Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 450, 2016 г.

А. Давыдов

АЛГОРИТМ ПОИСКА РЕШЕНИЯ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ТРОПИЧЕСКОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИЗА СТАБИЛЬНЫХ ТОЧЕК ПОДСИСТЕМ

§1. Введение

Одна из естественных задач тропической геометрии – решение тропической линейной системы.

В случае квадратных систем (т.е. таких, где количество переменных равно количеству неизвестных) эта задача решается аналогично классической с помощью тропического правила Крамера [7], однако эффективных алгоритмов для переопределенных систем неизвестно.

В этой статье доказывается, что для любой разрешимой переопределенной тропической линейной системы одно из решений будет стабильным решением ее квадратной подсистемы. Это позволяет построить простой алгоритм решения переопределенной тропической линейной системы, основанный на переборе ее квадратных подсистем.

§2. Определения и постановка задачи

2.1. Тропические предмногообразия. В этом разделе определяются термины, необходимые для введения тропических предмногообразий.

Определение 1. Полуполя $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, снабженные операциями тропического сложения: $\oplus := \min$, тропического умножения: $\otimes := +$, и тропического деления: $\oslash := -$, называются тропическими полуполями с или без бесконечности соответственно.

Мы будем обозначать тропические полуполя с или без бесконечности как $\mathbb{K}$ и $\mathbb{K}_\infty$, соответственно.

Кроме тропических сложения и умножения мы также будем рассматривать операцию возведения в тропическую степень: $x^{\otimes i} := x \otimes \cdots \otimes x$.

Ключевые слова: тропические линейные системы, слабопереопределенные тропические линейные системы.

Несмотря на то, что в статье речь пойдет об алгоритме решения *линейных* тропических систем, мы будем пользоваться некоторыми методами из нелинейной тропической геометрии, поэтому нам придется определить тропический многочлен и, в первую очередь, тропический одночлен:

Определение 2. *Тропический одночлен* Q определяется как

$$Q = a \otimes x_1^{\otimes i_1} \otimes \cdots \otimes x_n^{\otimes i_n} = a + i_1 \cdot x_1 + \cdots + i_n \cdot x_n,$$

его *тропическая степень* – $\mathrm{trdeg} = i_1 + \cdots + i_n$.

Теперь мы можем определить тропический многочлен:

Определение 3. *Тропический многочлен* f определяется как

$$f = \bigoplus_j (a_j \otimes x_1^{\otimes i_{j1}} \otimes \cdots \otimes x_n^{\otimes i_{jn}}) = \min_j \{Q_j\};$$

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_\infty^n$ называется *тропическим нулем* (или *решением*) многочлена f, если в точке x верно одно из двух условий:

(1) минимум $\min_j\{Q_j(x)\}$ конечен и достигается хотя бы на двух различных мономах,

(2) все мономы $Q_j(x)$ принимают бесконечное значение в точке x.

Те нули, для которых $x \in \mathbb{R}^n$, называются конечными. Если в многочлене f присутствуют все одночлены, для которых $\mathrm{trdeg} \leqslant d$, и только они, то такой многочлен называется многочленом с конечными коэффициентами.

Тропическая степень многочлена f, как и в классическом случае, определяется как максимальная из степеней его одночленов.

Теперь мы можем определить тропическую гиперповерхность:

Определение 4. Множество решений тропического многочлена называется *тропической гиперповерхностью.*

И наконец, тропическое предмногообразие:

Определение 5. *Тропическое предмногообразие* – это пересечение конечного числа тропических гиперповерхностей.

Как и классические алгебраические многообразия, тропические многообразия удобно задавать в виде системы тропических многочленов, рассматривая пересечение тропических гиперповерхностей, заданных ими.

Система тропических многочленов называется *разрешимой*, если соответствующее ей многообразие непусто.

Система тропических многочленов называется *целочисленной*, если в каждом многочлене коэффициенты при всех одночленах – целые числа.

В дальнейшем, говоря об алгоритмах решения систем тропических многочленов, мы будем подразумевать целочисленные системы с конечными коэффициентами.

Можно поставить несколько алгоритмических задач, связанных с решением системы тропических многочленов. Нас будут интересовать две из них:

задача разрешимости:

Определение 6. *Задача о разрешимости* системы тропических многочленов ставится так: на вход подается система тропических многочленов, требуется ответить, правда ли, что соответствующая система разрешима.

и соответствующая ей задача поиска:

Определение 7. *Задача о поиске решения* системы тропических многочленов ставится так: на вход подается система тропических многочленов. В случае, если система разрешима, необходимо вывести произвольную точку, лежащую в соответствующем предмногообразии, иначе – ответить, что система неразрешима.

В данной статье будут рассматриваться только целочисленные системы тропических многочленов с конечными коэфициентами, а в качестве модели вычислений используется RAM-машина. Предполагается, что арифметические операции с числами, не превосходящими N, выполняются за $M(N)$.

