Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 450, 2016 г.

Д. В. Карпов

НИЖНИЕ ОЦЕНКИ КОЛИЧЕСТВА ЛИСТЬЕВ В ОСТОВНЫХ ДЕРЕВЬЯХ

§1. Введение. Основные обозначения

В работе будут использоваться стандартные обозначения. Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, множество рёбер – через $E(G)$, для количества вершин и рёбер будем использовать обозначения $v(G)$ и $e(G)$ соответственно. Везде в работе графы не содержат петель и кратных рёбер.

Через $d_G(x)$ обозначим степень вершины x в графе G, минимальную степень вершины графа G, как обычно, обозначим через $\delta(G)$.

Через $g(G)$ обозначим *обхват* графа G (то есть, длину его наименьшего цикла). Если граф G – лес, то положим $g(G) = \infty$.

Для связного графа G обозначим через $u(G)$ максимально возможное количество висячих вершин в остовном дереве графа G.

Замечание 1. Очевидно, что если F – дерево, то $u(F)$ – количество его висячих вершин.

Опубликовано несколько работ, в которых доказываются оценки снизу на $u(G)$. Так, в 1981 году Сторер [1] сделал предположение, что $u(G) > \frac{1}{4}v(G)$ при $\delta(G) \geqslant 3$. В том же году Линиал высказал более сильную гипотезу : $u(G) \geqslant \frac{\delta(G)-2}{\delta(G)+1}v(G) + c$ при $\delta(G) \geqslant 3$, где константа $c > 0$ зависит только от $\delta(G)$. Эта гипотеза появилась не на пустом месте: для любого $d \geqslant 3$ легко придумать бесконечную серию примеров графов с минимальной степенью d, для которых $\frac{u(G)}{v(G)}$ стремится к $\frac{d-2}{d+1}$. Таким образом, оценка из гипотезы Линиала асимптотически точна в тех случаях, когда она верна.

Для $d = 3$ и $d = 4$ утверждение гипотезы доказали Клейтман и Вест ([3], 1991), для $d = 5$ – Григгс и Ву ([4], 1996). В обеих работах применялся метод *мёртвых вершин*. С развитием этого метода для

Ключевые слова: остовное дерево, количество листьев.

Исследования выполнены при поддержке правительства РФ (грант 14.Z50.31.0030), гранта Президента РФ НШ-9721.2016.1 и гранта РФФИ 14-01-00156.

$d \geqslant 6$ есть значительные проблемы, дальнейших результатов в этом направлении на настоящий момент нет. Из работ [5–7] следует, что для достаточно больших d гипотеза Линиала неверна. Однако, для малых значений $d > 5$ вопрос остается открытым.

В ряде работ рассматриваются остовные деревья в классе графов с дополнительными ограничениями вида запрета на какой-то подграф. Больше всего работ посвящено изучению остовных деревьев в графах без K_4^- (полного подграфа на 4 вершинах без одного ребра). Сначала ([2], 1989) было доказано, что $u(G) \geqslant \frac{v(G)+4}{3}$ в связном кубическом графе без K_4^-. Позже Бонсма ([8], 2008) доказал две интересные оценки для связного графа с $\delta(G) \geqslant 3$: $u(G) \geqslant \frac{v(G)+4}{3}$ для графа без треугольников (то есть, с $g(G) \geqslant 4$) и $u(G) \geqslant \frac{2v(G)+12}{7}$ для графа без K_4^-.

Эти результаты не дают ответа на вопрос, как оценить максимальное количество висячих вершин в остовном дереве связного графа с вершинами степеней 1 и 2. Недавно появились работы, в которых наличие вершин степени 1 и 2 в графе не мешает построению остовного дерева с достаточно большим количеством висячих вершин. В работе [9] для связного графа G без треугольников с v_3 вершинами степени хотя бы 3 доказана оценка $u(G) \geqslant \frac{v_3+4}{3}$ (на самом деле, в теореме 1 из [9] эта оценка сформулирована и доказана для более широкого класса графов). В работе [11] для связного графа G с v_3 вершинами степени 3 и v_4 вершинами степени хотя бы 4 доказана оценка $u(G) \geqslant \frac{2v_4}{5} + \frac{2v_3}{15}$.

