Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 450, 2016 г.

А. В. Пастор

О РАЗБИЕНИИ ТРЕХСВЯЗНОГО ГРАФА НА ЦИКЛИЧЕСКИ РЕБЕРНО-ЧЕТЫРЕХСВЯЗНЫЕ КОМПОНЕНТЫ

§1. Введение

Древовидные структуры находят широкое применение при исследовании структурных свойств графа. Основная идея подобных конструкций состоит в том, чтобы разбить граф на компоненты, имеющие большую чем исходный граф связность, причем взаимное расположение этих компонент должно описываться некоторым деревом. Широко известна конструкция дерева блоков и точек сочленения. Вершинами этого дерева являются блоки (то есть максимальные по включению подграфы связного графа, сохраняющие связность при удалении любой вершины) и точки сочленения (вершины, удаление которых нарушает связность графа). При этом точка сочленения считается смежной блоку, если она является вершиной данного блока. Эта конструкция давно уже стала классической, ее описание присутствует во многих учебниках по теории графов, см. например [7].

Аналогом дерева блоков и точек сочленения для двусвязного графа можно считать дерево Татта [9]. Несколько более современное описание этой конструкции и ряд примеров ее использования для изучения свойств графа можно найти в работе [3]. Основными объектами этой конструкции являются одиночные 2-разделяющие множества (то есть двухвершинные множества, удаление которых нарушает связность графа, но при этом вершины такого множества остаются в одной компоненте связности при удалении любых двух вершин графа) и части разбиения графа такими множествами. При этом, строго говоря, часть разбиения не обязана быть трехсвязным (и даже просто связным) графом. Однако если к индуцированному этой частью

Ключевые слова: связность, трёхсвязные графы, циклически реберно-четырехсвязные графы.

Исследования выполнены при частичной поддержке гранта Президента РФ НШ-9721.2016.1, гранта РФФИ No. 14-01-00545-а и правительства РФ (грант 14.Z50.31.0030).

подграфу добавить новые *виртуальные ребра*, каждое из которых соединяет две вершины одного из 2-разделяющих множеств, разбиением при помощи которых была получена данная часть, то получится либо трехсвязный граф, либо простой цикл.

Значительно сложнее обстоит дело с трехсвязными графами. Различные варианты конструкции, аналогичной дереву блоков и точек сочленения, для трехсвязных графов и графов большей связности предлагались в работах [5, 8], но все они имеют определенные недостатки, связанные с тем, что получаемая конструкция определена неоднозначно, а для достижения однозначности на граф приходится накладывать довольно сильные дополнительные условия. Основной трудностью является то, что трехвершинные разделяющие множества трехсвязного графа могут быть зависимы (то есть при удалении одного 3-разделяющего множества вершины другого могут оказаться в разных компонентах связности) и разделив граф по одному из таких множеств мы уже не сможем разделить его по другому. Более того, зависимые 3-разделяющие множества трехсвязного графа могут образовывать значительно более сложные структуры, чем 2-разделяющие множества двусвязного графа. Подробное, но весьма трудоемкое, описание взаимного расположения 3-разделяющих множеств трехсвязного графа было дано в работе [6]. Наконец в работе [4] для исследования минимальных k-связных графов была предложена более простая конструкция, при которой разбиение графа производилось при помощи набора попарно независимых разрезов, не имеющих общих ребер (разрез – это такое k-элементное множество, состоящее из вершин и ребер графа и содержащее хотя бы одно ребро, при удалении из графа всех элементов которого нарушается связность).

Настоящая работа является продолжением этих исследований. Мы разделяем трехсвязный граф на части при помощи всех его трехреберных разрезов, при этом каждой части разбиения можно естественным образом поставить в соответствие циклически реберно-четырехсвязный и вершинно трехсвязный граф, а взаимное расположение полученных частей описывается при помощи дерева.

1.1. Основные обозначения. Под графом в данной работе понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. В основном мы будем использовать обозначения, принятые в работах [6] и [2]. Ниже мы приведем основные определения и обозначения, принятые в данной работе.

Множество вершин графа G традиционно обозначается $V(G)$, а множество ребер – $E(G)$. Количество вершин и ребер графа G мы будем обозначать через $v(G)$ и $e(G)$, соответственно. Степень вершины v в графе G обозначается через $d_G(v)$.

Пусть $A \subset V(G)$. Через $G(A)$ обозначается индуцированный подграф графа G на множестве A. Для $X \subset V(G) \cup E(G)$ через $G - X$ мы будем обозначать граф, полученный из G удалением всех вершин и ребер множества X, а также всех ребер, инцидентных вершинам из X (в частности, при $A \subset V(G)$ мы получаем $G - A = G(V(G) \setminus A)$, а при $B \subset E(G)$ получаем, что $G - B$ – граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G) \setminus B$). Для $x \in V(G) \cup E(G)$ положим $G - x = G - \{x\}$.

Окрестностью вершины $v \in V(G)$ мы будем называть множество $N_G(v)$ всех вершин, смежных с v. Аналогично, *окрестностью* множества $A \subset V(G)$ мы будем называть множество $N_G(A)$, состоящее из всех вершин графа G, которые смежны хотя бы с одной из вершин множества A и не лежат в A.

Мы будем называть две вершины графа G *связанными*, если между ними существует путь. Подмножество $S \subset V(G)$ мы будем называть *связным*, если любые две его вершины связаны. Под *компонентой связности* графа в данной работе подразумевается максимальное по включению связное подмножество множества его вершин. В дальнейшем, для удобства изложения, вместо “*компонента связности*” будем говорить просто “*компонента*”.

Замечание 1. Отметим, что приведенное выше определение компоненты связности отличается от общепринятого: как правило, в работах по теории графов компонентой связности называют максимальный по включению связный подграф данного графа. Тем не менее, говоря о свойствах компоненты H графа G мы часто будем иметь в виду соответствующие свойства индуцированного подграфа $G(H)$. В частности, мы будем говорить, что компонента H содержит цикл, если цикл содержит подграф $G(H)$.

1.2. Разделяющие множества и связность.

Определение 1. 1) Множество $S \subset V(G) \cup E(G)$ мы будем называть *разделяющим*, если граф $G - S$ несвязен. Разделяющее множество S

назовем *вершинным*, если $S \subset V(G)$ и *реберным*, если $S \subset E(G)$. Под k-*разделяющим множеством* мы будем понимать вершинное разделяющее множество мощности k. Семейство всех k-разделяющих множеств графа G мы будем обозначать через $\mathfrak{R}_k(G)$.

2) Разделяющее множество $S \subset V(G) \cup E(G)$ мы будем называть *циклическим*, если хотя бы две компоненты графа $G - S$ содержат циклы.

3) Разделяющее множество $S \subset V(G) \cup E(G)$ мы будем называть *разрезом*, если S содержит хотя бы одно ребро и в G нет разделяющих множеств с меньшим числом элементов.

Замечание 2. 1) Здесь мы также используем терминологию, несколько отличающуюся от общепринятой: в большинстве работ по теории графов разделяющими множествами называют вершинные разделяющие множества, а разрезами – реберные разделяющие множества. Однако для целей настоящей работы нам будут удобнее именно такие обозначения.

2) Легко видеть (см. например [4, замечание 1]), что для любого разреза S графа G граф $G - S$ имеет ровно две компоненты, причем концы любого ребра $e \in S$ принадлежат разным компонентам. Кроме того, никакая вершина $v \in S$ не может быть инцидентна никакому ребру $e \in S$.

Определение 2. Пусть $R \subset V(G) \cup E(G)$.

1) Пусть $X \subset V(G)$. Множество R *разделяет* множество X, если не все вершины из $X \setminus R$ лежат в одной компоненте графа $G - R$.

2) Пусть $U, W \subset V(G)$. Множество R *отделяет* множество U от множества W, если $U \not\subset R$, $W \not\subset R$ и никакие две вершины $u \in U \setminus R$ и $w \in W \setminus R$ не лежат в одной компоненте графа $G - R$.

В случае, когда $U = \{u\}$, мы будем говорить, что R *отделяет* вершину u от множества W. Если же $U = \{u\}$ и $W = \{w\}$, то мы будем говорить, что R *отделяет* вершину u от вершины w.

Определение 3. *Вершинной связностью* графа G называется мощность наименьшего подмножества $S \subset V(G)$, такого, что граф $G - S$ несвязен или тривиален (т. е. состоит ровно из одной вершины). Аналогично *реберной связностью* графа G называется мощность наименьшего подмножества $T \subset E(G)$, такого, что граф $G - T$ несвязен или тривиален.

Вершинная связность графа G обозначается $\kappa(G)$, а реберная – $\lambda(G)$.

Граф G называется *k-связным*, если $\kappa(G) \geqslant k$ и *k-реберно-связным*, если $\lambda(G) \geqslant k$.

Определение 4. *Циклической связностью* графа G, обозначаемой $c\kappa(G)$, называется мощность его наименьшего циклического вершинного разделяющего множества. *Циклической реберной связностью* графа G $(c\lambda(G))$, называется мощность его наименьшего циклического реберного разделяющего множества. Граф G называется *циклически k-связным*, если $c\kappa(G) \geqslant k$ и *циклически k-реберно-связным*, если $c\lambda(G) \geqslant k$.

Замечание 3. 1) В большинстве случаев, $\kappa(G)$ это мощность наименьшего вершинного разделяющего множества, а $\lambda(G)$ – мощность наименьшего реберного разделяющего множества графа G. Исключением для $\kappa(G)$ являются полные графы: для них $\kappa(G) = v(G) - 1$. Для $\lambda(G)$ единственным исключением является тривиальный граф, реберная связность которого равна нулю. Если граф не имеет циклических вершинных (реберных) разделяющих множеств, то соответствующий параметр циклической связности считается равным $+\infty$.

2) Легко видеть, что $c\lambda(G) \geqslant \lambda(G) \geqslant \kappa(G)$ и $c\kappa(G) \geqslant \kappa(G)$. В частности, в интересующем нас случае трехсвязного графа все перечисленные выше характеристики будут не меньше 3.

3) Ниже мы докажем (см. лемму 7), что трехсвязный граф является циклически реберно-четырехсвязным тогда и только тогда, когда все его трехреберные разрезы тривиальны (т. е. одна из отделяемых таким разрезом компонент состоит ровно из одной вершины).

В основном нас будут интересовать разделяющие множества, мощность которых равна вершинной связности графа. Для них мы будем использовать следующие обозначения.

Определение 5. Пусть $k = \kappa(G)$. Тогда множество всех разрезов графа G, содержащих i ребер и $k - i$ вершин, мы будем обозначать $\mathfrak{M}_i(G)$. Положим также $\mathfrak{M}_0(G) = \mathfrak{R}_k(G)$. Пусть $\mathfrak{M}(G) = \cup_{i=1}^{k} \mathfrak{M}_i(G)$ и $\mathfrak{M}^+(G) = \mathfrak{M}(G) \cup \mathfrak{M}_0(G)$.

Определение 6. Пусть $M \in \mathfrak{M}^+(G)$. Тогда множество всех входящих в M вершин мы будем обозначать через $V_0(M)$, а множество всех вершин, входящих в M либо инцидентных ребрам из M – через $V(M)$.

Замечание 4. В частности, для $R \in \mathfrak{M}_0(G)$ имеем $V(R) = V_0(R) = R$.

1.2.1. *Части разбиения.* Понятие части разбиения k-связного графа набором его k-разделяющих множеств было впервые введено в работе [1]. В работе [4] было введено аналогичное понятие части разбиения графа набором разрезов. Ниже мы приведем аналогичное определение части разбиения графа произвольным набором k-элементных разделяющих множеств (который может содержать как вершинные множества, так и разрезы).

Сначала мы определим понятие части разбиения графа одним разделяющим множеством.

Определение 7. Пусть $S \in \mathfrak{M}^+(G)$ и $U_1, \dots, U_m$ – компоненты графа $G - S$. Назовем множества $H_i = U_i \cup V_0(S)$ *частями разбиения* графа G множеством S. Мы будем использовать обозначение $\mathrm{Part}_G(S) = \{H_1, \dots, H_m\}$. Элементы множества $\mathrm{Part}_G(S)$ мы также будем называть *частями S-разбиения* графа G.

Границей части H_i мы будем называть множество $\mathrm{Bound}(H_i) = H_i \cap V(S)$, *внутренностью* части H_i – множество $\mathrm{Int}(H_i) = H_i \setminus V(S)$ и *окрестностью* части H_i – множество $\mathrm{Nb}(H_i) = H_i \cup V(S)$.

Замечание 5. 1) Если множество S является разрезом, то, как уже отмечалось в замечании 2, граф $G - S$ имеет ровно две компоненты. Следовательно, частей S-разбиения также будет две. Границы этих частей мы также будем называть *границами* разреза S.

2) Если $S \in \mathfrak{M}_0(G)$, то границы всех частей S-разбиения совпадают с множеством S. В этом случае каждая часть S-разбиения совпадает со своей окрестностью, а ее внутренностью является соответствующая компонента связности графа $G - S$.

Следующая лемма была доказана в работе [5] для случая вершинного разделяющего множества, но ее доказательство без каких-либо изменения подходит и для случая произвольного разделяющего множества.

Лемма 1. *Пусть $S \in \mathfrak{M}^+(G)$ и U – компонента связности графа $G - S$. Тогда каждая из вершин множества $V_0(S)$ смежна хотя бы с одной из вершин компоненты U.*

Доказательство. Предположим противное: пусть вершина $v \in V_0(S)$ не смежна ни с одной из вершин компоненты U. Тогда множество $S \setminus \{v\}$ также будет разделяющим, но очевидно что в k-связном графе не может быть разделяющего множества из менее, чем k элементов. $\square$

Следствие 1. *Для любого $S \in \mathfrak{M}^+(G)$ любая часть S-разбиения графа G связна.*

Далее, определим понятие части разбиения графа набором из нескольких разделяющих множеств.

Определение 8. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{M}^+(G)$ – набор разделяющих множеств графа G.

Назовем *квазичастями* разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$ множества вида

$$H = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} H_S, \quad \text{где} \quad H_S \in \mathrm{Part}_G(S). \tag{1}$$

Частями разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$ мы назовем все максимальные по включению квазичасти. Множество всех частей разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$ будем обозначать через $\mathrm{Part}_G(\mathfrak{S})$. Элементы множества $\mathrm{Part}_G(\mathfrak{S})$ мы также будем называть *частями $\mathfrak{S}$-разбиения* графа G. В случае, когда ясно, какой граф разбивается, мы вместо $\mathrm{Part}_G(\mathfrak{S})$ и $\mathrm{Part}_G(S)$ будем писать $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ и $\mathrm{Part}(S)$, соответственно.

Определение 9. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{M}^+(G)$ и $H \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$. *Границей* части H назовем множество

$$\mathrm{Bound}(H) = H \cap \left(\bigcup_{S \in \mathfrak{S}} V(S) \right).$$

Внутренностью части H назовем множество $\mathrm{Int}(H) = H \setminus \mathrm{Bound}(H)$.

Вершины, принадлежащие границе части мы будем называть *граничными*, а вершины, принадлежащие внутренности – внутренними.

Определение 10. Назовем часть A *пустой*, если $\mathrm{Int}(A) = \varnothing$ и *непустой* в противном случае. Назовем часть A *малой*, если $|A| < k$ и *нормальной*, если $|A| \geqslant k$.