В общем случае даже проверка разрешимости системы тропических многочленов NP-полна [10].

2.2. Тропические линейные системы. Если степень каждого из многочленов системы тропических многочленов равна единице, то такая система называется *тропической линейной системой*, а соответствующее предмногообразие – *тропическим линейным предмногообразием.*

Тропические линейные системы, как и классические, удобно представлять в виде матрицы:

Определение 8. Рассмотрим тропическую линейную систему A из m многочленов от n переменных. Под матрицей этой системы мы будем понимать табличку $m \times (n+1)$, такую, что элемент (i,j), $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ равен коэффициенту при j-ой переменной в i-ом многочлене, а элемент $(i, n+1), 1 \leqslant i \leqslant m$ равен коэффициенту при константе в i-ом многочлене.

Пример 1. Система из двух многочленов $2x \oplus 3y \oplus 4z \oplus 5$ и $x \oplus y \oplus 1z \oplus 10$ задается вот такой матрицей:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Решению же системы A будет соответствовать строка, завершающаяся нулем, такая, что при прибавлении ее к каждой из строк матрицы будут получаться строки без строго минимума (т.е. минимум будет достигаться хотя бы дважды).

Задача о разрешимости тропической линейной системы лежит в пересечении классов NP и $coNP$ [1, 4], и на данный момент для этой задачи известны лишь псевдополиномиальные алгоритмы (т.е. алгоритмы, время работы которых полиномиально зависит от значений коэффициентов системы, а не от их длины) [1, 4].

В случае, когда количество многочленов меньше либо равно количеству переменных, тропическая система (даже нелинейная) всегда имеет решение [7], а значит, задача о проверке разрешимости имеет смысл только для *переопределенных систем*, т.е. систем, количество уравнений в которых превышает количество переменных.

В случае, когда количество многочленов превышает количество переменных ровно на единицу, для проверки тропической линейной системы на разрешимость можно использовать тропический определитель (т.к. в матрице тропической системы присутствуют не только коэффициенты при переменных, но и константы, то квадратной такая матрица получается именно в том случае, когда количество переменных ровно на единицу меньше количества многочленов).

Определение 9. Рассмотрим матрицу A. Ее тропическим определителем называется тропический многочлен:

$$\Delta_T(A) = \bigoplus_{\sigma} A_{\sigma_1,1} \otimes A_{\sigma_2,2} \otimes \cdots \otimes A_{\sigma_n,n},$$

где тропическая сумма берется по всем возможным перестановкам σ.

Несложно заметить, что значение тропического определителя есть ни что иное, как максимальное паросочетание минимального веса на двудольном графе, матрицей смежности которого является матрица системы.

Тропический определитель можно вычислить за полиномиальное время $O(n^3 M(N))$, где n – сторона матрицы, а N – максимальный модуль числа в ней, например, с помощью Венгерского алгоритма [6] (который можно рассматривать как тропикализацию метода Гаусса [7]).

Как и для классических систем, тропический определитель можно использовать для проверки тропической линейной системы на разрешимость:

Теорема 1 ([2]). *Тропическая линейная система из $n+1$-го многочлена от n переменных имеет решение тогда и только тогда, когда минимум в ее определителе достигается хотя бы на двух различных слагаемых.*

Иными словами – квадратная тропическая линейная система имеет решение тогда и только тогда, когда у двудольного графа, заданного ее матрицей, есть несколько максимальных паросочетаний минимального веса. Это свойство также можно проверить за $O(n^3 M(N))$ с помощью Венгерского алгоритма, т.е. для квадратных тропических линейных систем задача о проверке на разрешимость лежит в P.

Этот метод можно обобщить на произвольные переопределенные системы:

Теорема 2 ([5]). *Переопределенная тропическая линейная система из m многочленов от n переменных имеет решение тогда и только тогда, когда любая ее подсистема из $n+1$-го многочлена имеет решение.*

но в общем случае данный алгоритм полиномиальным не будет, т.к. потребуется проверить C_m^{n+1} подсистем.

Если же тропическая линейная система не переопределена, то с помощью определителя можно найти ее решение:

Теорема 3 (Тропическое правило Крамера [7]). *Пусть дана тропическая линейная система A из n многочленов от n переменных. Обозначим за $\Delta_{T,i}$ тропический определитель матрицы, получаемой из матрицы A вычеркиванием i-го столбца.*

Точка $(\Delta_{T,1} \oslash \Delta_{T,n}, \Delta_{T,2} \oslash \Delta_{T,n}, \cdots, \Delta_{T,n-1} \oslash \Delta_{T,n})$ будет решением A.

Значит, для любой непереопределенной тропической линейной системы от n переменных с числами, не превосходящими N по модулю, можно найти решение за $O(n^3 M(N))$ (для этого воспользуемся Венгерским алгоритмом для подсчета определителя и заметим, что при замене одного столбца в матрице определитель можно пересчитать за квадратичное время).

