бы $3(n - 6)$. Всего получается хотя бы $3(n - 6) + 10 = 3n - 8$.

Осталось доказать, что оценка достигается. Существует множество различных примеров; например, можно взять путь длины 5, а остальные вершины графа соединить между собой и с одними и теми же тремя вершинами пути, например, с первыми тремя (рисунок 6).

Здесь вершины a_1–a_6 соединены в цепочку длины 5, а остальные $n-6$ вершин составляют клику K. Кроме того, все вершины клики K смежны с вершинами a_1, a_2, a_3. Посчитаем количество рёбер в $\overline{G}$:

$$\frac{6 \times 5}{2} - 5 + 3(n - 6) = 10 + 3n - 18 = 3n - 8.$$

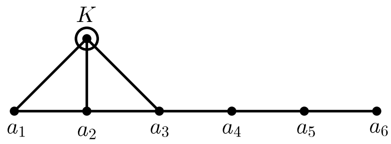

Рис. 6. Пример 3-широкого графа на n вершинах с $3n-8$ рёбрами.

Проверим, что это граф является 3-широким. Действительно, в ${}^3G$ вершина a_6 смежна со всеми вершинами графа, кроме a_5 и a_4. Это же две вершины смежны с вершиной a_1, которая смежна с a_6. Таким образом, от вершины a_6 есть путь до любой другой вершины графа ${}^3G$, откуда следует, что граф ${}^3G$ связен. □

§3. Верхняя оценка количества рёбер в k-широких графах.

Итак, в случае $k = 3$ вопрос исследован. Давайте теперь займёмся общим случаем.

Пусть есть k-широкий граф G. Рассмотрим любую его вершину x. Так как граф k-широкий, то, в частности, x не является изолированной в ${}^kG$. Значит, есть вершина графа на расстоянии хотя бы k от x. Следовательно, есть и вершина y на расстоянии ровно k от вершины x. Посмотрим на путь (xy) длины k, и какую-то вершину $z \in G$ не из этого пути. Пусть z соединена хотя бы с четырьмя вершинами этого пути. Тогда какие-то две вершины a, b из этих четырёх находятся на этом пути хотя бы через две вершины друг от друга. Однако в таком случае можно отрезок (ab) пути (xy) заменить на путь (azb). Полученный путь имеет длину не больше, чем $k-1$, что входит в противоречие с предположением о том, что $|xy| = k$. Таким образом, можно сделать вывод о том, что любая вершина, не содержащаяся в этом пути, соединена не более, чем с тремя вершинами этого пути, и между вершинами пути есть только k рёбер. Отсюда имеет место следующая оценка: $|E(\overline{G})| \geqslant (k-2)(n-k-1) + \frac{k(k+1)}{2} - k = (k-2)n - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k + 2$. Однако, как мы увидим вскоре, её можно значительно улучшить.

Теорема 3. *Для k-широкого графа G на n вершинах верна оценка*

$$|E(\overline{G})| > (n-2k)\,(2k - 4[\log_2 k] - 1)\,.$$

Доказательство. Построим последовательность подграфов $T_1, T_2, \ldots$ графа G с выделенными вершинами $p_1, p_2, \ldots$ соответственно; причём так, что $r_{T_i}(p_i) \leqslant k - \left[\frac{k}{2^i}\right]$. Рассмотрим какие-то вершины x_1 и y_1 в графе G, лежащие на расстоянии k друг от друга, и путь L_1 длины k, их соединяющий. Это и будет граф T_1, а вершиной p_1 будет середина этого пути (или одна из двух середин в случае нечётного k). Несложно заметить, что $|x_1p_1|, |p_1y_1| \leqslant \lceil\frac{k}{2}\rceil = k - \left[\frac{k}{2}\right]$, следовательно, $r_{T_1}(p_1) \leqslant k - \left[\frac{k}{2}\right]$.

Теперь предположим, что $T_1, T_2, \ldots, T_{i-1}$ и $p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}$ уже построены. Давайте построим T_i и p_i.