Замечание 6. 1) Легко видеть, что пересечение двух различных частей $H_1, H_2 \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ является подмножеством множества $V_0(S)$ для некоторого $S \in \mathfrak{S}$.

2) Также нетрудно проверить, что граница $\mathrm{Bound}(H)$ состоит из всех вершин части H, имеющих смежные вершины вне H и, в случае, если $\mathrm{Int}(H) \neq \varnothing$, отделяет $\mathrm{Int}(H)$ от $V(G) \setminus H$.

1.2.2. *Зависимые и независимые разделяющие множества.* Понятие независимых k-разделяющих множеств впервые было введено в работах [5,8]: k-разделяющие множества S и T называются *независимыми*, если S не разделяет T и T не разделяет S. В работе [4] было дано определение независимых разрезов. Ниже мы обобщим эти определения на случай произвольных k-элементных разделяющих множеств.

Определение 11. Назовем разделяющие множества $S, T \in \mathfrak{M}^+(G)$ *независимыми*, если можно так задать нумерацию частей S- и T-разбиения $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, $\mathrm{Part}(T) = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$, что

$$A_1 \supset \bigcup_{i=2}^{m} B_i \quad \text{и} \quad B_1 \supset \bigcup_{i=2}^{n} A_i.$$

Иначе мы будем называть множества S и T *зависимыми*.

Замечание 7. 1) В случае, если $S, T \in \mathfrak{M}_0(G)$, данное определение полностью согласуется с классическим: легко видеть, что множества S и T будут независимы тогда и только тогда, когда ни одно из них не разделяет другое.

2) Несколько сложнее дело обстоит с разрезами. Разделяющее множество S независимое с разрезом T может разделять множество $V(T)$. Но при этом множество S не будет разделять как минимум одну из границ разреза T, а именно в терминологии определения 11 множество S не будет разделять границу части B_2.

Определение 12. Каждому набору $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{M}^+(G)$ поставим в соответствие *граф зависимости* $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S})$, вершины которого – множества набора $\mathfrak{S}$, а две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие множества зависимы.

Множество $T \in \mathfrak{M}_0(G)$ называется *одиночным*, если оно независимо со всеми остальными множествами из $\mathfrak{M}_0(G)$.

Разбиение графа парой зависимых k-разделяющих множеств описывается следующей леммой.

Лемма 2 ([2, лемма 7]). *Пусть G – k-связный граф, а множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ зависимы. Пусть $\mathrm{Part}(S) = \{F_1, \ldots, F_n\}$, а $\mathrm{Part}(T) = \{H_1, \ldots, H_m\}$. Для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, \ldots, m\}$ введем обозначения*

$$P = S \cap T, \quad S_j = S \cap \mathrm{Int}(H_j), \quad T_i = T \cap \mathrm{Int}(F_i), \quad G_{i,j} = F_i \cap H_j.$$

Тогда

$$\mathrm{Part}(\{S,T\}) = \{G_{i,j}\}_{i\in\{1,\dots,n\},\, j\in\{1,\dots,m\}}, \qquad \mathrm{Bound}(G_{i,j}) = P\cup T_i\cup S_j,$$

причем $T_i \neq \varnothing$ *для всех* $i\in\{1,\dots,n\}$ *и* $S_j\neq\varnothing$ *для всех* $j\in\{1,\dots,m\}$.

1.3. Ромашки и разрезы в трехсвязном графе. Начиная с этого места мы всюду будем считать, что G – это трехсвязный граф содержащий более 6 вершин. Ниже мы опишем основные структуры, которые могут возникать в таком графе, а именно, ромашки, разрезы и тройные разрезы. Более подробно эти структуры и их свойства исследовались в работе [6].

1.3.1. *Ромашки.* Рассмотрим набор $F = (p; q_1,\dots,q_m)$ вершин графа G ($m\geqslant 4$). Вершины $q_1,\dots,q_m$ считаются *циклически упорядоченными*, то есть их номера будем считать вычетами по модулю m, а также будем считать, что циклическая перестановка множества $q_1,\dots,q_m$ не меняет набора F. Пусть $Q_{i,j}=\{q_i,q_j,p\}$ и $\mathfrak{R}(F)$ – набор, состоящий из множеств $Q_{i,j}$ для всех пар различных несоседних в циклическом порядке индексов i и j.

Определение 13. Набор $F = (p; q_1,\dots,q_m)$ называется *ромашкой*, если существует такой набор $\mathfrak{S}\subset\mathfrak{R}(F)$, что разбиение $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ состоит из m частей $G_{1,2}$, $G_{2,3}$, $\dots$, $G_{m,1}$, причем $\mathrm{Bound}(G_{i,i+1}) = Q_{i,i+1}$. Множество $V(F)=\{p,q_1,\dots,q_m\}$ называется *множеством вершин* ромашки F. Вершина p называется *центром*, а вершины $q_1,\dots,q_m$ – *лепестками* ромашки F.

Будем говорить, что набор $\mathfrak{S}$ *порождает* ромашку F.

Введем обозначение $G_{i,j}=\cup_{x=i}^{j-1} G_{x,x+1}$ (индекс x пробегает значения от i до $j-1$ в циклическом порядке). Положим также $G_{x,x}=\varnothing$.

Лемма 3 ([6, следствие 4]). *Если граф зависимости набора*

$$\{S_1,S_2,\dots,S_n\}\subset\mathfrak{R}_3(G)$$

связен и $\cap_{i=1}^n S_i\neq\varnothing$, *то этот набор порождает ромашку.*

В работе [2] доказано (см. теорему 6 и следствия из нее), что множество $Q_{i,j}$ отделяет $G_{i,j}$ от $G_{j,i}$, а при $j\notin\{i,i+1,i-1\}$, более того, $\mathrm{Part}(Q_{i,j})=\{G_{i,j},G_{j,i}\}$.

Определение 14. Множества $Q_{1,2},Q_{2,3},\dots,Q_{m,1}$ называются *границами*, а остальные множества $Q_{i,j}$ – *внутренними множествами* ромашки F.

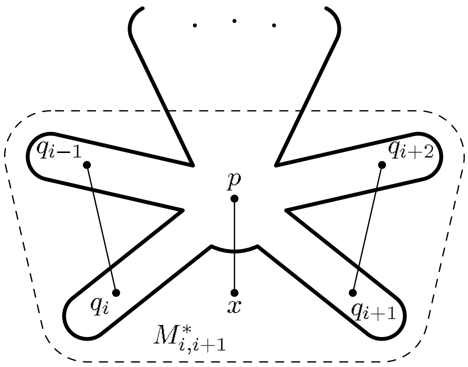

Рис. 1. разрез $M^*_{i,i+1}$

Разбиением графа G ромашкой F называется множество $\mathrm{Part}(F) = \{G_{1,2}, G_{2,3}, \dots, G_{m,1}\}$.

Легко видеть, что $\mathrm{Part}(F) = \mathrm{Part}(\mathfrak{R}(F))$. При этом ни одна из частей $\mathrm{Part}(F)$ не может быть малой. Также очевидно, что если часть $G_{i,i+1}$ пуста, то вершины q_i и q_{i+1} смежны.

Заметим также, что для любого i выполняется $G_{i+1,i} \in \mathrm{Part}(Q_{i,i+1})$, а $G_{i,i+1}$ есть объединение всех отличных от $G_{i+1,i}$ частей $\mathrm{Part}(Q_{i,i+1})$.

Определение 15. Пусть часть $G_{i,i+1} \in \mathrm{Part}(F)$ такова, что

$$\mathrm{Int}(G_{i-1,i}) = \mathrm{Int}(G_{i+1,i+2}) = \varnothing \quad \text{и} \quad G_{i,i+1} \cap N_G(p) = \{x\}.$$

Тогда назовем *граничным разрезом* ромашки F множество $M^*_{i,i+1} = \{q_{i-1}q_i, px, q_{i+1}q_{i+2}\}$.

Пример граничного разреза $M^*_{i,i+1}$ изображен на рисунке 1.

1.3.2. *Разрезы.* Как уже говорилось выше, *разрезом* графа G мы называем трехэлементное разделяющее множество $M \subset V(G) \cup E(G)$, содержащее хотя бы одно ребро.

Определение 16. 1) Будем говорить, что разрез M *содержит* множество $N \in \mathfrak{M}^+(G)$, если N содержит все вершины из M и для каждого ребра $e \in M$ содержит либо e, либо один из его концов. Разрез M называется *максимальным*, если он не содержится ни в каком другом разрезе.

2) Разделяющее множество $M \in \mathfrak{M}^+(G)$ можно *дополнить* ребром ab, если при замене вершины $a \in M$ на ребро ab получается разрез.

Как уже упоминалось в замечании 5, любой разрез $M \in \mathfrak{M}(G)$ разбивает граф ровно на две части. Обозначим эти части через H_1^M и H_2^M, а их границы – через T_1^M и T_2^M соответственно. В дальнейшем каждое входящее в M ребро мы будем записывать так, что первый его конец входит в T_1^M, а второй – в T_2^M. В тех случаях, когда это не будет приводить к путанице, мы вместо H_i^M и T_i^M будем писать H_i и T_i соответственно.

Определение 17. 1) Разрез $M \in \mathfrak{M}(G)$ называется *невырожденным*, если $\mathrm{Int}(H_1) \neq \varnothing$ и $\mathrm{Int}(H_2) \neq \varnothing$ и *вырожденным* в противном случае.

2) Разрез $M \in \mathfrak{M}(G)$ называется *тривиальным*, если одна из компонент графа $G - M$ состоит из единственной вершины и *нетривиальным* в противном случае. Множество всех нетривиальных разрезов из $\mathfrak{M}(G)$ мы будем обозначать через $\mathfrak{N}(G)$, а множество всех нетривиальных разрезов, содержащих i ребер и $3-i$ вершин – через $\mathfrak{N}_i(G)$.

Лемма 4 ([6, лемма 6]). *Пусть $M \in \mathfrak{N}(G)$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Любое трехвершинное множество, содержащее все вершины из M и ровно по одному концу всех ребер из M, но не совпадающее с T_1 и T_2, является разделяющим. Более того, оно делит граф ровно на две части, одна из которых содержит H_1, а другая – H_2.*

2) *Если $\mathrm{Int}(H_2) \neq \varnothing$, то множество T_2 является разделяющим, причем $\mathrm{Nb}(H_1) \in \mathrm{Part}(T_2)$, а H_2 является объединением оставшихся частей $\mathrm{Part}(T_2)$. В частности, если разрез M невырожден, то оба множества T_1 и T_2 являются разделяющими.*

Определение 18. Множества, описанные в пункте 1 леммы 4, называются *внутренними множествами* разреза M. Набор, состоящий из всех внутренних множеств разреза M, обозначается $\mathfrak{R}(M)$.

Замечание 8. 1) Как следует из работы [6, замечание 4], ребра нетривиального разреза не могут иметь общих концов. Следовательно, все рассматриваемые в лемме 4 множества трехэлементны.

2) Очевидно, что любой тривиальный разрез вырожден. С другой стороны, вырожденный разрез может быть нетривиальным. В работе [6, замечание 6 и рисунок 3] была дана классификация всех вырожденных разрезов. В частности, там доказано, что если разрез M

нетривиален и часть $H_2 \in \mathrm{Part}(M)$ пуста, то вершины множества T_2 попарно смежны.

Определение 19. Ребро $e \in E(G)$ называется *особым*, если существуют различные вершины $u, v, t, w \in V(G)$ такие, что $\{u, v, e\}, \{t, w, e\} \in \mathfrak{M}(G)$.

Теорема 1 ([6, теорема 2])**.** *Для вершин $x_1, x_2 \in V(G)$ следующие два условия эквивалентны.*

1° *Вершины x_1 и x_2 смежны, x_1x_2 – особое ребро.*

2° *Существуют зависимые множества $S, T \in \mathfrak{R}_3(G)$ такие, что $x_1 \in S$, $x_2 \in T$ и $\{x_1, x_2\} \in \mathrm{Part}(\{S, T\})$.*

Лемма 5 ([6, лемма 11])**.** *Пусть $M \in \mathfrak{M}(G)$ – нетривиальный разрез, содержащий ребро x_1x_2. Тогда не существует множества $S \in \mathfrak{R}_3(G)$, содержащего x_1 и x_2.*

Определение 20. Будем говорить, что разрез M *содержится* в ромашке F, если $V(M) \subset V(F)$, и наоборот ромашка F содержится в разрезе M, если $V(F) \subset V(M)$.

Лемма 6 ([6, лемма 16])**.** *Пусть максимальный разрез $M \in \mathfrak{N}(G)$ и множество $S \in \mathfrak{R}_3(G) \setminus \mathfrak{R}(M)$ таковы, что S разделяет $V(M)$. Тогда $|\mathrm{Part}(S)| = 2$ и выполняется одно из следующих двух утверждений.*

1° *Разрез M содержится в ромашке, порожденной набором $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}(M) \cup \{S, T_1, T_2\}$.*

2° *Множество S содержится в окрестности одной из частей $\mathrm{Part}(M)$ (не умаляя общности, пусть это часть H_1). Более того, существует такое ребро $x_1x_2 \in M$, что S отделяет вершину $x_1 \in T_1$ от остальных вершин множества $V(M) \setminus S$ и при этом $S \setminus H_1 = \{x_2\}$.*

Следствие 2. *Пусть разрез $M \in \mathfrak{N}_3(G)$ и множество $S \in \mathfrak{R}_3(G)$ таковы, что $S \cap \mathrm{Int}(H_1) \neq \varnothing$. Тогда $S \cap \mathrm{Int}(H_2) = \varnothing$ и $|S \cap T_2| \leqslant 1$.*

Доказательство. В случае, если $T \subset H_1$, утверждение очевидно. В противном случае, множество S зависимо с T_1 и, следовательно, разделяет $V(M)$. При этом множества T_1 и T_2 не могут входить в набор, порождающий ромашку, поскольку их пересечение пусто. Тогда по пункту 2 леммы 6 получаем, что $S \subset \mathrm{Nb}(H_1)$ и $|S \setminus H_1| = 1$. $\square$

Лемма 7. *Граф G является циклически реберно-четырехсвязным тогда и только тогда, когда $\mathfrak{N}_3(G) = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $M \in \mathfrak{N}_3(G)$. Заметим, что тогда ни одна из компонент графа $G - M$ не может быть деревом: в противном случае висячая вершина этого дерева будет иметь в графе G степень не более 2, что невозможно в трехсвязном графе. Таким образом, в этом случае граф G не может быть циклически реберно-четырехсвязным. Обратно, если $\mathfrak{N}_3(G) = \varnothing$, то все трехреберные разрезы графа G тривиальны, следовательно, для каждого такого разреза M одна из компонент графа $G - M$ будет состоять из одной вершины и поэтому не будет содержать циклов. Тогда граф G будет циклически реберно-четырехсвязным. $\square$

1.3.3. *Тройные разрезы.* Пусть множество $S \in \mathfrak{R}_3(G)$ таково, что $|\mathrm{Part}(S)| = 3$ и в S есть хотя бы одна вершина степени 3. Введем следующие обозначения: $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2, A_3\}$; M_i – разрез, получающийся из S заменой всех вершин степени 3 на ребра, соединяющие эти вершины с вершинами их окрестностей, лежащими в $\mathrm{Int}(A_i)$.