Д. В. Карпов и А. В. Банкевич [13] доказали для связного графа G, в котором $v(G) \geqslant 2$ и s вершин имеют степень, отличную от 2, оценку $u(G) \geqslant \frac{1}{4}(s-2)+2$. В аналогичных обозначения для графа без треугольников А. В. Банкевич [14] доказал оценку $u(G) \geqslant \frac{1}{3}(s-2)+2$. Обе эти оценки точные, существуют бесконечные серии примеров, на которых они достигаются. Глядя на эти результаты можно высказать предположение $u(G) \geqslant \frac{g-2}{2g-2}(s-2)+2$, однако, в работе [14] показано, что при $g \geqslant 10$ это не так.

Обозначим через $\ell(G)$ количество вершин в максимальной цепочке последовательно соединённых вершин степени 2 в графе G.

В работе [12] для связного графа G с $\ell(G) \leqslant k$ (где $k \geqslant 1$) доказана оценка $u(G) > \frac{1}{2k+4}v(G) + \frac{3}{2}$. Эта оценка также точна, что подтверждается бесконечной серией примеров. Мы докажем две оценки, учитывающие одновременно обхват графа и длину максимальной цепочки последовательно соединённых вершин степени 2.

Теорема 1. Пусть G – связный граф,

$$v(G) \geqslant 2, \quad g(G) \geqslant g \geqslant 4, \quad \ell(G) \leqslant k,$$

где g и $k \geqslant 1$ – целые числа. Тогда

$$u(G) \geqslant \alpha_{g,k}(v(G) - k - 2) + 2,$$

где

$$\alpha_{g,k} = \begin{cases} \frac{\lceil \frac{g}{2} \rceil - 1}{4(\lceil \frac{g}{2} \rceil - 1) + 1} & \text{при } k = 1; \\ \frac{1}{2k+2} & \text{при } k \geqslant 2. \end{cases}$$

§2. Несколько лемм

В этом разделе мы сформулируем необходимые нам леммы из работ [13] и [12]. Эти леммы помогут редуцировать доказательство оценок в теоремах 1 и 2 к случаям меньших графов и собирать экстремальные примеры для наших оценок, как из деталей конструктора.

Наш метод использует теорию блоков и точек сочленения. Для удобства мы приведем определения основных понятий. Подробнее классические результаты о блоках и точках сочленения изложены в [10] и других книгах.

Определение 1. *Точкой сочленения* связного графа G называется любая его вершина, при удалении которой теряется связность.

Двусвязным графом называется непустой связный граф без точек сочленения.

Блок графа G – это его максимальный по включению подграф без точек сочленения.

Мост графа G – это ребро, не входящее ни в один цикл.

Определение 2. 1) Пусть даны два графа G_1 и G_2, в которых выделены вершины $x_1 \in V(G_1)$ и $x_2 \in V(G_2)$ соответственно, $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$. *Склеить* графы G_1 и G_2 по вершинам x_1 и x_2 значит склеить две вершины x_1 и x_2 в одну вершину x, которой будут переданы все выходящие из x_1 и x_2 рёбра обоих графов. Остальные вершины и рёбра графов G_1 и G_2 войдут в полученный при склейке граф без изменений (см. рисунок 1).

2) Для любого ребра $e \in E(G)$ определим граф $G \cdot e$, в котором концы ребра $e = xy$ склеены в одну вершину, которой переданы все инцидентные x и y рёбра. Будем говорить, что граф $G \cdot e$ получен из G в результате *стягивания ребра* e.

Рис. 1. Склеивание графов.

Замечание 2. 1) При стягивании мостов не образуется петель и кратных рёбер.

2) Пусть граф H получен из графа H' стягиванием нескольких мостов, не инцидентных висячим вершинам. Тогда, очевидно,

$$u(H) = u(H').$$

Следующая лемма – это лемма 1 из статьи [13].

Лемма 1. Пусть G_1 и G_2 – связные графы с $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$, $v(G_1) \geqslant 2$, $v(G_2) \geqslant 2$ и висячими вершинами x_1 и x_2, соответственно. Пусть G – граф, полученный из G_1 и G_2 склеиванием по вершинам x_1 и x_2 и последующим стягиванием $m' - 1$ мостов, не инцидентных висячим вершинам. Тогда выполняются следующие утверждения.

1) $u(G) = u(G_1) + u(G_2) - 2$.