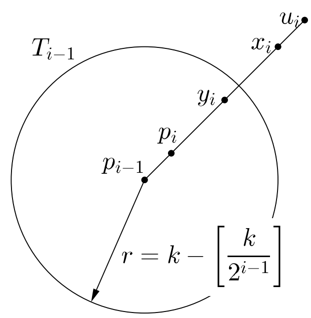

Рис. 7. Построение T_i и p_i.

Так как граф ${}^kG$ связен, то есть вершина u_i на расстоянии ровно k от p_{i-1}. При этом, $r_{T_{i-1}}(p_{i-1}) \leqslant k - \left[\frac{k}{2^{i-1}}\right]$, поэтому, если рассмотреть $(p_{i-1}u_i)$-путь L_i длины k, то максимум $k - \left[\frac{k}{2^{i-1}}\right] + 1$ его вершин лежат в T_{i-1}, и, следовательно, хотя бы $\left[\frac{k}{2^{i-1}}\right]$ его вершин лежат вне T_{i-1}. Пусть y_i – ближайшая к u_i точка пути L_i, лежащая в графе T_{i-1}. Поскольку $|y_iu_i| \geqslant \left[\frac{k}{2^{i-1}}\right]$, то на пути L_i между вершинами y_i и u_i есть вершина x_i, лежащая на расстоянии $\left[\frac{k}{2^{i-1}}\right]$ от вершины y_i. Объединив T_{i-1} и отрезок y_ix_i пути L_i, получим T_i. Теперь, подвинув вершину p_{i-1} по пути L_i на $\left[\frac{k}{2^i}\right]$ в сторону вершины x_i, получим вершину p_i. Проверим, что $r_{T_i}(p_i) \leqslant k - \left[\frac{k}{2^i}\right]$. Действительно, любая точка пути L_i

лежит от p_i на расстоянии не более, чем $k - \left[\frac{k}{2^i}\right]$, а для любой вершины $z \in T_{i-1}$ имеем

$$|zp_i| \leqslant r_{T_{i-1}}(p_{i-1}) + \left[\frac{k}{2^i}\right] \leqslant k - \left[\frac{k}{2^{i-1}}\right] + \left[\frac{k}{2^i}\right] \leqslant k - \left[\frac{k}{2^i}\right].$$

Теперь посмотрим, до какого момента надо строить T_i и p_i. При построении T_{i+1} мы добавляем в T_i минимальный путь длины хотя бы $\left[\frac{k}{2^i}\right] - 1$. Будем строить, пока есть гарантия, что путь, который мы добавим, будет длины не меньше трёх, то есть, в нём будет хотя бы четыре вершины:

$$\left[\frac{k}{2^i}\right] \geqslant 4 \Leftrightarrow \frac{k}{2^i} \geqslant 4 \Leftrightarrow k \geqslant 2^{i+2} \Leftrightarrow i \leqslant \log_2 k - 2.$$

Соответственно, последнее i, для которого мы построим T_i и p_i – это $m = [\log_2 k] - 2$. Оценим количество вершин в T_m:

$$|V(T_m)| = k + 1 + \left[\frac{k}{2}\right] + \left[\frac{k}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{k}{2^m}\right] \leqslant k + 1 + k - \left[\frac{k}{2^m}\right] \leqslant 2k.$$

Обозначим множество вершин не из T_i за U. Как мы только что выяснили, $|U| \geqslant n - 2k$. Давайте оценивать количество рёбер в $\overline{G}$. Для этого оценим $|E_G(U, V(T_{j+1} \setminus T_j))|$ для $0 \leqslant j < m$ (считаем T_0 пустым графом).