Разрезы M_1, M_2, M_3 могут быть не максимальными. Если разрез M_i содержится в разрезе из $\mathfrak{M}_3(G)$, то обозначим последний через M_i' (очевидно, что он единственен). В остальных случаях (в том числе и в случае, когда $M_i \in \mathfrak{M}_1(G)$ и содержится в разрезе из $\mathfrak{M}_2(G)$) положим $M_i' = M_i$.

Очевидно, что $V(M_i) \subset V(M_i') \subset A_i$. При этом множество S является одной из границ разрезов M_i и M_i'. Из леммы 4 следует, что $A_{i+1} \cup A_{i+2} \in \mathrm{Part}(M_i)$ и $A_{i+1} \cup A_{i+2} \in \mathrm{Part}(M_i')$ (нумерация циклическая по модулю 3). Обозначим другую часть $\mathrm{Part}(M_i)$ через B_i, а ее границу – через T_i. Через B_i' обозначим часть $\mathrm{Part}(M_i')$, содержащуюся в B_i. Ее границу обозначим через T_i'. У B_i как у части $\mathrm{Part}(M_i)$ и у B_i' как у части $\mathrm{Part}(M_i')$ определены окрестности. Легко видеть, что $\mathrm{Nb}(B_i) = \mathrm{Nb}(B_i') = A_i$.

Отметим, что разрез M_i (а, следовательно, и M_i') может быть тривиальным. В этом случае $|B_i'| = 1$. При этом, если все вершины множества S имеют степень 3, то и $|B_i| = 1$.

Определение 21. Множество $F = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ мы будем называть *тройным разрезом*, а множество $\mathrm{Nb}(F) = V(M_1') \cup V(M_2') \cup V(M_3')$ – его *окрестностью*. Множество S будем называть *осью* тройного разреза.

Пример тройного разреза изображен на рисунке 2. На этом примере ось тройного разреза $S = \{a, b, c\}$ содержит ровно одну вершину степени 3 – вершину a. При этом $M_1 = \{aa_1, b, c\}$, $M_1' = \{aa_1, bb_1, cc_1\}$,

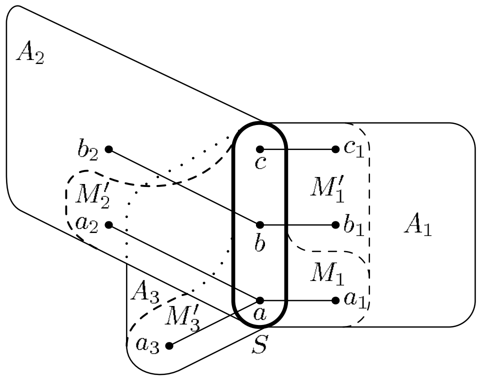

Рис. 2. пример тройного разреза

$M_2 = M_2' = \{aa_2, b, c\}$, $M_3 = M_3' = \{aa_3, b, c\}$. Отметим, что разрез M_2' совпадает с разрезом M_2 несмотря на то, что он не является максимальным: его можно дополнить ребром bb_2.

§2. Разбиение графа нетривиальными трехреберными разрезами

2.1. Разбиение графа одним разрезом. В этом разделе мы будем рассматривать нетривиальный трехреберный разрез

$$M = \{x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2\} \in \mathfrak{N}_3(G).$$

Легко видеть, что в этом случае части M-разбиения графа G совпадают с компонентами графа $G - M$. Как и раньше, мы будем обозначать эти части H_1 и H_2 так, чтобы множество $T_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ (где $i \in \{1, 2\}$) было границей части H_i.

Определение 22. Назовем *M-фрагментами* следующие два графа: граф $\widetilde{G_i}$ (где $i \in \{1, 2\}$) состоит из индуцированного подграфа $G(H_i)$ и новой вершины t_{3-i}, соединенной ребрами со всеми вершинами множества T_i.

Замечание 9. Фактически, M-фрагмент $\widetilde{G_i}$ получается из графа G стягиванием подграфа H_{3-i} в вершину t_{3-i}.

Лемма 8. *M-фрагменты $\widetilde{G_1}$ и $\widetilde{G_2}$ трехсвязного графа G являются трехсвязными графами.*

Доказательство. Докажем, что трехсвязным графом является $\widetilde{G_1}$. Для $\widetilde{G_2}$ доказательство аналогично.

Предположим противное. Пусть R – разделяющее множество графа $\widetilde{G_1}$, содержащее менее трех вершин. Если R не содержит t_2, то множество R является разделяющим и в графе G (компонента графа $\widetilde{G_1}-R$, не содержащая t_2, отделяется этим же множеством и в G), что невозможно.

Если же $t_2 \in R$, то найдется компонента H графа $\widetilde{G_1} - R$, содержащая не более одной вершины множества T_1 (если такая вершина есть, пусть это x_1). Но тогда множество $(R \cup \{x_2\}) \setminus \{t_2\}$ отделяет компоненту H в графе G, что противоречит его трехсвязности. $\square$

Наша первая цель будет состоять в том, чтобы показать, что графы $\widetilde{G_1}$ и $\widetilde{G_2}$ имеют структуру разбиения 3-разделяющими множествами, близкую к структуре разбиения этими множествами графа G. Для этого мы сначала установим соответствие между 3-разделяющими множествами графов G, $\widetilde{G_1}$ и $\widetilde{G_2}$. Аналогичное соответствие будет также установлено и между их разрезами.

Пусть множество $R = \{u_1, u_2, u_3\} \in \mathfrak{R}_3(G)$ не является внутренним для разреза M. Тогда по лемме 6 множество R содержится в окрестности некоторой части $H_i \in \mathrm{Part}_G(M)$. Более того, часть H_i можно выбрать так, чтобы в ней лежали хотя бы две вершины множества R и если $R \setminus H_i = \{u_j\}$, то $u_j \in T_{3-i}$. В последнем случае, множество R отделяет вершину $v \in T_i$, смежную с u_j, от остальных вершин множества $V(M) \setminus R$.

Определение 23. Пусть множество $R = \{u_1, u_2, u_3\} \in \mathfrak{R}_3(G)$ не является внутренним для разреза M. Будем говорить, что множество R *относится* к части H_i, если $R \subset \mathrm{Nb}(H_i)$ и $|R \cap H_i| \geqslant 2$.

Поставим в соответствие множеству R множество $\widetilde{R}$ следующим образом. Если $R \subset H_i$, то положим $\widetilde{R} = R$. В противном случае, не умаляя общности, обозначим вершину множества R, не лежащую в H_i, через u_3 и положим $\widetilde{R} = \{u_1, u_2, t_{3-i}\}$.

Также для любой части разбиения $A \in \mathrm{Part}_G(R)$ определим множество $\widetilde{A}$ следующим образом: $\widetilde{A} = A$ при $A \cap H_{3-i} = \varnothing$ и $\widetilde{A} = (A \setminus H_{3-i}) \cup \{t_{3-i}\}$ при $A \cap H_{3-i} \neq \varnothing$.

Далее мы всюду не умаляя общности будем считать, что множество R относится к части H_1.

Лемма 9. *Пусть множество $R \in \mathfrak{R}_3(G)$ не является внутренним для разреза M и относится к части H_1. Тогда множество R не разделяет часть H_2.*

Доказательство. Утверждение леммы тривиально в том случае, если часть H_2 пуста: в этом случае вершины множества T_2 попарно смежны и не могут быть разделены никаким множеством.

Пусть часть H_2 непуста. Тогда по лемме 4 она является объединением нескольких частей $\mathrm{Part}_G(T_2)$. Обозначим эти части $H_{2,1}, \dots, H_{2,k}$. Заметим, что внутренности всех частей $H_{2,j}$ связны (они являются компонентами графа $G - T_2$) и по лемме 6 они не содержат вершин множества R. Также по лемме 6 множество R содержит не более одной вершины множества T_2, а по лемме 1 каждая вершина множества $T_2 \setminus R$ смежна с вершинами всех частей $H_{2,j}$. Таким образом, в графе $G - R$ все вершины множества $H_2 \setminus R$ лежат в одной компоненте связности. $\square$

Итак, если множество $R \in \mathfrak{R}_3(G)$ не является внутренним для разреза M и относится к части H_1, то одна из частей $F \in \mathrm{Part}_G(R)$ будет содержать все вершины части H_2. Ниже мы докажем, что все отличные от F части $\mathrm{Part}_G(R)$ сохраняются и в графе $\widetilde{G_1}$. А вот часть F может претерпеть довольно существенные изменения.

Лемма 10. 1) *Пусть множество $R \in \mathfrak{R}_3(G)$ не является внутренним для разреза M и относится к части H_1. Тогда $\widetilde{R} \in \mathfrak{R}_3(\widetilde{G_1})$.*

2) *Для любого множества $S \in \mathfrak{R}_3(\widetilde{G_1})$ существует такое относящееся к части H_1 множество $R \in \mathfrak{R}_3(G)$, что $\widetilde{R} = S$.*

Доказательство. 1) В случае $R = T_1$ утверждение леммы очевидно, поскольку в этом случае множество R отделяет вершину t_2. Предположим, что $R \neq T_1$. Тогда легко видеть, что одна из вершин множества T_1 принадлежит $\mathrm{Int}(F)$. Не умаляя общности будем считать, что $z_1 \in \mathrm{Int}(F)$. Пусть F' – отличная от F часть $\mathrm{Part}_G(R)$ и $H = \mathrm{Int}(F')$. Заметим, что тогда $N_{\widetilde{G_1}}(H) = \widetilde{R}$, следовательно, множество $\widetilde{R}$ отделяет вершину z_1 от множества H.

2) Доказываемое утверждение очевидно в случае, когда $t_2 \notin S$. Действительно, в этом случае существует часть $A \in \mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(S)$, такая, что $t_2 \notin A$, и тогда очевидно, что $S \in \mathfrak{R}_3(G)$ и $A \in \mathrm{Part}_G(S)$.

Предположим, что $t_2 \in S$. Тогда по лемме 1 внутренность каждой части S-разбиения графа $\widetilde{G_1}$ содержит хотя бы одну вершину множества T_1. Обозначим через A часть S-разбиения, внутренность которой содержит ровно одну такую вершину и будем не умаляя общности считать, что это вершина x_1. Тогда рассмотрим множество $R = (S \setminus \{t_2\}) \cup \{x_2\}$. Заметим, что $N_G(\mathrm{Int}(A)) = R$, следовательно, $R \in \mathfrak{R}_3(G)$ и $\widetilde{R} = S$. $\square$

Для того, чтобы понять как части R-разбиения графа G связаны с частями $\widetilde{R}$-разбиения графа $\widetilde{G_1}$ нам нужно рассмотреть два случая: $R \subset H_1$ и $R \not\subset H_1$.

Лемма 11. *Пусть множество $R \in \mathfrak{R}_3(G)$ не является внутренним для разреза M и содержится в части H_1. Тогда все части из $\mathrm{Part}_G(R)$, кроме части F, являются также частями из $\mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{R})$. Кроме этих частей в $\mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{R})$ входит также множество $\widetilde{F}$, которое и заменяет часть F. Других частей в $\mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{R})$ нет.*

Доказательство. Заметим, что из $R \subset H_1$ следует $\widetilde{R} = R$. Пусть $F' \in \mathrm{Part}_G(R)$, $F' \neq F$. Тогда $F' \subset V(\widetilde{G_1})$ и ее внутренность $A' = \mathrm{Int}(F')$ является компонентой графа $G - R$, а следовательно и графа $\widetilde{G_1} - \widetilde{R}$, то есть $F' \in \mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{R})$.

Далее, докажем, что множество $\widetilde{R}$ не разделяет в графе $\widetilde{G_1}$ никакие две вершины множества $\widetilde{F}$. Это очевидно в случае $R = T_1$, поскольку тогда $\widetilde{F} = \{x_1, y_1, z_1, t_2\}$. Так что достаточно рассмотреть случай $R \neq T_1$. В этом случае, очевидно, что одна из вершин множества T_1 (не умаляя общности, пусть это x_1) принадлежит $\mathrm{Int}(F)$, следовательно, $x_1, t_2 \in \widetilde{F} \setminus R$ и эти две вершины смежны, то есть не могут быть разделены множеством R. Так что нам достаточно доказать, что множество R не разделяет в графе $\widetilde{G_1}$ никакие две вершины $v, w \in F \setminus H_2$. Поскольку $v, w \in F$, множество R не разделяет v и w в графе G. То есть в графе G существует путь P из v в w, внутренние вершины которого не лежат в R. Если в пути P нет вершин части H_2, то P является путем и в графе $\widetilde{G_1}$. Если же вершины части H_2 в P есть, то очевидно, что первая и последняя вершины H_2 на пути P принадлежат T_2 (не умаляя общности можно считать, что это вершины x_2 и y_2 соответственно). Тогда мы можем рассмотреть участки пути P от v до x_2 и от y_2 до w и “склеить” их, заменив x_2 и y_2 на t_2.

Итак, множество $\widetilde{R}$ не разделяет в графе $\widetilde{G_1}$ никакие две вершины множества $\widetilde{F}$. С другой стороны, множество $\widetilde{R}$ отделяет от t_2 вершины всех отличных от F частей $\mathrm{Part}_G(R)$, следовательно, $\widetilde{F} \in \mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{R})$. Других частей в $\mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{R})$ нет, поскольку в перечисленных выше частях содержатся все вершины графа $\widetilde{G_1} - \widetilde{R}$ и каждая такая вершина может принадлежать только одной части разбиения. □

Теперь рассмотрим случай $R \not\subset H_1$. Сразу же отметим, что в этом случае по лемме 6 множество R разбивает граф G ровно на две части. Одна из этих частей – часть F, содержащая все вершины части H_2. Также по лемме 6 множество R содержит ровно одну вершину множества T_2 (не умаляя общности будем считать, что это вершина x_2) и отделяет от части F вершину x_1. Обозначим отличную от F часть R-разбиения графа G через F_x.

Лемма 12. *Пусть множество $R \in \mathfrak{R}_3(G)$ не является внутренним для разреза M и относится к части H_1. Предположим, что $R \cap T_2 = \{x_2\}$ и $\mathrm{Part}_G(R) = \{F_x, F\}$, где $x_1 \in F_x$ и $H_2 \subset F$. Тогда возможны следующие два случая:*

1° $\mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{R}) = \{\widetilde{F_x}, \widetilde{F}\}$*;*

2° $\mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{R}) = \{\widetilde{F_x}, F_1, F_2\}$*, где* $F_1 \cup F_2 = \widetilde{F}$*.*

Доказательство. В этом случае $\widetilde{R} = (R \setminus \{x_2\}) \cup \{t_2\}$. Рассмотрим компоненту A_x графа $G - R$, соответствующую части F_x. Легко видеть, что A_x является также и компонентой графа $\widetilde{G_1} - \widetilde{R}$, следовательно, $\widetilde{F_x} \in \mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{R})$.