Таким образом, для непереопределенных систем обе рассматриваемые нами задачи решаются за полиномиальное время.

Естественным шагом на пути к решению переопределенных тропических систем будет решение *слабопереопределенных* тропических систем.

Определение 10. Тропическая линейная система из m многочленов от n переменных называется k-слабопереопределенной, если $m - n < k$.

Оказывается, что

Теорема 4. *Для любого k задача о разрешимости k-слабопереопределенной тропической системы лежит в P.*

Доказательство. При фиксированном k количество определителей, которые нужно проверить, не превосходит C_{n+k}^{n+1}, что, в свою очередь, не превосходит $(n+k)^k$. □

и

Теорема 5. *Для любого k задача о поиске решения k-слабопереопределенной тропической системы лежит в P* [3].

Тут важно заметить, что эта теорема не доказывает принадлежности этих задач P для произвольных переопределенных систем, т.к. сложность приведенных алгоритмов экспоненциально зависит от k.

Стоит заметить, что алгоритм для решения задачи поиска решения k-слабопереопределенной тропической системы, предложенный в [3], весьма сложен, основным же результатом данной статьи является построение значительно более простого алгоритма (Теорема 9).

Время работы построенного алгоритма оценивается как $O((C_m^n n^2 + n^3)M(N))$, что ассимптотически лучше, чем оценка на время работы алгоритма, построенного в [3].

2.3. Таблица минимумов. При изучении тропических предмногообразий нам будет удобно использовать определение таблицы минимумов, аналогичное используемому в [4]:

Определение 11. Пусть A – тропическая полиномиальная система из k многочленов от n переменных с максимальной степенью d. В каждой точке x мы можем поставить ей в соответствие таблицу A^{*x} размера $k \times \binom{n+d-1}{d}$, строки которой соответствуют многочленам системы, а столбцы – всем возможным одночленам степени не более чем d от n переменных.

Элемент (i, j) этой таблицы отмечается звездочкой тогда и только тогда, когда значение i-го одночлена j-го многочлена (как классической линейной функции) в точке x будет минимальным из всех одночленов j-го многочлена (см. Пример 2).

Пример 2. Рассмотрим систему тропических многочленов

$$A = \begin{cases} 0 \oplus 1x \oplus y \\ 0 \oplus -2x \oplus -2y \oplus -2x^2 \oplus -3xy \oplus -1y^2. \end{cases}$$

В точке $(-1, 0)$ эта система примет вид:

$$A = \begin{cases} 0 \oplus 0 \oplus 0 \\ 0 \oplus -3 \oplus -2 \oplus -4 \oplus -4 \oplus -1, \end{cases}$$

т.ч.

$$A^{*(-1,0)} = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & x & y & x^2 & xy & y^2 \\ \hline * & * & * & & & \\ & & & * & * & \end{array}\right].$$

В точке $(1, 0)$ эта система примет вид:

$$A = \begin{cases} 0 \oplus 2 \oplus 0 \\ 0 \oplus -1 \oplus -2 \oplus 0 \oplus -2 \oplus -1, \end{cases}$$

т.ч.

$$A^{*(1,0)} = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & x & y & x^2 & xy & y^2 \\ \hline * & & * & & & \\ & & * & & * & \end{array}\right].$$

В точке $(-2,-1)$ эта система примет вид:

$$A = \begin{cases} 0 \oplus -1 \oplus -1 \\ 0 \oplus -4 \oplus -3 \oplus -6 \oplus -6 \oplus -3, \end{cases}$$

т.ч.

$$A^{*(-2,-1)} = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & x & y & x^2 & xy & y^2 \\ \hline & * & * & & & \\ & & & * & * & \end{array} \right].$$

2.4. Стабильные решения. В данной работе нам будет удобно использовать следующее определение:

Определение 12. *Возмущение* тропической полиномиальной системы – система, полученная из исходной изменением коэффициентов при мономах. *Амплитудой возмущения* мы назовем максимальную разность между соответствующими коэффициентами в изначальной и возмущенной системах.

Теперь мы можем дать определениие стабильности решения:

Определение 13 ([7]). Точка x – стабильное решение тропической полиномиальной системы A из n многочленов от n переменных, если при любом достаточно маленьком возмущении общего положения в окрестности x будет точка – решение возмущенной системы. (Формальнее: существует Δ такая, что для любого $\delta < \Delta$ найдется такое $\epsilon > 0$, что для любого возмущения общего положения с амплитудой не более чем ϵ, найдется решение в δ-окрестности x).

Известно, что у тропической линейной системы из n многочленов от n переменных ровно одна стабильная точка (частный случай тропической теоремы Безу [7]), которую можно найти с помощью тропического правила Крамера.