2) Пусть

$$u(G_1) \geqslant \alpha(v(G_1) - m) + 2, \quad u(G_2) \geqslant \alpha(v(G_2) - m) + 2 \quad \text{и } m' \geqslant m. \quad (1)$$

Тогда $u(G) \geqslant \alpha(v(G) - m) + 2$. Если все три неравенства из (1) обращаются в равенство, то $u(G) = \alpha(v(G) - m) + 2$.

Теперь приведем необходимые определения и формулировку леммы о расщеплении больших блоков из работы [12].

Определение 3. *Граница* блока B – это множество всех входящих в него точек сочленения графа G (обозначение: $\mathrm{Bound}(B)$). *Внутренность* блока B – это множество вершин $\mathrm{Int}(B) = V(B) \setminus \mathrm{Bound}(B)$. Вершины из $\mathrm{Int}(B)$ мы будем называть *внутренними вершинами* блока B.

Блок называется *пустым*, если у него нет внутренних вершин (то есть, $\mathrm{Int}(B) = \varnothing$). Иначе блок называется *непустым*.

Блок B называется *большим*, если количество его внутренних вершин больше количества его граничных вершин (то есть, $|\mathrm{Int}(B)| > |\mathrm{Bound}(B)|$).

Лемма 2. Пусть G – граф с более чем двумя вершинами. Тогда существует набор рёбер $F \subset E(G)$, удовлетворяющий следующим условиям:

1° граф $G - F$ связен;

2° у графа $G - F$ нет больших блоков;

3° если вершины x и y смежны в $G - F$ и $d_{G-F}(x) = d_{G-F}(y) = 2$, то $d_G(x) = d_G(y) = 2$.

§3. Доказательство теоремы 1

1. *Спуск*

Мы будем говорить, что граф G' *меньше* графа G, если либо

$$u(G') < u(G),$$

либо

$$u(G') = u(G) \quad \text{и} \quad e(G') < e(G).$$

В этой части мы разберём случаи, когда из утверждения теоремы 1 для всех меньших графов мы можем вывести утверждение для графа G.

Пусть *шип* – это неразветвлённое дерево (все невисячие вершины которого имеют степень 2), присоединённое ребром за одну из своих висячих вершин к точке сочленения a (которую мы назовём *основанием шипа*).

Назовём точку сочленения a графа G *несущественной*, если у графа $G - a$ ровно две компоненты связности, одна из которых является *шипом* с основанием a. В противном случае назовём точку сочленения *существенной*.

В некоторых случаях (если выполнены условия пунктов 1.1 или 1.2) мы произведем спуск от графа G к меньшим графам.

1.1. *В графе G есть существенная точка сочленения a.*

Докажем, что в графе есть существенная точка сочленения степени хотя бы 3. Пусть $d_G(a) = 2$. Тогда вершина a принадлежит некоторой цепочке из последовательно соединённых вершин степени 2, пусть крайние вершины этой цепочки смежны с вершинами b и b' (степени которых не равны 2). Так как a – существенная точка сочленения, то $d_G(b) > 2$ и $d_G(b') > 2$, причем b и b' – также существенные точки сочленения.

Итак, рассмотрим случай $d_G(a) \geqslant 3$. Вершина a является существенной точкой сочленения графа G, поэтому существуют такие связные графы G_1 и G_2, что $V(G_1) \cup V(G_2) = V(G)$ и $V(G_1) \cap V(G_2) = \{a\}$, причём ни один из графов G_1 и G_2 не является шипом с основанием a.

Построим из графа G_1 граф G_1' следующим образом. Если $d_{G_1}(a)=1$, то $G_1' = G_1$. Если же $d_{G_1}(a) \geqslant 2$, то присоединим к вершине a шип из $k+1$ вершины. Легко видеть, что $\ell(G_1') \leqslant k$ и $g(G_1') \geqslant g(G)$. Аналогично построим граф G_2'.

Поскольку $3 \leqslant d_G(a) = d_{G_1}(a) + d_{G_2}(a)$, то $d_{G_1}(a) \geqslant 2$ или $d_{G_2}(a) \geqslant 2$. Таким образом, при построении хотя бы одного из графов G_1' или G_2' мы добавили шип из $k+1$ вершины. Учитывая, что вершина a входит в оба графа, мы получаем неравенство