Далее, заметим, что $\widetilde{F} = V(\widetilde{G_1}) \setminus A_x$, следовательно, $\widetilde{F}$ является объединением отличных от $\widetilde{F_x}$ частей $\mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{R})$. Осталось доказать, что $|\mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{R})| = 2$ или 3. Это следует из леммы 1 и того факта, что вершина $t_2 \in \widetilde{R}$ имеет степень 3. □

Рассмотрим более подробно случай 2° из леммы 12. Можно подумать, что в этом случае сильно изменяется структура разбиения графа его 3-разделяющими множествами. Однако, как будет видно из следующей леммы, это не так. Просто три 3-разделяющих множества, которые имели две общие вершины и отличались лишь выбором третьей вершины из множества T_2, склеиваются в одно и три отделявшиеся ими части разбиения графа G становятся частями $\mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{R})$.

Лемма 13. *Пусть множество* $R = \{u_1, u_2, x_2\} \in \mathfrak{R}_3(G)$ *не является внутренним для разреза* M *и относится к части* H_1. *Предположим, что* $|\mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{R})| = 3$. *Тогда выполняются следующие утверждения*

1) $R \cap T_1 = \varnothing$;

2) *множества* $R_x = R$, $R_y = \{u_1, u_2, y_2\}$, $R_z = \{u_1, u_2, z_2\}$ *являются 3-разделяющими в графе* G, *причем* $\widetilde{R_x} = \widetilde{R_y} = \widetilde{R_z}$;

3) *рассмотрим части*

$$F_x \in \mathrm{Part}_G(R_x), \quad F_y \in \mathrm{Part}_G(R_y), \quad F_z \in \mathrm{Part}_G(R_z),$$

такие, что $x_1 \in F_x$, $y_1 \in F_y$, $z_1 \in F_z$. *Тогда* $\mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{R}) = \{\widetilde{F_x}, \widetilde{F_y}, \widetilde{F_z}\}$.

Доказательство. 1) По лемме 1 в каждой из частей $\mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{R})$ должна быть внутренняя вершина, смежная с t_2. Однако, вершина t_2 смежна только с вершинами x_1, y_1, z_1, следовательно, ни одна из них не может принадлежать множеству $\widetilde{R}$, а стало быть и множеству R.

2) Обозначим через A_x часть из $\mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{R})$, внутренность которой содержит вершину x_1, и введем обозначение $B_x = \mathrm{Int}_{\widetilde{G_1}}(A_x)$. Аналогично определим множества A_y, B_y, A_z, B_z. Легко видеть. что тогда $N_G(B_x) = R_x$, $N_G(B_y) = R_y$, $N_G(B_z) = R_z$. Следовательно, $R_x, R_y, R_z \in \mathfrak{R}_3(G)$. Равенство $\widetilde{R_x} = \widetilde{R_y} = \widetilde{R_z}$ непосредственно следует из определения.

3) Введем обозначения $F_x = B_x \cup R_x$, $F_y = B_y \cup R_y$, $F_z = B_z \cup R_z$. Тогда $F_x \in \mathrm{Part}_G(R_x)$, $F_y \in \mathrm{Part}_G(R_y)$, $F_z \in \mathrm{Part}_G(R_z)$ и, кроме того, $\widetilde{F_x} = A_x$, $\widetilde{F_y} = A_y$, $\widetilde{F_z} = A_z$, откуда $\mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{R}) = \{\widetilde{F_x}, \widetilde{F_y}, \widetilde{F_z}\}$. Условие $x_1 \in F_x$, $y_1 \in F_y$, $z_1 \in F_z$ очевидно вытекает из построения частей F_x, F_y, F_z. $\square$

Замечание 10. Легко видеть, что в условиях леммы 13 ребра x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2 являются особыми. Рассмотрим разрезы $N_x = \{u_1, u_2, x_1x_2\}$, $N_y = \{u_1, u_2, y_1y_2\}$, $N_z = \{u_1, u_2, z_1z_2\}$ из $\mathfrak{M}_1(G)$. При переходе к графу $\widetilde{G_1}$ вершины x_2, y_2, z_2 “склеиваются” в вершину t_2 и получаются разрезы $\widetilde{N_x} = \{u_1, u_2, x_1t_2\}$, $\widetilde{N_y} = \{u_1, u_2, y_1t_2\}$, $\widetilde{N_z} = \{u_1, u_2, z_1t_2\}$, образующие тройной разрез в графе $\widetilde{G_1}$.

Отметим также, что описанная выше ситуация возможна. Для этого рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Рассмотрим достаточно большие (содержащие хотя бы две вершины) полные графы C_x, C_y, C_z, C_2 и вершины x_1, x_2, y_1, y_2,

z_1, z_2, u_1, u_2, между которыми проведены только ребра x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2. Соединим вершину x_1 со всеми вершинами графа C_x, вершину y_1 со всеми вершинами графа C_y, вершину z_1 со всеми вершинами графа C_z; каждую из вершин x_2, y_2, z_2 соединим со всеми вершинами графа C_2, а каждую из вершин u_1, u_2 – со всеми вершинами графов C_x, C_y, C_z. Легко видеть, что получившийся граф является трехсвязным и удовлетворяет всем условиям леммы 13.

Итак, каждому множеству $R \in \mathfrak{R}_3(G)$, относящемуся к части H_1, мы поставили в соответствие множество $\widetilde{R} \in \mathfrak{R}_3(\widetilde{G_1})$. Это соответствие является сюръекцией, но, как видно из примера 1, не является инъекцией. Далее мы исследуем вопрос о том, в каких еще случаях при переходе от G к $\widetilde{G_1}$ несколько 3-разделяющих множеств, относящихся к части H_1, могут "склеиваться" в одно.

Лемма 14. *Пусть множества $R_1, R_2 \in \mathfrak{R}_3(G)$ не являются внутренними для разреза M и относятся к части H_1. Предположим, что $\widetilde{R_1} = \widetilde{R_2}$. Тогда выполняется одно из следующих двух утверждений.*

1° *Набор $\{R_1, R_2, T_1\}$ порождает ромашку (возможно, не максимальную).*

2° *Существует множество $R_3 \in \mathfrak{R}_3(G)$, отличное от R_1 и R_2, такое, что $\widetilde{R_1} = \widetilde{R_2} = \widetilde{R_3}$. При этом $|\mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{R_1})| = 3$ и выполняются все утверждения леммы 13.*

Доказательство. Очевидно, что множества R_1, R_2 имеют две общие вершины (назовем их u_1, u_2) и кроме этих вершин содержат по одной вершине множества T_2. Не умаляя общности будем считать, что $R_1 = \{u_1, u_2, x_2\}$ и $R_2 = \{u_1, u_2, z_2\}$. Тогда по лемме 5 вершины x_1, z_1 не могут принадлежать этим множествам. Таким образом, нам нужно рассмотреть следующие два случая:

1. $R_1 \cap R_2 \cap T_1 = \{y_1\}$;

2. $R_1 \cap R_2 \cap T_1 = \varnothing$.

Случай 1. Пусть $R_1 \cap R_2 \cap T_1 = \{y_1\}$. Заметим, что каждое из множеств R_1, R_2 зависимо с множеством T_1, следовательно, граф зависимости набора $\{R_1, R_2, T_1\}$ связен. Тогда по лемме 3 набор $\{R_1, R_2, T_1\}$ порождает ромашку и выполнено утверждение 1° доказываемой леммы.

Случай 2. Пусть $R_1 \cap R_2 \cap T_1 = \varnothing$. По лемме 6 множество R_1 отделяет вершину x_1 от остальных вершин множества $V(M) \setminus R_1$, в частности, от вершин y_1, z_1. Следовательно, по лемме 12 вершина x_1

не лежит в одной части разбиения $\mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{R_1})$ ни с одной из вершин y_1 и z_1. Аналогично доказывается, что вершины y_1 и z_1 также лежат в разных частях $\mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{R_1})$. Таким образом, $|\mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{R_1})| = 3$. Но тогда по лемме 13 множество $R_3 = \{u_1, u_2, y_2\}$ является 3-разделяющим в графе G и $\widetilde{R_1} = \widetilde{R_2} = \widetilde{R_3}$. □

Далее, мы изучим вопрос о том, как переход от графа G к графу $\widetilde{G_1}$ влияет на зависимость и независимость 3-разделяющих множеств.

Лемма 15. *Пусть множества $R_1, R_2 \in \mathfrak{R}_3(G)$ не являются внутренними для разреза M и относятся к части H_1. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если множества R_1 и R_2 независимы, то и множества $\widetilde{R_1}$, $\widetilde{R_2}$ независимы (возможно, $\widetilde{R_1} = \widetilde{R_2}$).*

2) *Если множества R_1 и R_2 зависимы, то $\widetilde{R_1} \neq \widetilde{R_2}$.*

3) *Если множества R_1 и R_2 зависимы, а множества $\widetilde{R_1}$, $\widetilde{R_2}$ независимы, то набор $\{R_1, R_2, T_1\}$ порождает ромашку. При этом, множества R_1 и R_2 зависимы с множеством T_1 и пересекаются с множеством T_2 по разным вершинам.*

Доказательство. 1) Предположим противное: пусть множество $\widetilde{R_1}$ разбивает $\widetilde{R_2}$. Как следует из лемм 11 и 12, существует такая часть $F \in \mathrm{Part}_G(R_1)$, что $\mathrm{Int}(F) \subset H_1$ и $\widetilde{F} \in \mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{R_1})$. При этом, $\mathrm{Int}_G(F) = \mathrm{Int}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{F})$. Поскольку $\widetilde{R_1}$ разбивает $\widetilde{R_2}$, найдутся вершины $u, v \in \widetilde{R_2}$, такие, что $u \in \mathrm{Int}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{F})$ и $v \notin \widetilde{F}$. Но тогда $u \in R_2 \cap \mathrm{Int}_G(F)$, а вершине v в графе G соответствует вершина $v' \in R_2$, такая, что $v' = v$, если $v \neq t_2$, и $v' \in T_2$, если $v = t_2$. В обоих случаях мы получаем, что $v' \in R_2 \setminus F$, что противоречит независимости множеств R_1 и R_2.

2) Если $\widetilde{R_1} = \widetilde{R_2}$, то множества R_1 и R_2 имеют две общие вершины и, следовательно, не могут быть зависимы.

3) Поскольку множества R_1 и R_2 зависимы, множество R_1 разделяет некоторые вершины $v_1, v_2 \in R_2$. Пусть $v_1 \in \mathrm{Int}_G(F_{11})$ и $v_2 \in \mathrm{Int}_G(F_{12})$, где $F_{11}, F_{12} \in \mathrm{Part}_G(R_1)$. В графе $\widetilde{G}_1$ этим вершинам соответствуют вершины $\widetilde{v_1}$ и $\widetilde{v_2}$ соответственно. Очевидно, что $\widetilde{v_1} \in \widetilde{F}_{11}$ и $\widetilde{v_2} \in \widetilde{F}_{12}$. Поскольку множества $\widetilde{R_1}$, $\widetilde{R_2}$ независимы, обе эти вершины

не могут принадлежать внутренностям соответствующих частей, следовательно, хотя бы одна из них лежит в $\widetilde{R_1}$. Пусть не умаляя общности $\widetilde{v_2} \in \widetilde{R_1}$. Тогда $v_2 \in T_2$ и $R_1 \cap T_2 \neq \varnothing$. Это означает, что множества R_1 и R_2 зависимы с множеством T_1. Очевидно, что они пересекаются с множеством T_2 по разным вершинам. Не умаляя общности будем считать, что $z_2 = v_2 \in R_2$ и $x_2 \in R_1$.

Поскольку $x_2 \notin R_2$, можно так ввести обозначения $\mathrm{Part}_G(R_2) = \{F_{21}, F_{22}\}$, что $x_2 \in \mathrm{Int}(F_{22})$. Пусть

$$S_1 = R_1 \cap \mathrm{Int}(F_{22}), \quad S_2 = R_2 \cap \mathrm{Int}(F_{12}), \quad P = R_1 \cap R_2.$$

Тогда $x_2 \in S_1$, $z_2 \in S_2$. По лемме 2 мы имеем

$$U = F_{12} \cap F_{22} \in \mathrm{Part}_G(\{R_1, R_2\}) \quad \text{и} \quad \mathrm{Bound}(U) = S_1 \cup S_2 \cup P \supset \{x_2, z_2\}.$$

Так как ни R_1, ни R_2 не разделяют $H_2 \supset \{x_2, z_2\}$, мы имеем $H_2 \subset U$ и, в частности, $\mathrm{Int}(U) \ni y_2$. Следовательно, $|\mathrm{Bound}(U)| \geqslant 3$. Рассмотрим два случая: $R_1 \cap R_2 = \varnothing$ и $R_1 \cap R_2 \neq \varnothing$.

1. $R_1 \cap R_2 = \varnothing$.
Тогда $|S_1| + |S_2| \geqslant 3$. Не умаляя общности можно считать, что $|S_1| \geqslant 2$. Пусть $R_1 = \{x_2, w, u\}$ и $S_1 = \{x_2, w\}$. Тогда $w \in \mathrm{Int}(F_{22})$, $u \in \mathrm{Int}(F_{21})$. По лемме 12 мы имеем $\widetilde{F}_{21} \in \mathrm{Part}_{\widetilde{G}_1}(\widetilde{R}_2)$. Отметим, что

$$\widetilde{F}_{21} = (F_{21} \setminus \{z_2\}) \cup \{t_2\}.$$

Следовательно, $u \in \mathrm{Int}(\widetilde{F}_{21})$ и $w \notin \widetilde{F}_{21}$, то есть, $\widetilde{R}_2$ отделяет в графе $\widetilde{G}_1$ друг от друга вершины $u, w \in \widetilde{R}_1$, что противоречит независимости множеств $\widetilde{R}_1$ и $\widetilde{R}_2$.

2. $R_1 \cap R_2 \neq \varnothing$.
Пересечение зависимых 3-разделяющих множеств, очевидно, не может содержать более одной вершины, следовательно, $|P| = 1$. Пусть $P = \{p\}$. Так как $R_1 \not\subset V(M)$, по лемме 6 множество R_1 содержит не более одной вершины из T_2 и мы имеем $p \notin T_2$. С другой стороны, множество $\mathrm{Bound}(U) = \{p, x_2, z_2\} \in \mathfrak{R}_3(G)$ и по лемме 6 мы имеем $p \in V(M)$. Следовательно, $p \in T_1$. По лемме 5 никакое 3-разделяющее множество не может содержать оба конца одного из ребер разреза. Так как $p \in R_1 \cap R_2$, $x_2 \in R_1$ и $z_2 \in R_2$, мы имеем $p = y_1$. Следовательно, набор $\{R_1, R_2, T_1\}$ порождает ромашку с центром y_1. □

В следующих двух леммах, мы изучим вопрос о том, как переход от графа G к графу $\widetilde{G_1}$ влияет на ромашки.