Предложение 1. *Решение тропической линейной системы, найденное тропическим правилом Крамера, является стабильным.*

Доказательство. Точка – решение, которое находит тропическое правило Крамера, задается как непрерывная функция от коэффициентов системы. □

§3. Критерий стабильности

Многие локальные свойства тропического предмногообразия однозначно задаются таблицей минимумов соответствующей системы (см.

пример [4]). Стабильность точки – не исключение, и ниже будут сформулированы несколько критериев стабильности точки в терминах таблицы минимумов. Хотя в дальнейшем эти критерии будут применяться только для линейных систем, представляется разумным доказать их в общем случае, т.к. общее доказательство не намного сложнее.

Теорема 6. *Рассмотрим тропическую систему многочленов с конечными коэффициентами A и точку x – ее решение.*

Заменим все коэффициенты при мономах, отмеченных звездочкой в A^{*x}, на произвольные действительные числа, а остальные – на $+\infty$, обозначив получившуюся систему за C. Точка x – стабильная точка A тогда и только тогда, когда C имеет конечное решение при любом выбранном наборе действительных чисел.

Пример 3. Рассмотрим тропическую полиномиальную систему:

$$\begin{cases} 0 \oplus 3x \oplus 0xy \oplus 0x^{\otimes 2} \\ 3 \oplus 0x \oplus 0y^{\otimes 3}. \end{cases}$$

0 – стабильная точка этой системы, т.к. у системы

$$\begin{cases} a_1 \oplus a_2xy \oplus a_3x^{\otimes 2} \\ a_4x \oplus a_5y^{\otimes 3}, \end{cases}$$

будет конечное решение при любых действительных a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

Доказательство. Не уменьшая общности, мы будем считать, что точка x совпадает с началом координат и все коэффициенты при минимальных мономах (обозначенных звездочкой в A^{*0}) – нули (остальные случаи сводятся к данному линейной заменой переменной и тропическим домножением многочленов на константу).

Пусть d – максимальная степень многочлена в A, и пусть минимальный ненулевой коэффициент в многочленах из A равен Δ.

(1) Для начала докажем, что если 0 – стабильная точка A, то у системы C есть конечное решение при любом наборе коэффициентов. Зафиксируем произвольный набор. Не уменьшая общности, можно считать, что все коэффициенты положительны (общий случай сводится к данному тропическим домножением на константу). Пусть M – максимальный коэффициент.

Т.к. 0 – стабильная точка A, найдется такое δ, что

- $0 < \delta < \frac{\Delta}{4d}$,

- для любого возмущения коэффициентов A с амплитудой, не превосходящей δ, в $\frac{\Delta}{4d}$-окрестности нуля у возмущенной системы будет хотя бы одно решение.

Рассмотрим возмущение B системы A такое, что все ненулевые коэффициенты остаются неизменными, а нулевые заменяются коэффициентами из C, домноженными на $\frac{\delta}{M}$.

Исходя из выбора δ, мы сможем найти y – решение B в $\frac{\Delta}{4d}$-окрестности нуля. Мономы, при которых в A стояли ненулевые коэффициенты, не могли оказаться минимальными – они слишком велики: значение такого монома не меньше $\Delta - d\frac{\Delta}{4d} > \frac{\Delta}{2}$ (коэфициент перед мономом как минимум Δ, а координаты точки, в которой он вычисляется, не превосходят $\frac{\Delta}{4d}$), в то время как значения прочих мономов не больше, чем $\delta + d\frac{\Delta}{4d} < \frac{\Delta}{2}$.

Значит, в точке y в каждом многочлене B найдется два минимальных монома среди тех, при которых в A стояли нулевые коэффициенты, а значит, домножив (классически) y на $\frac{M}{\delta}$, мы получим решение системы C.

(2) Теперь докажем в другую сторону: Если для любой замены коэффициентов у системы C будет решение, то 0 – стабильная точка A.

Докажем, что мы сможем найти такую непрерывную и монотонную функцию p, что для любого возмущения с амплитудой $\delta < min(p^{-1}(\frac{\Delta}{4d}), \frac{\Delta}{4d})$ найдется решение в $p(\delta)$-окрестности нуля. Обозначим возмущенную систему за E. Если мы заменим на бесконечность все коэффициенты E, соответствующие ненулевым коэффициентам A, то по предположению у полученной системы будет конечное решение, а значит, будет решение y в $p(\delta) = 2\delta n! d^n$-окрестности нуля (т.к. тропическое предмногообразие – линейное полуалгебраическое множество, и координаты ближайшего к нулю решения можно оценить с помощью правила Крамера). Заметим, что y будет также и решением E, т.к. при вышеописанных ограничениях на δ мономы E, соответствующие мономам A с ненулевыми коэффициентами, не могут быть минимальными в y. Таким образом, мы доказали наше предположение для $p(\delta) = 2\delta n! d^n$, а значит, доказали, что точка 0 – стабильное решение A.