$$v(G_1') + v(G_2') \geqslant v(G) + k + 2.$$

Граф G получается из G_1' и G_2' склейкой двух висячих вершин (эти вершины – копии a или концы присоединённых шипов) и последующим стягиванием не менее, чем $k+1$ моста (так как хотя бы один шип при построении G_1' и G_2' был присоединен). В результате две копии вершины a в графах G_1' и G_2' склеятся в вершину a графа G. По пункту 1 леммы 1 мы имеем $u(G) = u(G_1') + u(G_2') - 2$. Поскольку графы G_1 и G_2 не являются шипами с основанием a, то $u(G_1'), u(G_2') \geqslant 3$ и следовательно $u(G_1') < u(G)$ и $u(G_2') < u(G)$. Тогда по индукционному предположению мы имеем

$$u(G_1') \geqslant \alpha_{g,k}(v(G_1') - k - 2) + 2, \quad u(G_2') \geqslant \alpha_{g,k}(v(G_2') - k - 2) + 2.$$

Теперь по пункту 2 леммы 1 получается, что

$$u(G) \geqslant \alpha_{g,k}(v(G) - k - 2) + 2,$$

что и требовалось доказать.

1.2. *В графе G есть большие блоки.*
По лемме 2 мы можем выбрать такой набор рёбер $F \subset E(G)$, что граф $G' = G - F$ связен, не имеет больших блоков и для любых двух смежных в G' вершин x и y из $d_{G'}(x) = d_{G'}(y) = 2$ следует $d_G(x) = d_G(y) = 2$. Тогда $\ell(G') = \max(\ell(G), 1) \leqslant k$. Очевидно, $g(G') \geqslant g(G) = g$, $u(G) \geqslant u(G')$. Поэтому мы можем применить индукционное предположение для графа G'. Так как любое остовное дерево графа G' является остовным деревом графа G, то $u(G) \geqslant u(G') \geqslant \alpha_{g,k}(v(G) - k - 2) + 2$, что и требовалось доказать.

2. *База.*
Будем уменьшать граф, выполняя шаги 1.1 и 1.2 до тех пор, пока это возможно. В результате останется проверить утверждение теоремы только для графов G, у которых нет существенных точек сочленения и больших блоков. Тогда каждая точка сочленения a графа G делит его на две компоненты связности, одна из которых – шип с основанием a.

Рассмотрим несколько случаев.

2.1. *Граф G – дерево.*
Напомним,что мы рассматриваем случай, когда существенных точек сочленения нет.

Пусть a и b – две вершины степени хотя бы 3. Докажем, что a является существенной точкой сочленения. Граф G_1 будет содержать ровно одну компоненту связности графа $G - a$ – ту, что содержит b (см. рисунок 2a). Понятно, что граф G_1 не является шипом. Граф G_2 будет содержать все остальные компоненты связности графа $G - a$, следовательно, a – невисячая вершина графа G_2 и он не является шипом с основанием a. Противоречие.

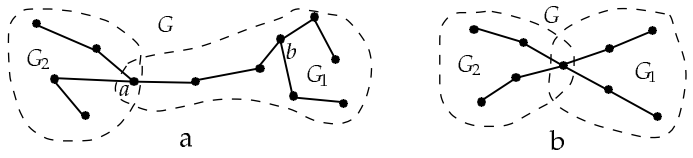

Рис. 2. Существенная точка сочленения у дерева.

В случае, когда граф имеет вершину a степени $m \geqslant 4$, вершина a также является существенной точкой сочленения (см. рисунок 2b).

Если $\Delta(G) \leqslant 2$, то G имеет две висячие вершины и не более чем $\ell(G) = k$ вершин степени 2. Тогда при любом $\alpha_{g,k}$ мы имеем

$$u(G) = 2 \geqslant \alpha_{g,k}(v(G) - k - 2) + 2.$$

Остается случай, когда дерево имеет одну вершину степени 3, а все остальные вершины имеют степень не более 2. Тогда G имеет 3 висячих вершины и не более чем $3 \cdot \ell(G) = 3k$ вершин степени 2. Следовательно, $v(G) \leqslant 3k + 4$. Легко видеть, что в этом случае для $\delta_k = \frac{1}{2k+2}$ выполняется

$$u(G) = 3 \geqslant \delta_k(2k + 2) + 2 \geqslant \delta_k(v(G) - k - 2) + 2.$$

2.2. *Граф G имеет цикл.*
Так как G не имеет существенных точек сочленения, каждая точка сочленения a графа G делит его на две компоненты связности, одна из которых – шип с основанием a. Пусть H – граф, полученный из G в результате удаления вершин всех этих шипов. Нетрудно понять, что граф H не имеет точек сочленения (любая точка сочленения графа H была бы существенной точкой сочленения графа G). Таким образом, граф H – блок графа G. Так как G имеет цикл, то цикл имеет и граф H.