Лемма 16. *Пусть F – не содержащаяся в разрезе M максимальная ромашка графа G. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Множество $V(F)$ содержится в окрестности одной из частей H_1, H_2. В последующих пунктах мы будем не умаляя общности считать, что $V(F) \subset \mathrm{Nb}(H_1)$.*

2) *Все множества из $\mathfrak{R}(F) \setminus \mathfrak{R}(M)$ относятся к части H_1. Все границы ромашки F, являющиеся разделяющими множествами и не лежащие в $\mathfrak{R}(M)$, также относятся к части H_1. При этом центр и один из лепестков ромашки F не могут одновременно принадлежать множеству T_2.*

3) *Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{R}}(F)$ набор, состоящий из множеств вида $\widetilde{R}$, где $R \in \mathfrak{R}(F) \setminus \mathfrak{R}(M)$. Тогда набор $\widetilde{\mathfrak{R}}(F)$ порождает ромашку в графе $\widetilde{G_1}$. Эту ромашку мы будем обозначать через $\widetilde{F}$.*

4) *Либо ромашки F и $\widetilde{F}$ содержат одинаковое количество лепестков, либо в ромашке $\widetilde{F}$ на один лепесток меньше, чем в F.*

Доказательство. 1) Предположим противное: пусть существуют вершины $v_1, v_2 \in V(F)$, такие, что $v_1 \in \mathrm{Int}(H_1)$ и $v_2 \in \mathrm{Int}(H_2)$. По лемме 6 в графе G нет 3-разделяющего множества, содержащего обе вершины v_1, v_2. Тогда v_1, v_2 могут быть только соседними лепестками ромашки F, причем соответствующая часть $\mathrm{Part}(F)$ пуста. Но тогда вершины v_1, v_2 должны быть смежны, что невозможно.

2) Поскольку $V(F) \subset \mathrm{Nb}(H_1)$, все внутренние множества и границы ромашки F содержатся в $\mathrm{Nb}(H_1)$. Заметим, что единственным 3-разделяющим множеством, содержащимся в $\mathrm{Nb}(H_1)$, но не относящимся к части H_1 и не принадлежащим $\mathfrak{R}(M)$, может быть только множество T_2. Таким образом нам достаточно доказать, что T_2 не может быть ни внутренним множеством, ни границей ромашки F. Для этого покажем, что центр и один из лепестков ромашки F не могут одновременно принадлежать множеству T_2. Предположим противное: пусть y_2 – центр ромашки F, а x_2 – ее лепесток. Заметим, что поскольку F не содержится в M, в ромашке F должен быть лепесток $u \in \mathrm{Int}(H_1)$. По лемме 6 множество $\{x_2, y_2, u\}$ не может быть разделяющими, следовательно, лепестки x_2 и u – соседние и соответствующая часть $\mathrm{Part}(F)$ пуста. Но тогда лепестки x_2 и u должны быть смежны, что невозможно.

3) Обозначим через p центр ромашки F. По лемме 3 для того, чтобы набор $\widetilde{\mathfrak{R}}(F)$ порождал ромашку в графе $\widetilde{G_1}$, нам требуется чтобы

все множества этого набора имели общую вершину и граф зависимости был связен. Первое условие очевидно выполнено. Для того, чтобы доказать второе условие, рассмотрим следующие два случая: **1.** $|T_2 \cap V(F)| \leqslant 1$; **2.** $|T_2 \cap V(F)| \geqslant 2$.

Случай 1. Пусть $|T_2 \cap V(F)| \leqslant 1$. Докажем, что $\mathfrak{R}(F) \cap \mathfrak{R}(M) = \varnothing$. Это очевидно в случае, когда $T_2 \cap V(F) = \varnothing$, так что нам достаточно рассмотреть случай $|T_2 \cap V(F)| = 1$. Не умаляя общности будем считать, что $T_2 \cap V(F) = \{y_2\}$. Тогда в $V(F)$ может содержаться только одно множество из $\mathfrak{R}(M)$ – это множество $S = \{x_1, y_2, z_1\}$. Но множество S не разделяет $H_1 \cup \{y_2\} \supset V(F)$ и, следовательно, не может быть зависимо с внутренними множествами ромашки F. Это означает, что S не может быть внутренним множеством ромашки F, следовательно, $\mathfrak{R}(F) \cap \mathfrak{R}(M) = \varnothing$.

Далее, поскольку $|T_2 \cap V(F)| \leqslant 1$, из леммы 15 следует, что различным множествам $R_1, R_2 \in \mathfrak{R}(F)$ будут соответствовать различные $\widetilde{R_1}$, $\widetilde{R_2}$. Более того, если множества $R_1, R_2 \in \mathfrak{R}(F)$ зависимы, то и множества $\widetilde{R_1}$, $\widetilde{R_2}$ тоже зависимы. Таким образом, графы зависимости наборов $\mathfrak{R}(F)$ и $\widetilde{\mathfrak{R}}(F)$ изоморфны, следовательно, граф зависимости $\widetilde{\mathfrak{R}}(F)$ связен.

Случай 2. Пусть $|T_2 \cap V(F)| \geqslant 2$. Будем не умаляя общности считать, что $x_2, z_2 \in V(F)$. Докажем, что тогда $p = y_1$. Действительно, согласно пункту 2 данной леммы центр и один из лепестков ромашки F не могут одновременно принадлежать T_2, следовательно, $p \notin T_2$. Предположим, что $p \in \mathrm{Int}(H_1)$. Тогда по лемме 6 множество $\{x_2, p, z_2\}$ не может быть разделяющим. Следовательно, это множество может быть только границей пустой части $\mathrm{Part}(F)$. Но это также невозможно, поскольку по лемме 9 ни одно из внутренних множеств ромашки F не может разделять часть H_2, то есть вершина y_2 должна быть в одной части с лепестками x_2, z_2. Таким образом, мы получаем, что $p \in T_1$, но тогда $p = y_1$, поскольку по лемме 5 ни одна из пар вершин x_1, x_2 и z_1, z_2 не может содержаться в 3-разделяющем множестве.

Заметим далее, что лепестки x_2, z_2 являются соседними в ромашке F, поскольку по лемме 9 ни одно из внутренних множеств ромашки F не может разделять часть H_2. Кроме того, поскольку $V(F) \not\subset V(M)$, в ромашке F есть лепесток $u \notin V(M)$. Тогда хотя бы одно из множеств $S_x = \{x_2, y_1, u\}$ и $S_z = \{z_2, y_1, u\}$ является внутренним множеством F. Поскольку ромашка F максимальна, это означает, что $T_1 \in \mathfrak{R}(F)$.

Действительно, в противном случае по лемме 3 набор $\{T_1\} \cup \mathfrak{R}(F)$ порождает ромашку, содержащую F, то есть ромашка F не максимальна. Таким образом, $T_1 = \widetilde{T_1} \in \widetilde{\mathfrak{R}}(F)$.

Рассмотрим такую пару зависимых множеств $R_1, R_2 \in \mathfrak{R}(F) \setminus \mathfrak{R}(M)$, что множества $\widetilde{R_1}$ и $\widetilde{R_2}$ независимы. Тогда по лемме 15 каждое из множеств R_1, R_2 (а, следовательно, и каждое из множеств $\widetilde{R_1}$, $\widetilde{R_2}$) должно быть зависимо с T_1. Таким образом, множества $\widetilde{R_1}$, $\widetilde{R_2}$ связаны в графе зависимости набора $\widetilde{\mathfrak{R}}(F)$. То есть для доказательства связности графа зависимости набора $\widetilde{\mathfrak{R}}(F)$ нам достаточно доказать связность графа зависимости набора $\mathfrak{R}(F) \setminus \mathfrak{R}(M)$. Для этого заметим, что если множество $R \in \mathfrak{R}(F) \setminus \mathfrak{R}(M)$ отлично от T_1 и зависимо с множеством $T \in \mathfrak{R}(F) \cap \mathfrak{R}(M)$, то R, очевидно, зависимо и с множеством T_1. Таким образом, удаление из множества $\mathfrak{R}(F)$ внутренних множеств разреза M не влияет на его связность.

4) В доказательстве пункта 3) данной леммы мы, в частности, показали, что не более двух вершин множества T_2 могут быть лепестками ромашки F. Очевидно, что если в T_2 содержится не более одного лепестка F, то ромашки F и $\widetilde{F}$ содержат одинаковое количество лепестков. Если же в T_2 содержатся два лепестка ромашки F (это случай 2 доказательства предыдущего пункта), то ромашка $\widetilde{F}$ содержит на один лепесток меньше, чем F. □

Замечание 11. 1) В случае, если ромашка F не является максимальной, набор $\widetilde{\mathfrak{R}}(F)$, построенный так же, как и в предыдущей лемме, может не порождать ромашку в графе $\widetilde{G_1}$. Например, в ромашке F может быть всего 4 лепестка, два из которых принадлежат T_2. Однако, в тех случаях, когда набор $\widetilde{\mathfrak{R}}(F)$ порождает ромашку, мы всегда будем обозначать ее через $\widetilde{F}$, независимо от того, максимальна ли ромашка F.

2) Исследуем более подробно случай, когда центр ромашки F из предыдущей леммы принадлежит множеству T_2. Итак, пусть $p = y_2$ – центр ромашки F. Тогда очевидно, что в $\mathrm{Part}(F)$ есть всего две непустые части: одна из них содержит H_2, а другая – y_1. Пустых частей также ровно две, поскольку лепесток принадлежащий двум соседним пустым частям должен быть смежен с p, а это невозможно. Итого, частей, а следовательно и лепестков ромашки F всего 4. Пусть $F = (y_2; q_1, q_2, q_3, q_4)$, причем части $G_{1,2}$ и $G_{3,4}$ пусты. Тогда легко видеть, что ромашка F содержится в разрезе $M' = \{q_1q_2, y_2y_1, q_4q_3\} \in \mathfrak{N}_3(G)$.

3) Отметим, что если F – невырожденная ромашка, содержащаяся в окрестности части H_1, и M является ее граничным разрезом, то в $\widetilde{G_1}$ ей будет соответствовать ромашка $\widetilde{F}$, имеющая на один лепесток меньше. Если же разрез M не является граничным для F, то ей соответствует ромашка $\widetilde{F}$ с тем же количеством лепестков.

Лемма 17. *Пусть F' – ромашка в графе $\widetilde{G_1}$, центр которой не совпадает с t_2. Тогда в графе G существует ромашка F, такая, что $F' = \widetilde{F}$.*

Доказательство. Пусть $p \neq t_2$ – центр ромашки F'. Тогда $p \in V(G)$. Обозначим внутренние множества ромашки F' через $R'_1, \ldots, R'_k$. По лемме 10 существуют множества $R_1, \ldots, R_k \in \mathfrak{R}_3(G)$, такие, что для любого i выполнено $\widetilde{R_i} = R'_i$. По лемме 15 если множества R'_i, R'_j зависимы, то и множества R_i, R_j также зависимы. Таким образом, граф зависимости набора $\{R_1, \ldots, R_k\}$ связен. Поскольку при этом $p \in \cap_{i=1}^{k} R_i$, по лемме 3 набор $\{R_1, \ldots, R_k\}$ порождает некоторую ромашку F. Очевидно, что тогда $F' = \widetilde{F}$. $\square$

Посмотрим теперь на то, как переход от графа G к графу $\widetilde{G_i}$ влияет на другие разрезы.

Определение 24. Будем говорить, что разрез $N \in \mathfrak{M}(G)$ *относится* к части $H_i \in \mathrm{Part}_G(M)$, если он не содержится в разрезе M и $V(N) \subset \mathrm{Nb}(H_i)$.

Лемма 18. *Пусть $N \in \mathfrak{M}(G)$ – разрез, не содержащийся в M. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Разрез N относится к одной из частей $\mathrm{Part}_G(M)$ (в последующих пунктах не умаляя общности будем считать, что к H_1);*

2) $|V(N) \cap T_2| \leqslant 1$*;*

3) *части $\mathrm{Part}_G(N)$ можно обозначить F_1 и F_2 так, что $H_2 \subset F_2$.*

Доказательство. 1) По условию, разрез N не содержится в разрезе M. Тогда существует вершина $a \in V(N)$, принадлежащая внутренности одной из частей $\mathrm{Part}_G(M)$. Не умаляя общности будем считать, что $a \in \mathrm{Int}(H_1)$. Докажем, что тогда $V(N) \cap \mathrm{Int}(H_2) = \varnothing$. Для этого рассмотрим произвольную вершину $b \in V(N)$. Если $ab \in N$, то, очевидно, $b \in H_1$. В противном случае найдется такая вершина c, что множество $S = \{a, b, c\}$ содержит все вершины и ровно по одному концу каждого из ребер разреза N. Если $S \in \mathfrak{R}_3(G)$, то по следствию 2 имеем $S \cap \mathrm{Int}(H_2) = \varnothing$, откуда $b \notin \mathrm{Int}(H_2)$. Если же $S \notin \mathfrak{R}_3(G)$, то множество S является одной из границ разреза N и соответствующая часть $\mathrm{Part}_G(N)$ пуста. Но тогда легко видеть (см. замечание 8), что одна из вершин a, b, c смежна с обеими другими, откуда следует, что $b \notin \mathrm{Int}(H_2)$.

2) Предположим противное: пусть, не умаляя общности, $x_2, y_2 \in V(N)$. Докажем сначала, что $x_2y_2 \notin N$. Действительно, по лемме 5 множество $\{x_2, y_2, z_1\} \in \mathfrak{R}(M)$ не может содержать обе вершины никакого ребра разреза N. Тогда разрез N содержит множество $S = \{x_2, y_2, a\}$. По следствию 2 множество S не может быть разделяющим. Но быть границей, которой соответствует пустая часть, множество S также не может, поскольку вершина a не смежна с x_2, y_2. Противоречие завершает доказательство пункта 2.

3) Поскольку разрез N может содержать максимум одну вершину части H_2, причем эта вершина может быть только граничной, разрез N не может разделять H_2. Следовательно, части $\mathrm{Part}_G(N)$ можно обозначить F_1 и F_2 так, что $H_2 \subset F_2$. □

Следствие 3. *Любые два различных разреза $M, N \in \mathfrak{N}_3(G)$ независимы и имеют не более одного общего ребра. Более того, если разрез N относится к части $H_1 \in \mathrm{Part}_G(M)$, а разрез M к части $F_2 \in \mathrm{Part}_G(N)$, то $H_2 \subset F_2$ и $\mathrm{Nb}(H_2) \subset \mathrm{Nb}(F_2)$.*

Доказательство. По лемме 18 разрез N относится к одной из частей $\mathrm{Part}_G(M)$, не умаляя общности, к H_1. Также по лемме 18 имеем $|V(N) \cap T_2| \leqslant 1$, следовательно, разрезы M и N могут иметь не более одного общего ребра. Наконец, по третьей части леммы 18 части $\mathrm{Part}_G(N)$ можно обозначить F_1 и F_2 так, что $H_2 \subset F_2$. Из этого следует, что $\mathrm{Nb}(H_2) \subset \mathrm{Nb}(F_2)$. Действительно, $\mathrm{Nb}(H_2) = H_2 \cup T_1$ и $\mathrm{Nb}(F_2) = F_2 \cup T_1^N$, то есть каждая вершина $v \in \mathrm{Nb}(H_2)$ либо лежит в F_2, либо смежна с одной из вершин множества F_2 – в обоих случаях получаем, что $v \in \mathrm{Nb}(F_2)$. Тогда очевидно, что разрез M относится именно к части $F_2 \in \mathrm{Part}_G(N)$. □

Определение 25. Каждому разрезу $N \in \mathfrak{M}(G)$, относящемуся к части H_i, поставим в соответствие множество $\widetilde{N}$ следующим образом. Если $V(N) \subset H_i$, то положим $\widetilde{N} = N$. В противном случае, $\widetilde{N}$ получается из N заменой входящей в T_{3-i} вершины множества $V(N)$ на вершину t_{3-i} (эта вершина может быть как вершиной разреза N, тогда в множестве $\widetilde{N}$ будет вершина t_{3-i}, так и концом ребра разреза N, и тогда в множестве $\widetilde{N}$ будет ребро инцидентное t_{3-i}).