$\square$

Таким образом, мы показали, что

Замечание 1. *Если x – стабильная точка тропической системы многочленов A, то для любой системы F и точки y, если $F^{*y} = A^{*x}$ (что автоматически означает, что у A и F* общий носитель, *т.е. все многочлены одинаковы с точностью до коэффициентов), то y – стабильная точка F.*

Это замечание можно усилить:

Теорема 7. *Если x – стабильная точка тропической системы многочленов A, то для любой системы F с тем же носителем (т.е. отличающейся от A только коэффициентами при мономах) и точки y, если A^{*x} содержится в F^{*y} (т.е. все мономы, отмеченные звездочками в A^{*x}, отмечены и в F^{*y}), то y – стабильная точка F.*

Доказательство. Не уменьшая общности, предположим, что x и y совпадают с началом координат, а все коэффициенты при мономах, минимальных в нуле, – ноли как в A, так и в F. Не уменьшая общности, можно считать, что таблицы минимумов A^{*0} и F^{*0} отличаются лишь в одной позиции $A_{i,j}$ (общий случай получится из данного, если рассмотреть последовательность систем $A, B, C, \cdots F$ такую, что звездчатая таблица каждой следующей системы содержит предыдущую и отличается от нее лишь в одной позиции).

Обозначим за D произведение степеней многочленов A.

Докажем от противного. Допустим, что 0 не является стабильной точкой F. Значит, по тропической теореме Безу где-то есть еще D стабильных точек (возможно, кратных). Пусть минимальная среди всех максимальных координат этих точек – ϵ. Рассмотрим малое возмущение F, увеличивающее коэффициент при j-ом мономе в i-ом многочлене на δ и не меняющее остальные коэффициенты. По Замечанию 1 у возмущенной системы 0 – стабильная точка. Но т.к. при малых возмущениях стабильные точки движутся непрерывно [9], мы сможем выбрать такое δ, что все стабильные точки сместятся не более, чем на ϵ. Таким образом мы получим $D+1$ стабильную точку: D точек в ϵ-окрестностях стабильных точек F и 0, чего по тропической теореме Безу быть не может. □

В дальнейшем нам будет удобно использовать другой критерий, который непосредственно следует из доказанного выше. Для того, чтобы его ввести, сперва определим функцию $p_n(m_1)$, которая принимает тропический моном от n переменных $x_1, x_2, \cdots, x_n$ в качестве аргумента и ставит ему в соответствие вектор из R^n следующим образом: $p_n(cx_1^{\otimes a_1} x_2^{\otimes a_2} \cdots x_n^{\otimes a_n}) = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

Также определим функцию $v_n(m_1, m_2)$, принимающую два тропических монома от n переменных в качестве аргументов и ставящую ему в соответствие вектор из $\mathbb{R}^n$ $v_n(m_1, m_2) = p_n(m_2) - p_n(m_1)$.

Пример 4.

- $v_2(0, x_1) = (1, 0)$,
- $v_2(x_1^{\otimes 2} x_2, x_1 x_2^{\otimes 2}) = (-1, 1)$,
- $v_3(0, 2x_1 x_2 x_3) = (1, 1, 1)$.

Теперь можно сформулировать требуемый критерий:

Теорема 8. *Рассмотрим тропическую систему A из n многочленов от n переменных с решением в точке x.*

x – стабильная точка A тогда и только тогда, когда мы можем выбрать $2n$ мономов $m_{i,j}, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant 2$ со следующими свойствами:

- *Мономы $m_{i,1}$ и $m_{i,2}$ – два различных монома из i-го многочлена A, минимальные в точке x.*
- *Размерность линейной оболочки векторов $v_n(m_{1,1}, m_{1,2})$, $v_n(m_{2,1}, m_{2,2})$,$\cdots$,$v_n(m_{n,1}, m_{n,2})$ равна n.*

Доказательство. Как и в предыдущем критерии, не уменьшая общности, можно допустить, что x – это начало координат, а коэффициенты при всех минимальных мономах – нули.

(1) Сперва докажем, что если мономы с описанными свойствами найдутся, то 0 – стабильная точка.

По теореме 7, нам достаточно доказать, что 0 – стабильное решение системы F с тем же носителем, что и A, где все коэффициенты при мономах, отличных от $m_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant 2$, заменены, например, на 1, а коэффициенты при мономах $m_{i,j}, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant 2$ – нули.

По теореме 6 0 будет стабильной точкой F, если система C, полученная из F заменой всех коэффициентов при мономах $m_{i,j}, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant 2$ на произвольные числа, а при мономах, отличных от них, на ∞, всегда будет иметь решения.

Заметим, что у C лишь два конечных коэффициента в каждом многочлене, и поэтому C эквивалентна классической линейной системе (каждый тропический многочлен заменяется на классическое линейное уравнение, утверждающее, что соответствующие мономы равны).