Пусть $h = v(H)$, m – количество точек сочленения графа G. Поскольку H не является большим блоком графа G, то $m \geqslant \frac{h}{2}$. Каждая из m точек сочленения графа G отделяет от графа шип не более, чем из $\ell(G) + 1 \leqslant k + 1$ вершин. Поэтому $v(G) \leqslant h + (k+1)m$. Двусвязный граф H содержит цикл из не более, чем h вершин. Следовательно, $h \geqslant g(G) = g$. Рассмотрим два случая.

a. $m = h$.
Тогда $v(G) \leqslant (k+2)h$, $u(G) \geqslant h$. Непосредственным вычислением проверяется, что в этом случае

$$u(G) \geqslant \beta_{h,k}(v(G) - k - 2) + 2 \quad \text{для} \quad \beta_{h,k} = \frac{h-2}{(h-1)(k+2)}.$$

Очевидно, $\beta_{h,k}$ возрастает с ростом $h \geqslant g \geqslant 4$, поэтому $\beta_{h,k} \geqslant \beta_{g,k} = \frac{g-2}{(g-1)(k+2)}$. Несложно проверить, что при $k \geqslant 2$

$$\beta_{g,k} \geqslant \frac{4-2}{(4-1)(k+2)} = \frac{2}{3k+6} \geqslant \frac{1}{2k+2} = \delta_k, \tag{1}$$

а при $g \geqslant 5$ и $k = 1$

$$\beta_{g,1} \geqslant \frac{5-2}{(5-1)(1+2)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = \delta_1. \tag{2}$$

b. $m < h$.
В рассматриваемом случае блок H – непустой, выберем вершину $u \in \mathrm{Int}(H)$. Несложно выделить в графе G остовное дерево, в котором висячими вершинами будут концы всех m шипов и вершина u, поэтому $u(G) \geqslant m + 1$. Непосредственным вычислением проверяется, что

$$\begin{gathered} u(G) \geqslant \gamma_{h,m,k}(v(G) - k - 2) + 2 \\ \text{для} \quad \gamma_{h,m,k} = \frac{m-1}{(k+1)(m-1) + h - 1}. \end{gathered} \tag{3}$$

Заметим, что $\gamma_{h,m,k}$ возрастает с ростом m. Так как $m \geqslant \lceil \frac{h}{2} \rceil$, получим, что

$$\gamma_{h,m,k} \geqslant \varepsilon_{h,k} = \frac{\lceil \frac{h}{2} \rceil - 1}{(\lceil \frac{h}{2} \rceil - 1)(k+1) + h - 1}.$$

Отметим, что

$$\varepsilon_{2t,k} = \frac{t-1}{(t-1)(k+1)+2t-1} < \frac{t-1}{(t-1)(k+1)+2t-2} = \varepsilon_{2t-1,k}.$$

Кроме того, $\varepsilon_{2t,k} = \frac{t-1}{(k+3)(t-1)+1}$ возрастает с ростом t. Учитывая выше сказанное и $h \geqslant g$, получим, что в рассматриваемом случае минимальный кофэффициент в неравенстве (3) равен $\varepsilon_{2t,k}$, где $t = \lceil \frac{g}{2} \rceil \geqslant 2$. Отметим, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2t,k} = \frac{t-1}{(k+3)(t-1)+1} < \frac{1}{2k+2} = \delta_k \quad &\Longleftrightarrow \\ (1-k)(t-1) > -1 \quad &\Longleftrightarrow \quad k = 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Подведем итог разобранных выше случаев.

При $k \geqslant 2$ из неравенств (1) и (4) следует, что

$$u(G) \geqslant \frac{1}{2k+2}(v(G) - k - 2) + 2.$$

Одно из утверждений теоремы доказано.

При $k = 1$ мы получили, что выполняется неравенство

$$u(G) \geqslant \alpha_{g,1}(v(G) - 3) + 2,$$

где $\alpha_{g,1}$ – минимальный из коэффициентов, полученных при разборе случаев a и b. При $g \geqslant 5$ из неравенства (2) мы имеем

$$\alpha_{g,1} \geqslant \min\left(\varepsilon_{2\lceil \frac{g}{2} \rceil,1}, \beta_1\right) = \min\left(\frac{\lceil \frac{g}{2} \rceil - 1}{4(\lceil \frac{g}{2} \rceil - 1) + 1}, \frac{1}{4}\right) = \frac{\lceil \frac{g}{2} \rceil - 1}{4(\lceil \frac{g}{2} \rceil - 1) + 1},$$

утверждение теоремы в этом случае доказано.