Также для любой части разбиения $A \in \mathrm{Part}_G(N)$ определим множество $\widetilde{A}$ следующим образом: $\widetilde{A} = A$ при $A \cap H_{3-i} = \varnothing$ и $\widetilde{A} = (A \setminus H_{3-i}) \cup \{t_{3-i}\}$ при $A \cap H_{3-i} \neq \varnothing$.

Лемма 19. *Пусть $N \in \mathfrak{M}(G)$ – разрез, относящийся к части H_1, и $\mathrm{Part}_G(N) = \{F_1, F_2\}$. Тогда $\widetilde{N} \in \mathfrak{M}(\widetilde{G_1})$ и $\mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{N}) = \{\widetilde{F_1}, \widetilde{F_2}\}$.*

Доказательство. Не умаляя общности будем считать, что нумерация частей F_1, F_2 выбрана так, чтобы $H_2 \subset F_2$ (это можно сделать по лемме 18). Тогда $|F_1 \cap H_2| \leqslant |V(N) \cap T_2| \leqslant 1$. Рассмотрим произвольное ребро $a_1a_2 \in N$ (где $a_i \in F_i$). Отметим, что тогда $a_1 \notin F_2 \supset H_2$. В графе $\widetilde{G_1}$ ребру a_1a_2 будет соответствовать ребро $a_1a_2' \in \widetilde{N}$, где $a_2' = a_2$, если $a_2 \notin H_2$, и $a_2' = t_2$ в противном случае.

Докажем сначала, что $\widetilde{N} \in \mathfrak{M}(\widetilde{G_1})$. Для этого покажем, что множество $\widetilde{N}$ разделяет вершины a_1 и a_2' в графе $\widetilde{G_1}$. Предположим противное: пусть в графе $\widetilde{G_1}$ существует простой путь P из a_1 в a_2', не содержащий вершин и ребер множества $\widetilde{N}$. Тогда построим в графе G путь из a_1 в a_2 следующим образом: заметим, что каждому ребру e графа $\widetilde{G_1}$ соответствует ровно одно ребро графа G, из которого ребро e могло быть получено при стягивании множества H_2 в вершину t_2. Заменим все ребра пути P ребрами, из которых они могли быть получены. Если путь P не содержит вершины t_2, то получится путь из a_1 в a_2 в графе G, который очевидно не пересекается с разрезом N, что невозможно. Если же путь P содержит вершину t_2, то участкам пути P от a_1 до t_2 и от t_2 до a_2' (последний участок может состоять из одной вершины) будут соответствовать путям в графе G из a_1 в c_1 и из c_2 в a_2, где $c_1, c_2 \in T_2$. Тогда соединив вершины c_1, c_2 путем, внутренние вершины которого лежат в $\mathrm{Int}(H_2)$, мы получим путь из a_1 в a_2, который, очевидно, не пересекает N. Но это невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство того, что $\widetilde{N} \in \mathfrak{M}(\widetilde{G_1})$.

Далее докажем, что $\mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{N}) = \{\widetilde{F_1}, \widetilde{F_2}\}$. Для этого сначала заметим, что разрез $\widetilde{N}$ не разделяет множество $\widetilde{F_1}$. Это очевидно в случае, если $F_1 \cap H_2 = \varnothing$. Если же $|F_1 \cap H_2| = 1$, то, не умаляя общности, можно считать, что $F_1 \cap H_2 = \{x_2\}$ и при этом все вершины множества

F_1, кроме x_2, будут в графе $\widetilde{G_1} - \widetilde{N}$ связаны с вершиной a_1, а вершина t_2 смежна в $\widetilde{G_1}$ с x_1 и, следовательно, тоже связана с a_1. Итак, $\widetilde{F_1}$ содержится в одной из частей $\mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{N})$. Тогда эта часть совпадает с $\widetilde{F_1}$, поскольку аналогично доказанному выше можно показать, что любому пути в $\widetilde{G_1}$ из a_1 в некоторую вершину b, не пересекающему $\widetilde{N}$, соответствует путь в G из a_1 в вершину из которой могла быть при стягивании получена вершина b, и этот путь не пересекает N. $\square$

Итак, каждому не содержащемуся в M разрезу $N \in \mathfrak{M}(G)$ соответствует разрез $\widetilde{N}$ в одном из графов $\widetilde{G_1}$, $\widetilde{G_2}$. Введем обозначения $\widetilde{M_1} = \{x_1t_2, y_1t_2, z_1t_2\}$ и $\widetilde{M_2} = \{x_2t_1, y_2t_1, z_2t_1\}$. Очевидно, что $\widetilde{M_1}, \widetilde{M_2}$ – вырожденные трехреберные разрезы в графах $\widetilde{G_1}$, $\widetilde{G_2}$ соответственно. Будем считать, что оба эти разреза соответствуют разрезу M. В следующей лемме мы изучим вопрос о том, каким разрезам графа G будут соответствовать разрезы его M-фрагментов, не содержащиеся в $\widetilde{M_i}$.

Лемма 20. *Пусть разрез $N' \in \mathfrak{M}(\widetilde{G_1})$ не содержится в M_1. Тогда существует разрез $N \in \mathfrak{M}(G)$, относящийся к части H_1, такой, что $\widetilde{N} = N'$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(N') = \{F_1', F_2'\}$, причем нумерация выбрана так, что $t_2 \in F_2'$ и $|T_1 \cap F_2'| \geqslant 2$. Покажем, что так выбрать нумерацию можно. Действительно, если $t_2 \notin N'$, то вершина t_2 принадлежит ровно одной из частей N'-разбиения графа $\widetilde{G_1}$ и из смежных с ней вершин максимум одна (соединенная с t_2 ребром разреза N') может не лежать в этой части. Если же $t_2 \in N'$, то вершина t_2 принадлежит обеим частям N'-разбиения графа $\widetilde{G_1}$ и в одной из этих частей найдутся хотя бы две смежные с t_2 вершины. Обозначим через A_1' компоненту графа $\widetilde{G_1} - N'$, содержащуюся в F_1' и рассмотрим следующие два случая: **1.** $t_2 \notin V(N')$; **2.** $t_2 \in V(N')$.

Случай 1. Пусть $t_2 \notin V(N')$. Тогда положив $N = N'$ мы получим, что $N \subset V(G) \cup E(G)$ и A_1' является одной из компонент графа $G - N$. Следовательно, $N \in \mathfrak{M}(G)$ и $\widetilde{N} = N'$.

Случай 2. Пусть $t_2 \in V(N')$. Тогда вершина t_2 должна быть смежна хотя бы с одной вершиной из A_1', следовательно, $A_1' \cap T_1 \neq \varnothing$. Так как $|F_2 \cap T_1| \geqslant 2$, имеем $|A_1' \cap T_1| \leqslant 1$. Таким образом, $|A_1' \cap T_1| = 1$ и не умаляя общности можно считать, что $T_1 \cap A_1' = \{x_1\}$. Тогда рассмотрим множество $N \subset V(G) \cup E(G)$, полученное из N' заменой вершины t_2 на x_2 (т. е. если $t_2 \in N'$, то $x_2 \in N$, а если $x_1t_2 \in N'$, то $x_1x_2 \in N$). Легко видеть, что A'_1 является одной из компонент графа $G - N$, следовательно, $N \in \mathfrak{M}(G)$ и $\widetilde{N} = N'$. □

В следующей лемме мы исследуем вопрос о том, когда при переходе от G к $\widetilde{G_1}$ могут склеиваться два разреза.

Лемма 21. *Пусть разрезы $N_1, N_2 \in \mathfrak{M}(G)$, относящиеся к части $H_1 \in \mathrm{Part}(M)$, таковы, что $\widetilde{N_1} = \widetilde{N_2}$. Тогда $N_1, N_2 \in \mathfrak{M}_1(G)$ и разделяющие множества, являющиеся их границами, вместе с множеством T_1 порождают ромашку в графе G. Разрез M является граничным разрезом этой ромашки.*

Доказательство. Поскольку $\widetilde{N_1} = \widetilde{N_2}$, множества $V(N_1)$ и $V(N_2)$ отличаются одной вершиной множества T_2. Не умаляя общности будем считать, что $x_2 \in V(N_1)$ и $z_2 \in V(N_2)$. Тогда $V(N_1) \setminus \{x_2\} = V(N_2) \setminus \{z_2\}$. Докажем, что $x_2 \in N_1$ (то есть что x_2 – именно вершина разреза N_1, а не конец одного из его ребер). Предположим противное: пусть $x_1x_2 \in N_1$. Тогда $x_1t_2 \in \widetilde{N_1} = \widetilde{N_2}$, откуда $x_1x_2 \in N_2$. Но тогда $x_2, z_2 \in V(N_2)$, что невозможно по пункту 2 леммы 18. Полученное противоречие доказывает, что $x_2 \in N_1$. Аналогично доказывается, что $z_2 \in N_2$.

Далее докажем, что $x_1 \notin N_1$ (то есть что x_1 не может быть вершиной разреза N_1, но в принципе может быть концом одного из его ребер). Предположим противное: пусть $N_1 = \{u_1u_2, x_1, x_2\}$, тогда хотя бы одно из множеств $\{u_1, x_1, x_2\}$ и $\{u_2, x_1, x_2\}$ будет разделяющим в графе G, что противоречит лемме 5. Поскольку $\widetilde{N_1} = \widetilde{N_2}$, это означает, что $z_1 \notin N_1$. Аналогично доказывается, что $x_1, z_1 \notin N_2$.

Поскольку $x_1 \notin N_1$, вершина x_1 принадлежит ровно одной из частей $\mathrm{Part}_G(N_1)$. Обозначим эту часть через F_{11}, а другую часть $\mathrm{Part}_G(N_1)$ – через F_{12}. Границы этих частей обозначим через S_{11} и S_{12} соответственно. Аналогично, пусть $\mathrm{Part}_G(N_2) = \{F_{21}, F_{22}\}$, $z_1 \in F_{21}$ и $z_1 \notin F_{22}$. Границы этих частей обозначим через S_{21} и S_{22}, соответственно.

Докажем, что $H_2 \subset F_{12}$ и $H_2 \cap F_{11} = \{x_2\}$. Для этого заметим, что $S_{12} \in \mathfrak{R}_3(G)$ (в противном случае, одна из вершин множества S_{12} должна быть смежна с x_2, что невозможно, поскольку $x_1 \notin S_{12}$). По лемме 6 множество S_{12} делит граф G ровно на две части и отделяет вершину x_1 от остальных вершин множества $V(M) \setminus S_{12}$. Тогда одна из частей $\mathrm{Part}(S_{12})$ (обозначим ее A_2) содержит все вершины множества T_2, а другая часть (обозначим ее A_1) содержит вершину x_1 и $H_2 \cap A_1 = \{x_2\}$. Далее, по лемме 4 имеем $F_{11} \subset A_1$ и $F_{12} \supset A_2$. Из этого и того, что $V(N_1) \cap H_2 = \{x_2\}$, следуют требуемые соотношения.

Поскольку $H_2 \subset F_{12}$, мы имеем $y_2, z_2 \in F_{12}$, а следовательно и $y_1, z_1 \in F_{12}$. Кроме того, мы знаем, что $z_1 \notin N_1$, следовательно, $z_1 \notin F_{11}$. Аналогично доказывается то, что $H_2 \subset F_{22}$, $H_2 \cap F_{21} = \{z_2\}$, $x_1, y_1 \in F_{22}$ и $x_1 \notin F_{21}$.

Наконец докажем, что $y_1 \in N_1$. Предположим противное, тогда вершина y_1 принадлежит ровно одной из частей разбиения $\mathrm{Part}_G(N_1)$, следовательно, $y_1 \notin F_{11}$. Тогда, переходя к графу $\widetilde{G_1}$, мы получим, что $x_1 \in \widetilde{F_{11}}$, $y_1 \notin \widetilde{F_{11}}$, $x_1 \notin \widetilde{F_{21}}$, $y_1 \in \widetilde{F_{22}}$. Следовательно, $\widetilde{F_{11}} \neq \widetilde{F_{21}}$ и $\widetilde{F_{11}} \neq \widetilde{F_{22}}$. С другой стороны, поскольку $\widetilde{N_1} = \widetilde{N_2}$, множества $\mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{N_1}) = \{\widetilde{F_{11}}, \widetilde{F_{12}}\}$ и $\mathrm{Part}_{\widetilde{G_1}}(\widetilde{N_2}) = \{\widetilde{F_{21}}, \widetilde{F_{22}}\}$ должны совпадать. Противоречие.

Итак, мы доказали, что $y_1 \in N_1$. Аналогично, $y_1 \in N_2$. Таким образом, $N_1, N_2 \in \mathfrak{M}_1(G)$. Рассмотрим те из множеств S_{ij}, которые являются разделяющими. Таких множеств будет хотя бы два, поскольку в каждом из разрезов N_1, N_2 как минимум одна из границ является разделяющим множеством. Все эти множества будут зависимы с T_1 и имеют с ним общую вершину y_1, следовательно, по лемме 3 эти множества вместе с множеством T_1 порождают ромашку в графе G. $\square$

Теорема 2. *Отображение $N \mapsto \widetilde{N}$ задает биекцию между множествами $\mathfrak{N}_3(G) \setminus \{M\}$ и $\mathfrak{N}_3(\widetilde{G_1}) \cup \mathfrak{N}_3(\widetilde{G_2})$.*

Доказательство. Пусть $N \in \mathfrak{N}_3(G) \setminus \{M\}$. По лемме 18 разрез N относится к одной из частей $H_i \in \mathrm{Part}_G(M)$, причем $\widetilde{N} \in \mathfrak{M}(\widetilde{G_i})$ по лемме 19. Поскольку переход от N к $\widetilde{N}$ не меняет количества ребер, $\widetilde{N} \in \mathfrak{M}_3(\widetilde{G_i})$. Наконец, поскольку разрез N нетривиален, его ребра не имеют общих концов и поскольку N относится к части H_i, мы имеем $|N \cap T_{3-i}| \leqslant 1$, следовательно, ребра разреза $\widetilde{N}$ также не имеют общих концов. Таким образом, $\widetilde{N} \in \mathfrak{N}_3(\widetilde{G_i})$.

Обратно, пусть $N' \in \mathfrak{N}_3(\widetilde{G_1}) \cup \mathfrak{N}_3(\widetilde{G_2})$. Не умаляя общности будем считать, что $N' \in \mathfrak{N}_3(\widetilde{G_1})$. Тогда по лемме 20 существует разрез $N \in \mathfrak{M}(G)$, относящийся к части H_1, такой, что $\widetilde{N} = N'$. Очевидно, что $N \in \mathfrak{N}_3(G) \setminus \{M\}$. Более того, по лемме 21 такой разрез единственен. $\square$

2.2. Разбиение графа несколькими разрезами. Пусть
$$\mathfrak{C} = \{M_1, \ldots, M_n\} \subset \mathfrak{R}_3(G)$$
– набор нетривиальных разрезов графа G. Ведем следующие обозначения: $\mathrm{Part}(M_i) = \{H_{i1}, H_{i2}\}$ и $\mathrm{Bound}(H_{ij}) = T_{ij}$, где $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, 2\}$. Рассмотрим один из разрезов $M_i \in \mathfrak{C}$. Как видно из леммы 18, каждый из остальных разрезов набора $\mathfrak{C}$ относится к одной из двух частей M_i-разбиения графа G.