Эта система будет иметь решение, т.к. из условия на мономы следует, что ее ранг n.

Таким образом, 0 – стабильная точка F, а следовательно, и A.

(2) Теперь докажем обратное: если мономов с указанными свойствами не найдется, то 0 – не стабильная точка.

Докажем от противного. Заменим все нулевые коэффициенты на произвольный набор действительных чисел, линейно независимый над $\mathbb{Q}$, а остальные на ∞. По теореме 6 у этой системы будет решение y. Рассмотрим набор мономов $f_{i,j}, 1 \leqslant j \leqslant 2$ – набор минимальных в y мономов из i-го уравнения (если таких мономов больше чем 2, выберем два произвольным образом). По предположению, размерность линейной оболочки $v_n(f_{i,1}, f_{i,2}), 1 \leqslant i \leqslant n$ не превосходит n, т.ч. ранг классической линейной системы, задающей условия $f_{i,1} = f_{i,2}, 1 \leqslant i \leqslant n$, будет меньше чем n. У этой системы будут рациональные коэффициенты и свободные члены, линейно независимые над $\mathbb{Q}$, а значит, у нее не будет решения, хотя по предположению y – решение.

Таким образом, мы пришли к противоречию.

□

Замечание 2. *Этот критерий стабильности почти совпадает с определением смешанных клеток* [8].

§4. Алгоритм решения тропических переопределенных систем

Теперь мы можем перейти непосредственно к исследованию решений тропических линейных систем.

Мы будем считать, что везде далее уравнение записано в n-мерном пространстве, и будем обозначать переменные как $x_1, x_2, \cdots x_n$. Также нам будет удобно использовать обозначение x_{n+1} для константы.

Т.к. с тропическими системами удобнее всего работать в матричном виде, в этой главе мы будем отождествлять тропическую линейную систему и ее матрицу.

Сразу же заметим, что

Предложение 2. *Класс разрешимых тропических линейных систем инвариантен относительно прибавления произвольной константы ко всем числам в одной строке или в одном столбце. Более того, из решения системы после подобного преобразования можно получить решение исходной системы, прибавив к найденному решению разность первых строк матрицы до и после преобразования. Мы будем называть подобные преобразования* разрешенными.

Доказательство. Прибавление константы к строке ничего не меняет, т.к. это просто домножение многочлена на тропическую константу. Прибавление константы c к столбцу i – замена переменной x_i на $x_i - c$ (исключение – прибавление константы c к последнему, соответствующему константе, столбцу, но эту операцию можно выразить через прибавление c к каждой строке и вычитанию c из каждого столбца, кроме последнего). □

Далее мы будем пользоваться этим предложением и вместо поиска решения системы будем преобразовывать ее, прибавляя константы к строкам и столбцам, стараясь получить систему, решением которой будет точка 0.

Из Предложения 2 сразу же получается следующее замечание.

Замечание 3. *Не умаляя общности, можно считать, что все числа в матрице системы неотрицательны.*

Далее мы будем рассматривать только целочисленные тропические линейные системы с конечными неотрицательными коэффициентами.

В этом разделе будут использоваться следующие обозначения:

- $h(A)$ – количество строк матрицы A,
- $n(A)$ – количество переменных в системе A,
- $w(A)$ – количество столбцов матрицы A (т.е. $n + 1$),
- $k(A) = h(A) - w(A)$,
- $N(A)$ – максимальный модуль числа в матрице.

Для простоты, если понятно, о какой матрице идет речь, параметр в этих обозначениях будет опускаться.

Теперь мы можем доказать основную теорему:

Теорема 9. *Рассмотрим переопределенную тропическую линейную систему A. Если A разрешима, то найдется F – такая линейная подсистема A из $w(A)-1$ уравнения, что x – стабильное решение F – будет решением A.*

Доказательство. По Теореме 8 нам достаточно доказать, что найдется множество из $2h$ мономов $a_{i,j}, 1 \leqslant i \leqslant h, 1 \leqslant j \leqslant 2$, таких, что

- Мономы $a_{i,1}$ и $a_{i,2}$ – два различных монома из i-го многочлена A, минимальные в точке x.
- Размерность линейной оболочки векторов $v_n(a_{1,1}, a_{1,2})$, $v_n(a_{2,1}, a_{2,2}), \cdots, v_n(a_{h,1}, a_{h,2})$ равна n.

Нам будет удобно слегка переформулировать это свойство в терминах матрицы. По Предложению 2 это эквиваленто тому, что с помощью разрешенных преобразований матрицу A можно привести к такому виду $A^{'}$, что найдется множество из $2h$ чисел $f_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant h$, $1 \leqslant j \leqslant 2$, $1 \leqslant f_{i,j} \leqslant w$, таких, что

- $A^{'}_{i,f_{i,j}}, 1 \leqslant j \leqslant 2$ – минимальные элементы в i-ом столбце (мы берем коэффициенты при мономах, а не их значения, т.к. с помощью разрешенных преобразований мы можем добиться того, что точка x станет нулем).
- Если построить граф из w вершин и провести в нем h ребер $(f_{i,1}, f_{i,2}), 1 \leqslant i \leqslant h$, то полученный граф будет связным.