При $g = 4$ мы имеем

$$\alpha_{4,1} \geqslant \min(\beta_{4,1}, \varepsilon_{4,1}) = \min\left(\frac{2}{9}, \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} = \varepsilon_{4,1}.$$

Теперь утверждение теоремы полностью доказано.

§4. Экстремальные примеры

Мы приведем бесконечную серию примеров графов, подтверждающую точность оценки из теоремы 1. Логика построения примера достаточно проста: мы построим такой граф, для которого все доказанные в теореме неравенства станут равенствами. Пусть $\ell(G) = k$, $g(G) = g$. Разберём два случая.

1. $k = 1$.
Пусть $n = \lceil \frac{g+1}{2} \rceil - 1$. В рассматриваемом случае $\alpha_{g,1} = \frac{n}{4n+1}$. Пусть $B_{g,1}$ – это цикл длины $2n+2$, у которого отмечена $n+1$ вершина через одну. К каждой отмеченной вершине присоединим шип из 2 вершин. Отмеченные вершины будут точками сочленения в нашем графе. Очевидно, $\ell(B_{g,1}) = 1$, $g(B_{g,1}) = 2n+2 \geqslant g$, $v(B_{g,1}) = 4n+4$. На рисунке 3a изображен пример такого графа для $n = 2$ (то есть, $g = 5$ или $g = 6$).

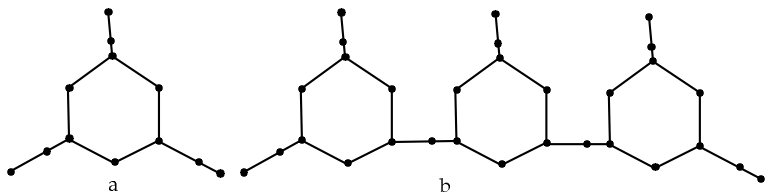

Рис. 3. Экстремальный пример при $k = 1$.

Найдём $u(B_{g,1})$. В остовном дереве графа $B_{g,1}$ висячими вершинами будут все $n+1$ висячие вершины этого графа (концы шипов). Так как удаление всех висячих вершин остовного дерева не должно нарушать связность, к ним можно добавить только одну вершину цикла, к которой не присоединен шип. Таким образом, $u(B_{g,1}) = n+2$. Несложно проверить, что

$$u(B_{g,1}) = n + 2 = 2 + \frac{n}{4n+1} \cdot \big(v(B_{g,1}) - 1 - 2\big).$$

Следовательно, для графа $B_{g,1}$ оценка из теоремы 1 точна.

2. $k \geqslant 2$.
В рассматриваемом случае $\alpha_{g,k} = \delta_k = \frac{1}{2k+2}$. Пусть $B_{g,k}$ – это следующее дерево: вершина степени 3, к которой присоединены три шипа длины $k+1$ каждый. Тогда $g(B_{g,k}) = \infty$, $v(B_{g,k}) = 3k+4$, $\ell(B_{g,k}) = k$, $u(B_{g,k}) = 3$. На рисунке 4a изображен пример такого графа для $k = 3$.

Несложно проверить, что

$$u(B_{g,k}) = 3 = 2 + \frac{1}{2k+2} \cdot \big(v(B_{g,k}) - k - 2\big).$$

Следовательно, для графа $B_{g,k}$ оценка из теоремы 1 точна.

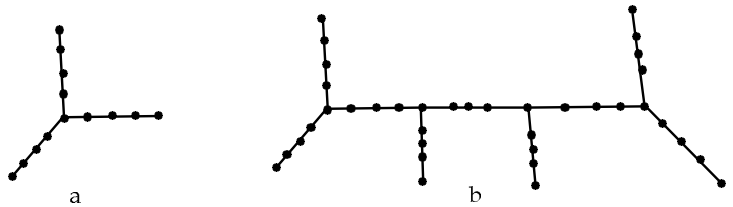

Рис. 4. Экстремальный пример при $k \geqslant 2$.