В случае, если $n = 1$, мы, как это было описано в предыдущем разделе, построим графы $\widetilde{G_1}$ и $\widetilde{G_2}$, и будем считать, что исходному графу G соответствует дерево разбиения с двумя вершинами, соответствующими этим графам и одним соединяющим их ребром. Далее мы всюду будем считать, что $n \geqslant 2$.

Определение 26. Каждому разрезу M_i поставим в соответствие разбиение $\mathfrak{C}_i$ остальных разрезов набора $\mathfrak{C}$ на классы: разрезы M_j и M_ℓ попадут в один класс разбиения тогда и только тогда, когда они относятся к одной и той же части M_i-разбиения графа G.

Будем говорить, что разрез M_i *разделяет* M_j и M_ℓ, если они содержатся в разных классах разбиения $\mathfrak{C}_i$. Назовем разрезы M_i и M_j *соседними*, если их не разделяет никакой разрез набора $\mathfrak{C}$. Обозначим через $HT(\mathfrak{C})$ гиперграф, вершинами которого являются разрезы из $\mathfrak{C}$, а гиперребрами – максимальные по включению множества попарно соседних разрезов. Гиперграф $HT(\mathfrak{C})$ назовем *гиперграфом разбиения* графа G набором $\mathfrak{C}$.

Конструкция гиперграфа разбиения подробно описана в [2, раздел 2]. В данной работе мы будем использовать следующую теорему (см. [2, теорема 3]).

Теорема 3. *Каждому элементу множества V поставлено в соответствие разбиение остальных элементов V на классы. Пусть для любых $a, b, c \in V$ выполнено условие: если a разделяет b и c, то b не разделяет a и c. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Гипреграф $T(V)$ данного разбиения является гипердеревом (то есть, он связен и любой цикл в этом гиперграфе есть подмножество гиперребра).*

2) *Пусть для некоторой вершины $a \in V$ гиперграф $T(V) - a$ распадается на компоненты связности $W_1, \ldots, W_\ell$. Тогда множество классов, на которые элемент a разбивает остальные элементы V, есть в точности $\{W_1, \ldots, W_\ell\}$.*

Докажем, что построенный выше гиперграф разбиения удовлетворяет условиям этой теоремы, то есть является гипердеревом.

Лемма 22. 1) *Гиперграф $HT(\mathfrak{C})$ является гипердеревом.*

2) *Любые два гиперребра гиперграфа $HT(\mathfrak{C})$ имеют не более одного общего элемента.*

3) *Каждый разрез $M_i \in \mathfrak{C}$ входит не более, чем в два гиперребра. Количество гиперребер, содержащих M_i, совпадает с количеством компонент связности гиперграфа $HT(\mathfrak{C}) - M_i$, а сами компоненты совпадают с классами из разбиения $\mathfrak{C}_i$.*

Доказательство. 1) Для доказательства этой части нам достаточно проверить условие теоремы 3, то есть доказать, что если разрез M_i разделяет M_j и M_ℓ, то M_j не разделяет M_i и M_ℓ. Не умаляя общности будем считать, что M_j относится к части H_{i1}, а M_ℓ – к части H_{i2}. Выберем нумерацию частей так, чтобы $H_{i2} \subset H_{j2}$ и $H_{i1} \subset H_{\ell 1}$ – это можно сделать по лемме 18. Тогда $\mathrm{Nb}(H_{\ell 2}) \subset \mathrm{Nb}(H_{i2}) \subset \mathrm{Nb}(H_{j2})$, следовательно, разрезы M_i и M_ℓ относятся к части H_{j2} и не разделяются разрезом M_j.

2) Пусть гиперребра E_1 и E_2 имеют два общих элемента M_i и M_j. Докажем, что тогда любые два разреза из множества $E_1 \cup E_2$ являются соседними. Для разрезов, принадлежащих одному и тому же гиперребру, это непосредственно следует из конструкции гиперграфа $HT(\mathfrak{C})$. Пусть $N_1 \in E_1$ и $N_2 \in E_2$ тогда последовательность разрезов $(M_i, E_1, M_j, E_2, M_i)$ является в гипердереве $HT(\mathfrak{C})$ циклом, следовательно, должна содержаться в одном гиперребре. Тогда разрезы N_1 и N_2 должны быть соседними. Итак, мы доказали, что $E_1 \cup E_2$ – множество попарно соседних разрезов, содержащее E_1 и E_2. Но это противоречит тому, что E_1 и E_2 – гиперребра.

3) Согласно пункту 2 теоремы 3 компоненты связности гиперграфа $HT(\mathfrak{C}) - M_i$ в точности совпадают с классами, на которые разрез M_i разбивает остальные разрезы. Докажем, что для каждой компоненты связности W_j гиперграфа $HT(\mathfrak{C}) - M_i$ существует единственное гиперребро гиперграфа $HT(\mathfrak{C})$, имеющее с W_j непустое пересечение. Действительно, существование такого гиперребра очевидно, поскольку в случае его отсутствия, в гиперграфе $HT(\mathfrak{C})$ вершина M_i не связана с вершинами множества W_j – противоречие с тем, что $HT(\mathfrak{C})$ является гипердеревом. Пусть таких гиперребер два: E_1 и E_2. Поскольку W_j – компонента связности гиперграфа $HT(\mathfrak{C}) - M_i$, мы получаем, что $E_1, E_2 \subset W_j \cup \{M_i\}$. Далее, поскольку гиперребра E_1 и E_2 различны,

найдутся разрезы $N_1 \in E_1 \setminus E_2$ и $N_2 \in E_2 \setminus E_1$. По доказанному выше, $N_1, N_2 \in W_j$, следовательно, разрезы N_1 и N_2 соединены путем в гиперграфе $HT(\mathfrak{C}) - M_i$. Вместе с разрезом M_i этот путь образует цикл в гиперграфе $HT(\mathfrak{C})$. Поскольку $HT(\mathfrak{C})$ – гипердерево, существует гиперребро E_3, содержащее все разрезы из этого цикла и, в частности, M_i, N_1, N_2. Тогда гиперребро E_3 имеет хотя бы по два общих элемента с каждым из гиперребер E_1 и E_2, следовательно, по пункту 2 данной леммы E_3 совпадает с каждым из них. Противоречие с тем, что E_1 и E_2 различны.

Итак, мы доказали, что количество гиперребер, содержащих M_i, равно количеству классов, на которые M_i разбивает остальные разрезы набора $\mathfrak{C}$. По определению, каждый такой класс соответствует одной из частей $\mathrm{Part}_G(M_i)$. Поскольку $|\mathrm{Part}_G(M_i)| = 2$, это означает, что количество классов, а следовательно и количество гиперребер, содержащих M_i, не больше двух. $\square$

Определение 27. 1) Назовем разрез $M_i \in \mathfrak{C}$ *крайним*, если он входит ровно в одно гиперребро гиперграфа $HT(\mathfrak{C})$.

2) Назовем *деревом разрезов* граф $TC(\mathfrak{C})$, вершинами которого являются все гиперребра гиперграфа $HT(\mathfrak{C})$, а также все одноэлементные подмножества $\mathfrak{C}$, элементами которых являются крайние разрезы. Две вершины графа $TC(\mathfrak{C})$ будут смежны тогда и только тогда, когда соответствующие множества имеют непустое пересечение. Мы также будем использовать обозначение $TC(G) = TC(\mathfrak{N}_3(G))$.

3) Будем говорить, что разрез $M \in \mathfrak{C}$ *соответствует* ребру $e = S_1S_2 \in E(TC(\mathfrak{C}))$, если $S_1 \cap S_2 = \{M\}$.

Лемма 23. 1) *Граф* $TC(\mathfrak{C})$ *является деревом.*

2) *Соответствие между множествами* $\mathfrak{C}$ *и* $E(TC(\mathfrak{C}))$, *указанное в определении* 27, *является биекцией.*

Доказательство. 2) Докажем сначала вторую часть. Для этого заметим, что любые два множества, являющиеся элементами $V(TC(\mathfrak{C}))$, имеют не более одного общего элемента. Действительно, для множеств, являющихся гиперребрами грипердерева $HT(\mathfrak{C})$, это следует из пункта 2 леммы 22, а если хотя бы одно из множеств одноэлементно, то и их пересечение содержит не более одного элемента. Таким образом, для любого ребра $S_1S_2 \in E(TC(\mathfrak{C}))$ имеет место равенство $|S_1 \cap S_2| = 1$. Тогда ребру S_1S_2 соответствует единственный разрез из $S_1 \cap S_2$.

Для доказательства в обратную сторону покажем, что любой разрез $M \in \mathfrak{C}$ входит ровно в два множества из $V(TC(\mathfrak{C}))$ – тогда разрез M будет соответствовать ребру, соединяющему эти множества, и только ему. Рассмотрим два случая: разрез M – крайний и разрез M – не крайний. Если разрез M – крайний, то он входит ровно в одно гиперребро, а также в множество $\{M\}$, то есть ровно в два множества из $V(TC(\mathfrak{C}))$. Если же разрез M – не крайний, то он разбивает остальные разрезы из множества $\mathfrak{C}$ ровно на два класса, следовательно, по части 3 леммы 22, M принадлежит ровно двум гиперребрам грипердерева $HT(\mathfrak{C})$. То есть и в этом случае разрез M входит ровно в два множества из $V(TC(\mathfrak{C}))$.

1) Заметим, что каждый маршрут в гиперграфе $HT(\mathfrak{C})$ является последовательностью разрезов из $\mathfrak{C}$, в которой любые два последовательных элемента являются соседними разрезами. В графе $TC(\mathfrak{C})$ каждому разрезу из $\mathfrak{C}$ соответствует ребро, причем соседним разрезам соответствуют ребра, имеющие общую вершину. Таким образом, любому маршруту в грперграфе $HT(\mathfrak{C})$ будет соответствовать маршрут в графе $TC(\mathfrak{C})$, поэтому из связности грипердерева $HT(\mathfrak{C})$ следует связность графа $TC(\mathfrak{C})$.

Предположим, что в графе $TC(\mathfrak{C})$ есть цикл. Очевидно, что все вершины этого цикла соответствуют гиперребрам гиперграфа $HT(\mathfrak{C})$, поскольку вершины соответствующие крайним разрезам имеют степень 1. Каждое же ребро цикла соответствует общему разрезу двух гиперребер, поэтому циклу в графе $TC(\mathfrak{C})$ будет соответствовать цикл в гиперграфе $HT(\mathfrak{C})$, не являющийся подмножеством никакого гиперребра. Но это противоречит тому, что $HT(\mathfrak{C})$ – гипердерево. $\square$

Далее, мы установим связь между вершинами дерева $TC(\mathfrak{C})$ и частями $\mathrm{Part}_G(\mathfrak{C})$.

Определение 28. Пусть $M \in \mathfrak{C}$ и $S \in V(TC(\mathfrak{C}))$. Введем следующие обозначения.

1) Через $A_{M \supset S}$ мы будем обозначать часть $\mathrm{Part}_G(M)$, к которой относятся все разрезы из множества $S \setminus \{M\}$. Если же $S \setminus \{M\} = \varnothing$ (т. е. если M – крайний разрез и $S = \{M\}$), то через $A_{M \supset S}$ будет обозначаться та из частей $\mathrm{Part}_G(M)$, к которой не относится ни один из разрезов множества $\mathfrak{C}$. (Напомним, что $|\mathfrak{C}| > 1$, поэтому такая часть ровно одна.) Часть $\mathrm{Part}_G(M)$, отличную от $A_{M \supset S}$ мы будем обозначать через $A_{M \not\supset S}$.

2) Границу части $A_{M\supset S}$ мы будем обозначать через $T_{M\supset S}$, а границу части $A_{M\not\supset S}$ – через $T_{M\not\supset S}$.

3) $A_S = \bigcap\limits_{M\in S} A_{M\supset S}$.

Лемма 24. *Если $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{N}_3(G)$ и $|\mathfrak{C}| > 1$, то выполняются следующие утверждения.*

1) *Для любой вершины $S \in V(TC(\mathfrak{C}))$ выполнено $A_S = \bigcap\limits_{M\in \mathfrak{C}} A_{M\supset S}$.*

2) *Для любой части $A \in \mathrm{Part}_G(\mathfrak{C})$ найдется $S \in V(TC(\mathfrak{C}))$, такая, что $A = A_S$.*

3) *Если $S \in V(TC(\mathfrak{C}))$ и $|A_S| > 0$, то $A_S \in \mathrm{Part}_G(\mathfrak{C})$.*

Доказательство. 1) Рассмотрим два случая: **1.** $S = \{M\}$, где M – крайний разрез; **2.** S является гиперребром $HT(\mathfrak{C})$.

1. Пусть $S = \{M\}$, где M – крайний разрез. Тогда любой другой разрез $N \in \mathfrak{C}$ относится к части $A_{M\not\supset S}$, откуда по следствию 3 получаем $A_{M\supset S} \subset A_{N\supset S}$, из чего немедленно следует требуемое.

2. Пусть S является гиперребром $HT(\mathfrak{C})$. Рассмотрим произвольный разрез $N \in \mathfrak{C}\setminus S$. Нам нужно доказать, что $A_S \subset A_{N\supset S}$. Поскольку $N \notin S$, должен существовать разрез $N_1 \in \mathfrak{C}$, разделяющий разрез N с разрезами из S (напомним, что по определению разрез N_1 не может разделять разрезы из S, причем $|S| > 1$, так что даже если $N_1 \in S$, он отделяет N от оставшейся части S). Тогда разрез N относится к части $A_{N_1\not\supset S} \in \mathrm{Part}_G(N_1)$, следовательно, по лемме 18 одна из частей $\mathrm{Part}_G(N)$ содержится в $A_{N_1\not\supset S}$. Заметим, что это не может быть часть $A_{N\supset S}$, поскольку для любого разреза $L \in S \setminus \{N_1\}$ часть $A_{N\supset S}$ содержит как минимум 5 вершин из множества $V(L)$, а часть $A_{N_1\not\supset S}$ – не более одной вершины этого множества.

Таким образом, $A_{N\not\supset S} \subset A_{N_1\not\supset S}$, откуда по следствию 3 получаем $A_{N_1\supset S} \subset A_{N\supset S}$. Выберем N_1 так, чтобы часть $A_{N_1\supset S}$ содержала наименьшее возможное число вершин. Тогда $N_1 \in S$, поскольку в противном случае аналогичным образом найдется разрез $N_2 \in \mathfrak{C}$, разделяющий N_1 и S и такой, что $A_{N_2\supset S} \subsetneq A_{N_1\supset S} \subset A_{N\supset S}$, откуда часть $A_{N_1\supset S}$ не была наименьшей возможной. Итак, $N_1 \in S$, откуда $A_S \subset A_{N_1\supset S} \subset A_{N\supset S}$, что и требовалось.