Этот факт мы будем доказывать от противного.

Допустим, что есть матрица $A^{'}$, получаемая из матрицы A с помощью разрешенных преобразований, и набор из $2h$ чисел $f_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant h$, $1 \leqslant j \leqslant 2$, $1 \leqslant f_{i,j} \leqslant w$, таких, что

- $A^{'}_{i,f_{i,j}}, 1 \leqslant j \leqslant 2$ – минимальные элементы в i-ой строке матрицы A'.
- Если построить граф G из w вершин (по вершине на столбец) и провести в нем h ребер $(f_{i,1}, f_{i,2}), 1 \leqslant i \leqslant h$ (две вершины соединены ребром, если соответствующие столбцы одновременно выбраны как минимальные для некоторой строки), то размер D_1 – связной компоненты, содержащий вершину 1, – максимален среди всех возможных выборов $A^{'}$ и $f_{i,j}$.

Т.к. мы предполагаем, что утверждение теоремы не выполнено, то G не связен, а значит, найдется хотя бы одна вершина, не лежащая в D_1.

Рассмотрим два случая:

(1) В графе G есть хотя бы одно ребро, не лежащее в D_1.
(2) Все вершины графа G, не лежащие в D_1, изолированы.

В каждом из этих случаев мы сможем найти такую матрицу $A^{''}$, получающуюся из матрицы A с помощью разрешенных преобразований, и такой набор чисел $f^{'}_{i,j}$, что в соответствующем графе $G^{'}$ размер связной компоненты, содержащей вершину 1, будет больше, чем D_1.

Сперва докажем, что мы сможем найти матрицу $A^{''}$ в случае (1). Если в матрице $A^{'}$ есть строчка i такая, что $f_{i,1}$ и $f_{i,2}$ не лежат в D_1, но при этом минимум достигается еще на каком-нибудь мономе $f_{i,3}$, лежащем в D_1, то, заменив $f_{i,1}$ на $f_{i,3}$, мы увеличим размер связной компоненты, содержащей единицу. В этом случае $A^{''} = A^{'}$. Если же такой строки нет, то мы можем одновременно уменьшать значение во всех столбцах с номерами из D_1 до тех пор, пока такая строка не появится, получив искомое $A^{''}$ (при этом элементы, которые были минимальными в $A^{'}$, будут минимальными и в $A^{''}$, т.ч. выбор $f_{i,j}$ корректен).

Теперь разберемся со случаем, когда все точки вне D_1 изолированы.

Без уменьшения общности можно считать, что есть только одна вершина v, не лежащая в D_1 (в противном случае можно провести индукцию по количеству переменных – прибавим ∞ к одной из переменных, не лежащих в D_1, и сведем задачу к задаче меньшего размера).

Мы будем преобразовывать матрицу $A^{'}$, значения $f_{i,j}$ и соответствующий им граф G в соответствии со следующим алгоритмом:

(1) Заведем множество V, равное $\{v\}$. Во время работы этого алгоритма мы всегда будем поддерживать следующие свойства:
 (a) В графе G нет ребер между вершинами из V и другими.
 (b) В графе G не более двух связных компонент.
 (c) Количество ребер в графе $G \setminus V$ не меньше количества вершин.

 На данном шаге эти свойства выполняются, т.к. количество ребер равно количеству многочленов, которое не меньше, чем число переменных.
(2) Одновременно уменьшаем значения во всех столбцах с номерами в V до тех пор, пока не появится строка k такая, что ранее минимум в ней достигался в столбцах $f_{k,1}, f_{k,2}$, не лежащих в V, а после уменьшения найдется столбец с номером из

V (допустим, a) такой, что $A'_{k,a} = A'_{k,f_{k,1}} = A'_{k,f_{k,2}}$. Возможно, что уменьшать значения не придется, т.к. такая строка будет в исходной матрице. Если же уменьшать значения все-таки придется, то, т.к. в исходном графе не было ребер между V и $G \setminus V$, элементы, которые были минимальными в A', останутся минимальными, а значит, выбор $f_{i,j}$ по-прежнему корректен.

Если граф $G \setminus V$ остается связным при удалении ребра $(f_{k,1}, f_{k,2})$, то, заменив $f_{k,1}$ на a, мы получим связный граф, т.е. придем к противоречию.