3. *Теперь покажем, как в обоих случаях собирать экстремальные примеры из графов $B_{g,k}$, как из деталей конструктора.*
Пусть G – граф, удовлетворяющей соотношениям

$$u(G) = \alpha_{g,k} \cdot (v(G) - k - 2) + 2, \quad g(G) \geqslant g, \quad \ell(G) \leqslant k,$$

имеющий хотя бы одну висячую вершину a. Построим граф G': склеим вершину a графа G с концом одного из шипов графа $B_{g,k}$ и стянем после этого $k+1$ мост (рёбра приклеенного шипа графа $B_{g,k}$). В результате получится граф G', удовлетворяющий соотношениям

$$v(G') = v(G) + v(B_{g,k}) - k - 2, \quad g(G') \geqslant g, \quad \ell(G') \leqslant k.$$

По пункту 2 леммы 1 мы имеем $u(G') = \alpha_{g,k} \cdot (v(G') - k - 2) + 2$, то есть, граф G' также является экстремальным примером, подтверждающим точность оценки в теореме 1. В качестве первого графа мы возьмём $G = B_{g,k}$, после чего можем построить сколь угодно большие экстремальные примеры, приклеивая каждый раз по очередному графу $B_{g,k}$. Два получающихся таким образом графа можно видеть на рисунках 3b и 4b.

Литература

1. J. A. Storer, *Constructing full spanning trees for cubic graphs.* — Inform. Process. Lett. **13**, No. 1 (1981), 8–11.
2. J. R. Griggs, D. J. Kleitman, A. Shastri, *Spanning trees with many leaves in cubic graphs.* — J. Graph Theory **13** (1989) No. 6, 669–695.

3. D. J. Kleitman, D. B. West, *Spanning trees with many leaves.* — SIAM J. Discrete Math. **4** (1991), No. 1, 99–106.
4. J. R. Griggs, M. Wu, *Spanning trees in graphs of minimum degree* 4 *or* 5. — Discrete Math. **104** (1992), 167–183.
5. N. Alon, *Transversal numbers of uniform hypergraphs.* — Graphs and Combinatorics **6** (1990), 1–4.
6. G. Ding, T. Johnson, P. Seymour, *Spanning trees with many leaves.* — J. Graph Theory **37** (2001), No. 4, 189–197.
7. Y. Caro, D. B. West, R. Yuster, *Connected domination and spanning trees with many leaves.* — SIAM J. Discrete Math. **13** (2000), No. 2, 202–211.
8. P. S. Bonsma, *Spanning trees with many leaves in graphs with minimum degree three.* — SIAM J. Discrete Math. **22** (2008), No. 3, 920–937.
9. P. S. Bonsma, F. Zickfeld, *Spanning trees with many leaves in graphs without diamonds and blossoms* — Lecture Notes Comput. Sci. **4957** (2008), 531–543.
10. Ф. Харари, *Теория графов*, Москва, Мир, 1973.
11. Н. В. Гравин, *Построение остовного дерева графа с большим количеством листьев.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **381** (2010), 31–46.
12. Д. В. Карпов, *Остовное дерево с большим количеством висячих вершин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **381** (2010), 78–87.
13. А. В. Банкевич, Д. В. Карпов, *Оценки количества висячих вершин в остовных деревьях.* — J. Math. Sci. **184**, No. 5 (2012), 564–572.
14. А. В. Банкевич, *Оценки количества висячих вершин в остовных деревьях в графах без треугольников.* — J. Math. Sci. **184**, No. 5 (2012), 557–563.

Karpov D. V. Lower bounds on the number of leaves in spanning trees.

Let G be a connected graph on $n \geqslant 2$ vertices with girth at least g. Let maximal chain of successively adjacent vertices of degree 2 in the graph G does not exceed $k \geqslant 1$. Denote by $u(G)$ the maximal number of leaves in a spanning tree of G. We prove, that $u(G) \geqslant \alpha_{g,k}(v(G) - k - 2) + 2$, where $\alpha_{g,1} = \frac{\left[\frac{g+1}{2}\right]}{4\left[\frac{g+1}{2}\right]+1}$ and $\alpha_{g,k} = \frac{1}{2k+2}$ for $k \geqslant 2$. We present infinite series of examples showing that all these bounds are tight.

E-mail: dvk0@yandex.ru

Поступило 11 октября 2016 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
191023, С.-Петербург, Фонтанка 27;
С.-Петербургский государственный университет,
198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф,
Университетский пр. 28