2) Рассмотрим часть

$$A = \bigcap_{M\in\mathfrak{C}} H_M, \quad \text{где} \quad H_M \in \mathrm{Part}_G(M).$$

Выделим в $\mathfrak{C}$ подмножество S состоящее из тех и только тех разрезов M, для которых часть H_M не содержит других частей вида H_N. Если $|S| = 1$, то очевидно, что единственным элементом S является крайний разрез и $A = A_S$. Пусть $|S| > 1$. Тогда заметим, что для любых двух разрезов $M, N \in S$ разрез M относится к части H_N, а разрез N – к части H_M. Действительно, если, например, M относится к H_N, а N не относится к H_M, то по следствию 3 имеем $H_M \subset H_N$, что противоречит выбору S, а если оба разреза M и N не относятся к указанным частям, то $H_M \cap H_N = \varnothing$, следовательно, A не является частью. Но тогда ни один разрез $K \in \mathfrak{C}$ не может разделять M и N, поскольку в противном случае H_K будет содержаться либо в H_M, либо в H_N.

Итак, мы доказали, что разрезы множества S – попарно соседние. С другой стороны, для любого разреза $L \in \mathfrak{C} \setminus S$ найдется разрез $M \in S$, такой, что $H_M \subset H_L$, следовательно, M отделяет L от остальных разрезов множества S. Таким образом, S является гиперребром гипергарфа $HT(\mathfrak{C})$ и тогда очевидно, что $A = A_S$.

3) По пункту 1 данной леммы множество A_S является квазичастью. С другой стороны, заметим, что поскольку все разрезы из $\mathfrak{C}$ являются трехреберными, любая непустая квазичасть $\mathrm{QPart}_G(\mathfrak{C})$ является частью. Действительно, для любого разреза $M \in \mathfrak{C}$ части M-разбиения не пересекаются и, следовательно, любые две различные квазичасти также не пересекаются. $\square$

Замечание 12. 1) Существенным отличием разбиения трехсвязного графа на части при помощи трехреберных разрезов от разбиения на части при помощи 3-разделяющих множеств является то, что в первом случае возможны части из одной вершины, а во втором случае такие части невозможны. Действительно, если мы разбиваем граф набором 3-разделяющих множеств, то любые две смежные вершины попадут в одну часть, следовательно, в любой части будет хотя бы две вершины.

2) Тем не менее, не каждой вершине дерева $TC(\mathfrak{C})$ будет соответствовать часть $\mathrm{Part}_G(\mathfrak{C})$: легко видеть, что множество A_S может быть пустым.

Далее мы поставим в соответствие каждой вершине дерева $TC(\mathfrak{C})$ (в том числе и тем вершинам, которым не соответствует никакая часть разбиения!) трехсвязный и циклически реберно-четырехсвязный граф. Для этого нам понадобится еще одна вспомогательная лемма.

Лемма 25. *Если $S \in V(TC(\mathfrak{C}))$ и $M, N \in S$, то $T_{M \not\supset S} \cap T_{N \not\supset S} = \varnothing$.*

Доказательство. По определению части $A_{M\supset S}$, все остальные разрезы множества S, в том числе и N, относятся именно к этой части M-разбиения. Тогда $A_{N\not\supset S} \subset A_{M\supset S}$, следовательно, $A_{N\not\supset S} \cap A_{M\not\supset S} = \varnothing$, а тогда и $T_{M\not\supset S} \cap T_{N\not\supset S} = \varnothing$. □

Замечание 13. Вершины множеств $T_{M\not\supset S}$ и $T_{N\not\supset S}$ могут быть смежны, поскольку разрезы M и N могут иметь общее ребро. Однако, по следствию 3 общее ребро у M и N может быть максимум одно, поэтому и между множествами $T_{M\not\supset S}$ и $T_{N\not\supset S}$ может быть проведено не более одного ребра.

Рассмотрим новые (не входящие в $V(G)$) вершины t_{ij}, где $j \in \{1,2\}$ и $i \in \{1,\dots,n\}$. Каждая из вершин t_{ij} будет соответствовать границе T_{ij} одной из частей M_i-разбиения графа G. Для каждой вершины S дерева $TC(\mathfrak{C})$ построим вспомогательное множество

$$O_S = \bigcap_{M\in S} \mathrm{Nb}(A_{M\supset S}).$$

Легко видеть, что

$$O_S = A_S \cup \bigcup_{M\in S} T_{M\not\supset S}.$$

Определение 29. Пусть $S \in V(TC(\mathfrak{C}))$. Назовем $\mathfrak{C}$-*фрагментом* графа G граф $\widetilde{G}_S$, получаемый из индуцированного подграфа $G(O_S)$ стягиванием в точки всех подмножеств вида $T_{M\not\supset S}$. Более точно, мы удаляем из графа $G(O_S)$ вершины каждого из множеств $T_{M\not\supset S}$ и заменяем каждое из них на соответствующую этому подмножеству вершину t_{ij} (т.е. i и j таковы, что $T_{M\not\supset S} = T_{ij}$). При этом, вершина t_{ij} будет смежна в графе $\widetilde{G}_S$ с теми и только теми вершинами множества A_S, которые в графе G были смежны с какой-либо вершиной множества T_{ij}. Вершины t_{ij} и t_{st} будут смежны в графе $\widetilde{G}_S$ в том и только в том случае, если в графе $G(O_S)$ существовало ребро, соединяющее какую-либо вершину множества T_{ij} с какой-либо вершиной множества T_{st}.

Замечание 14. 1) Как уже отмечалось в замечании 13, между множествами $T_{M\not\supset S}$ и $T_{N\not\supset S}$ может быть проведено максимум одно ребро. Кроме того, поскольку множество $T_{M\not\supset S}$ является границей разреза, каждая вершина множества A_S может быть смежна максимум с одной вершиной множества $T_{M\not\supset S}$. Тем самым, мы получили биекцию между множествами ребер графов $G(O_S)$ и $\widetilde{G}_S$.

2) Легко видеть, что если $S = \{M_{i_1}, M_{i_2}, \dots, M_{i_m}\}$, то граф $\widetilde{G}_S$ может быть легко получен последовательными выделениями M_i-фрагментов. Более того, итоговый результат не зависит от порядка выполнения операций.

Теорема 4. 1) *Для любой вершины S дерева $TC(\mathfrak{C})$ соответствующий ей $\mathfrak{C}$-фрагмент $\widetilde{G}_S$ трехсвязен.*

2) *Если при этом $\mathfrak{C} = \mathfrak{N}_3(G)$, то граф $\widetilde{G}_S$ будет циклически реберно-четырехсвязным.*

Доказательство. 1) Доказательство этого пункта непосредственно следует из леммы 8, и отмеченного в замечании 14 факта, что $\mathfrak{C}$ может быть построен путем последовательности взятия M_i-фрагментов.

2) По теореме 2, в графе $\widetilde{G}_S$ нет нетривиальных трехреберных разрезов. А тогда по лемме 7 этот граф является циклически реберно-четырехсвязным. □

Наконец, посмотрим, как переход к $\mathfrak{C}$-фрагментам влияет на разделяющие множества и части разбиения.

Определение 30. Пусть разделяющее множество $R \in \mathfrak{M}^+(G)$ не содержится ни в одном из множеств набора $\mathfrak{C}$. Тогда будем говорить, что множество R *относится* к $\mathfrak{C}$-фрагменту $\widetilde{G}_S$, если для любого разреза $M \in \mathfrak{C}$ множество R относится к части $A_{M \supset S}$. В этом случае обозначим через $\widetilde{R}_{\mathfrak{C}}$ множество, получаемое из R заменой всех вершин множеств $T_{M \not\supset S}$ (как входящих в R, так и являющихся концами его ребер) на соответствующие им вершины t_{ij}. Для каждой части $H \in \mathrm{Part}_G(R)$ обозначим через $\widetilde{H}_{\mathfrak{C}}$ множество, получаемое из H удалением всех вершин, входящих в какую-либо часть вида $A_{M \not\supset S}$ и замены таких вершин на соответствующие удаляемой части вершины вида t_{ij}.

Теорема 5. 1) *Пусть разделяющее множество $R \in \mathfrak{M}^+(G)$ относится к $\mathfrak{C}$-фрагменту $\widetilde{G}_S$ и $H \in \mathrm{Part}_G(R)$. Тогда множество $\widetilde{R}_{\mathfrak{C}}$ является разделяющим в графе $\widetilde{G}_S$, а множество $\widetilde{H}_{\mathfrak{C}}$ будет либо одной частью, либо объединением двух частей $\mathrm{Part}_{\widetilde{G}_S}(\widetilde{R}_{\mathfrak{C}})$. Более того, ситуация, когда $\widetilde{H}_{\mathfrak{C}}$ является объединением двух частей $\mathrm{Part}_{\widetilde{G}_S}(\widetilde{R}_{\mathfrak{C}})$ возможна только в том случае, когда $R \in \mathfrak{R}_3(G)$, $|\mathrm{Part}_G(R)| = 2$ и $|\mathrm{Part}_{\widetilde{G}_S}(\widetilde{R}_{\mathfrak{C}})| = 3$.*

2) *Для любого разделяющего множества* $R' \in \mathfrak{M}^+(\widetilde{G}_S)$ *найдется разделяющее множество* $R \in \mathfrak{M}^+(G)$, *относящееся к* $\mathfrak{C}$-*фрагменту* $\widetilde{G}_S$ *и такое, что* $\widetilde{R}_{\mathfrak{C}} = R'$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность графов

$$G = G_0, G_1, \ldots, G_m = \widetilde{G}_S,$$

в который каждый очередной граф G_i является M_i-фрагментом предыдущего для некоторого разреза $M_i \in \mathfrak{R}_3(G_{i-1})$.

1) Пусть $R = R_0 \in \mathfrak{R}_3(G)$. Тогда многократно применяя лемму 10 мы получим последовательность разделяющих множеств $R = R_0, R_1, \ldots, R_m$, в которой каждое очередное множество $R_i \in \mathfrak{R}_3(G_i)$ соответствует предыдущему множеству R_{i-1} при взятии очередного M_i-фрагмента. Учитывая то, как строились эти множества (см. определения 23 и 30), легко видеть, что $R_m = \widetilde{R}_{\mathfrak{C}}$, откуда $\widetilde{R}_{\mathfrak{C}} \in \mathfrak{R}_3(\widetilde{G}_S)$.

Далее посмотрим на то, как во время этой последовательности взятия M_i-фрагментов будет изменяться часть H. По лемме 11, если очередное множество R_{i-1} содержится в части $\mathrm{Part}_{G_{i-1}}(M_i)$, относительно которой берется M_i-фрагмент, то каждой части $\mathrm{Part}_{G_{i-1}}(R_{i-1})$ будет соответствовать ровно одна часть $\mathrm{Part}_{G_i}(R_i)$. Если же множество R_{i-1} не содержится в части $\mathrm{Part}_{G_{i-1}}(M_i)$, относительно которой берется M_i-фрагмент, то по лемме 12 возможны две ситуации: либо также как и в предыдущем случае каждой части $\mathrm{Part}_{G_{i-1}}(R_{i-1})$ будет соответствовать ровно одна часть $\mathrm{Part}_{G_i}(R_i)$, либо одной из частей $\mathrm{Part}_{G_{i-1}}(R_{i-1})$ будет соответствовать две части $\mathrm{Part}_{G_i}(R_i)$. Более того, в последнем случае мы имеем $|\mathrm{Part}_{G_{i-1}}(R_{i-1})| = 2$ и $|\mathrm{Part}_{G_i}(R_i)| = 3$.

Таким образом, возможны две ситуации: либо на каждом из шагов процесса построения графа $\widetilde{G}_S$ части H будет соответствовать ровно одна часть $\mathrm{Part}_{G_i}(R_i)$ (и тогда $\widetilde{H}_{\mathfrak{C}} \in \mathrm{Part}_{\widetilde{G}_S}(\widetilde{R}_{\mathfrak{C}})$), либо на каком-то очередном шаге соответствующая H часть $\mathrm{Part}_{G_{i-1}}(R_{i-1})$ разделится на две части $\mathrm{Part}_{G_i}(R_i)$. Во втором случае мы уже доказали, что $|\mathrm{Part}_{G_{i-1}}(R_{i-1})| = 2$ и $|\mathrm{Part}_{G_i}(R_i)| = 3$, но тогда на всех предыдущих шагах количество частей разбиения было равно двум, а на всех последующих шагах – трем. Следовательно, в этом случае $|\mathrm{Part}_G(R)| = 2$, $|\mathrm{Part}_{\widetilde{G}_S}(\widetilde{R}_{\mathfrak{C}})| = 3$ и $\widetilde{H}_{\mathfrak{C}}$ является объединением двух частей $\mathrm{Part}_{\widetilde{G}_S}(\widetilde{R}_{\mathfrak{C}})$.

Для случая $R \in \mathfrak{M}(G)$ доказательство аналогично. По лемме 19 на каждом шаге процесса построения графа $\widetilde{G}_S$ разрезу R будет соответствовать разрез $R_i \in \mathfrak{M}(G_i)$, а части H – часть $H_i \in \mathrm{Part}_{G_i}(R_i)$. Таким образом, в этом случае $\widetilde{R}_{\mathfrak{C}} = R_m \in \mathfrak{M}(\widetilde{G}_S)$ и $\widetilde{H}_{\mathfrak{C}} = H_m \in \mathrm{Part}_{\widetilde{G}_S}(\widetilde{R}_{\mathfrak{C}})$.

2) Проделаем процесс построения графа $\widetilde{G}_S$ в обратном порядке. На каждом очередном шаге множеству $R'_i \in \mathfrak{M}^+(G_i)$ будет соответствовать множество $R'_{i-1} \in \mathfrak{M}^+(G_{i-1})$, такое, что $R'_i = \widetilde{R}'_{i-1}$. Для случая $R' \in \mathfrak{R}_3(\widetilde{G}_S)$ это следует из леммы 10, а для случая $R' \in \mathfrak{M}(\widetilde{G}_S)$ – из леммы 20. Полученное в конце этого процесса множество $R = R'_0$ и будет искомым. □

Литература

1. Д. В. Карпов, *Блоки в k-связных графах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **293** (2002), 59–93.
2. Д. В. Карпов, *Разделяющие множества в k-связном графе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **340** (2006), 33–60.
3. Д. В. Карпов, *Дерево разбиения двусвязного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **417** (2013), 86–105.
4. Д. В. Карпов, *Дерево разрезов и минимальный k-связный граф.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **427** (2014), 22–40.
5. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *О структуре k-связного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **266** (2000), 76–106.
6. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *Структура разбиения трехсвязного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **391** (2011), 90–148.
7. Ф. Харари, *Теория графов.* Москва, "Мир", 1973. (Перевод с английского. F. Harary, *Graph theory,* 1969.)
8. W. Hohberg, *The decomposition of graphs into k-connected components* — Discr. Math. **109** (1992), 133–145.
9. W. T. Tutte, *Connectivity in graphs*, Toronto, Univ. Toronto Press, 1966.

Pastor A. V. On a decomposition of a 3-connected graph into cyclically 4-edge-connected components.

A graph is called cyclically 4-edge-connected if removing any three edges from it leads us to a graph, at most one connected component of which contains a cycle. 3-connected graph is 4-edge-connected iff removing any three edges from it leads us to either a connected graph or to a graph with exactly two connected components, one of which is a single-vertex one. We show, how to correspond for any 3-connected graph a components

tree, such that every component would be a 3-connected and cyclically 4-edge-connected graph.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский
политехнический университет Петра Великого
E-mail: avpastor@yandex.ru

Поступило 18 ноября 2016 г.