Иначе – после удаления ребра $(f_{k,1}, f_{k,2})$ граф $G \setminus V$ распадется на две связные компоненты. Т.к. по предположению в графе $G \setminus V$ количество вершин было не больше количества ребер, то по принципу Дирихле это свойство сохранится и для одной из получившихся компонент (не уменьшая общности, будем считать, что это компонента, содержащая $f_{k,1}$). Значит, если мы заменим $f_{k,1}$ на a и добавим все вершины из компоненты, содержащей $f_{k,2}$, в множество V, в графе G по-прежнему будет две связные компоненты, ребер между вершинами из V и $G \setminus V$ не будет, и количество вершин в $G \setminus V$ будет не больше количества ребер. Теперь повторим шаг (2) с измененной матрицей, набором ребер, графом G и множеством V.

Т.к. на каждом шаге множество V увеличивается, а количество вершин конечно, то данный алгоритм завершится, а значит, граф G станет связным.

$\square$

С помощью этой теоремы можно построить простой алгоритм для поиска решений переопределенной тропической системы, работающий за $O((C_h^{w-1} w^2 + w^3) M(N))$:

Теорема 10. *Следующий алгоритм находит решение переопределенной тропической линейной системы A за время*

$$O((C_h^{w-1} w^2 + w^3) M(N)) :$$

Переберем все подсистемы A из $h(A) - 1$ уравнений и с помощью тропического правила Крамера найдем S – множество их стабильных решений. Подставляем все решения из S в A – если хотя бы одно из них окажется решением A, то ответ найден, иначе решений нет.

Доказательство. Заметим, что подсчет определитель квадратной тропической матрицы выполняется за $O(w^3 M(N))$ с помощью венгерского алгоритма, а пересчет определителя при замене одной строки/столбца можно произвести за $O(w^2 M(N))$. $\square$

§5. Выводы

В данной статье доказано, что для того, чтобы решить переопределенную тропическую систему, достаточно решить все ее квадратные подсистемы и проверить, не подойдет ли одно из полученных решений в качестве решения исходной системы. Одно из возможных направлений для дальнейшей работы – уменьшение количества подсистем, которые приходится перебирать. В случае, если количество перебираемых подсистем удастся ограничить полиномом, удастся построить полиномиальный алгоритм решения переопределенных систем.

Кроме того, можно показать, что теорема, аналогичная Теореме 9, выполняется и для тропических полиномиальных систем (не только линейных). И хотя маловероятно, что это поможет найти алгоритм решения полиномиальных систем (эта задача NP-полна даже в непереопределенном случае), данный факт можно использовать для того, чтобы лучше понять устройство тропических предмногообразий (на данный момент многие факты, например, теорема Безу, известны лишь для непереопределенных систем). Таким образом, еще одно из возможных направлений работы – исследование тропических полиномиальных систем с помощью стабильных точек их подсистем.

Литература

1. M. Akian, S. Gaubert, A. Guterman, *Tropical polyhedra are equivalent to mean payoff games.* — Intern. J. Algebra Comput. **22**, No. 1 (2012).
2. P. Butcovič, *Strong regularity of matrices mъ a survey of results.* — Discr. Appl. Math. **48** (1994), 45–68.
3. A. Davydow, *New Algorithms for Solving Tropical Linear Systems.* — `arXiv preprint arXiv:1309.5206`, (2013).
4. D. Grigoriev, *Complexity of solving tropical linear systems.* — Comput. Complexity **22** (2013), 71–78.
5. Z. Izhakian, L. Rowen, *The tropical rank of a tropical matrix.* — Commun. Algebra **37**, No. 11 (2009), 3912–3927.
6. Harold W. Kuhn, *The hungarian method for the assignment problem.* — Naval Research Logistics Quarterly **2** (1995), 83–97.

7. J. Richter-Gebert, B. Sturmfels, T. Theobald, *First steps in tropical geometry.* — Idempotent Mathematics and Mathematical Physics, Contemp. Math. **377** (2005), 289–317.
8. S. Reinhard, T. Thorsten, *Combinatorics and genus of tropical intersections and Ehrhart theory.* — SIAM J. Discrete Math. **24**, No. 1 (2010), 17–32.
9. L. Felipe Tabera et. al. *Tropical resultants for curves and stable intersection.* — Revista Matemática Iberoamericana **24**, No 3 (2008), 941–961.
10. Theobald Thorsten, *On the frontiers of polynomial computations in tropical geometry.* — J. Symbolic Comput **41**, No. 12 (2006), 1360–1375.

Davydow A. An algorithm for solving an overdetermined tropical linear system with the help of analysis of stable solutions of subsystems.

In this paper we show that an overdetermined tropical linear system has a solution if and only if it contains a square subsystem with a stable solution which is a solution of the initial system. This leads us to a simple algorithm solving tropical linear systems in $O(C_m^n n^4)$ time, where m is a number of equations and n is a number of variables. In the particular case of weekly overdetermined systems this time is polynomial.

С.-Петербургский национальный исследовательский Академический университет Российской академии наук (СПбАУ РАН)

E-mail: adavydow@gmail.com

Поступило 18 октября 2016 г.