Поскольку для любого $0 \leqslant j < m$ граф $T_{j+1} \setminus T_j$ является отрезком пути L_{j+1} и L_{j+1} – кратчайший путь между вершинами p_j и u_{j+1}, то и $T_{j+1} \setminus T_j$ является кратчайшим путём между своими концами и имеет длину $\left[\frac{k}{2^j}\right]$. Следовательно, как мы выяснили ранее, каждая вершина множества U смежна не более, чем с тремя вершинами $T_{j+1} \setminus T_j$. Поэтому $|E_{\overline{G}}(U, T_{j+1} \setminus T_j)| \geqslant (\left[\frac{k}{2^j}\right] - 3)(n - 2k)$. Значит,

$$|E(\overline{G})| \geqslant (n-2k)\left(\sum_{j=0}^{m-1}\left[\frac{k}{2^j}\right] - 3m\right) \geqslant (n-2k)\left(\sum_{j=0}^{m-1}(\frac{k}{2^j} - 1 + \frac{1}{2^j}) - 3m\right)$$
$$\geqslant (n-2k)\left(2k - \frac{k}{2^m} + 1 - \frac{1}{2^m} - m - 3m\right)$$
$$= (n-2k)\left(2k + 1 - \frac{k+1}{2^m} - 4m\right).$$

Далее, заметим, что

$$[\log_2 k] > \log_2 k - 1 \Rightarrow 2^{[\log_2 k]-2} > 2^{\log_2 k - 3} = \frac{k}{8} \Rightarrow -\frac{1}{2^{[\log_2 k]-2}} > -\frac{8}{k},$$

то есть,

$$-\frac{1}{2^m} > -\frac{8}{k}$$

и, следовательно,

$$|E(\overline{G})| \geqslant (n-2k)\left(2k+1-\frac{k+1}{2^m}-4m\right)$$
$$> (n-2k)\left(2k+1-(k+1)\cdot\frac{8}{k}-4[\log_2 k]+8\right)$$
$$= (n-2k)\left(2k-4[\log_2 k]+1-\frac{8}{k}\right),$$

что при $k \geqslant 4$ не меньше, чем

$$(n-2k)\,(2k-4[\log_2 k]-1)\,,$$

что и требовалось доказать. □

Для k-широких графов это, как несложно заметить, в определённом смысле асимптотически точная оценка. Действительно, можно рассмотреть граф, аналогичный примеру в теореме 2: взять путь длины $2k$, а все остальные вершины, кроме этого пути, соединить с первыми тремя вершинами этого пути. В дополнении этого графа $(2k-3)n+O(k^2)$ рёбер, что эквивалентно нашей оценке при $n \to \infty$, $k = o(\sqrt{n})$, в частности, при фиксированном k.

Литература

1. Ф. Харари, *Теория графов.* Мир, М. 1973. (Перевод с английского. F. Harary *Graph Theory*, 1969.)
2. R. Diestel, *Graph Theory.* Springer-Verlag, New York 1997.
3. J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph Theory With Applications.* North-Holland, New York 1997.
4. H. Fleischner, *The square of every two-connected graph is Hamiltonian.* — J. Combinatorial Theory Ser. B **16** (1974), 29–34
5. A. M. Hobbs, *Some Hamiltonian results in powers of graphs.* — J. Research Nat. Bureau Stand. Sect. B, **77** (1973), 1–10.
6. G. Chartrand, S. F. Kapoor., *The cube of every connected graph is 1-hamiltonian.* — J. Research Nat. Bureau Stand. Sect. B **73** (1969), 47–48.

Samoilov V. S. An upper bound on the number of edges of a graph which k-th power has connected complement.

We call a graph k-*wide*, if for any division of its vertex set into two sets one can choose vertices of distance at least k in these sets (i.e., the complement of k-th power of this graph is connected). We call a graph *k-mono-wide*, if for any division of its vertex set into two sets one can choose vertices of distance exactly k in these sets.

We prove that the complement of a 3-wide graph on n vertices has at least $3n-7$ edges and the complement of a 3-mono-wide graph on n vertices has at least $3n-8$ edges. We construct infinite series of graphs for which these bounds are attained.

We also prove an asymptotically tight bound for the case $k \geqslant 4$: the complement of a k-wide graph contains at least $(n-2k)\,(2k-4[log_2 k]-1)$ edges.

С.-Петербургский
государственный университет,
Математико-механический факультет,
Университетский пр. 28, 198504,
Старый Петергоф, Санкт-Петербург,
E-mail: sammarize@gmail.com

Поступило 14 октября 2016 г.