Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 450, 2016 г.

Н. Ю. Власова, Д. В. Карпов

ОЦЕНКА ДИНАМИЧЕСКОГО ХРОМАТИЧЕСКОГО ЧИСЛА ГРАФА ЧЕРЕЗ ЕГО ХРОМАТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО

§1. Обозначения и основные результаты

В настоящей заметке рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер, изучаются правильные раскраски вершин таких графов.

Мы используем стандартные обозначения. Множество вершин графа G будем обозначать через $V(G)$.

Степерь вершины V в графе G будем обозначать через $d_G(v)$.

Максимальную и минимальную степени вершин графа G мы будем обозначать через $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ соответственно.

Мы будем работать с раскрасками вершин графа и обозначать цвет вершины v в раскраске ρ через $\rho(v)$.

Через $N_G(v)$ будем обоначать *окрестность* вершины v в графе G.

Определение 1. 1) Раскраска вершин графа называется *правильной*, если любые две смежные вершины покрашены в разные цвета.

2) Раскраска вершин графа G называется *динамической*, если для любой вершины $v \in V(G)$ степени не менее двух окрестность $\mathrm{N}_G(v)$ содержит вершины хотя бы двух различных цветов.

3) Раскраска вершин гиперграфа называется *правильной*, если в любом гиперребре есть хотя бы две вершины разных цветов.

Рассмотрим гиперграф $\mathcal{G}$ на множестве вершин графа G, гиперрёбра которого — это окрестности вершин графа G. Таким образом, правильная динамическая раскраска вершин графа G — это правильная раскраска вершин графа G и, одновременно, правильная раскраска вершин гиперграфа $\mathcal{G}$.

Ключевые слова: хроматическое число, правильная раскраска, динамическая раскраска.

Исследования выполнены при поддержке правительства РФ (грант 14.Z50.31.0030), и гранта РФФИ 14-01-00545.

Определим хроматическое число графа, а также, по аналогии с ним, динамическое и динамическое хроматическое число графа.

Определение 2. 1) *Хроматическое число* графа (гиперграфа) G (обозначение: $\chi(G)$) — это наименьшее натуральное число такое, что существует правильная раскраска вершин G в $\chi(G)$ цветов.

2) *Динамическое число* графа G (обозначение: $\chi_d(G)$) — это наименьшее натуральное число такое, что существует динамическая раскраска вершин графа G в $\chi_d(G)$ цветов.

3) *Динамическое хроматическое число* графа G (обозначение: $\chi_2(G)$) — это наименьшее натуральное число такое, что существует динамическая правильная раскраска вершин графа G в $\chi_2(G)$ цветов.

Дополнительное условие о правильности раскраски гиперграфа $\mathcal{G}$ не слишком сильно увеличивает количество цветов, необходимое для раскраски.

Теорема Брукса [1] говорит нам, что для любого связного графа G, кроме полного графа на $d+1$ вершине K_{d+1}, при $\Delta(G) \leqslant d$ и $d \geqslant 3$ выполняется $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.

В работе [2] доказано, что $\chi_2(G) \leqslant \Delta(G)+1$ для любого связного графа G при условии $\Delta(G) \geqslant 3$. Более того, в [2] доказано, что при $\Delta(G) \leqslant 3$ имеет место неравенство $\chi_2(G) \leqslant 4$ за исключением случая, когда граф G — это цикл из пяти вершин.

В [5] и [7] Д. В. Карпов доказал аналог теоремы Брукса для правильных динамических раскрасок: для любого связного графа G, кроме ряда описанных в работе исключений, при $\Delta(G) \leqslant d$ и $d \geqslant 6$ выполняется $\chi_2(G) \leqslant \Delta(G)$.

В работе [6] Д. В. Карпов и Н. В. Гравин доказали следующий результат для динамических раскрасок графов.

Теорема 1. *Пусть* $k = \left\lceil \frac{2\Delta(G)}{\delta(G)} \right\rceil$.

1) *Тогда* $\chi_d(G) \leqslant k+1$.

2) *Пусть* $\delta(G) \geqslant 3$ *и* $k \geqslant 3$. *Тогда* $\chi_d(G) \leqslant k$.

В последнее время появились попытки оценить динамическое хроматическое число графа через его хроматическое число. Так, в работе [8] доказано, что при $\chi(G) \geqslant 6$ существует правильная раскраска вершин графа G в $\chi(G)$ цветов, в которой множество плохих вершин — независимое (вершина называется *плохой*, если ее степень более одного, но все соседи одноцветны).

В работе [4] доказано, что у любого регулярного двудольного графа существует правильная динамическая раскраска в 4 цвета. Более того, в этой раскраске каждый из двух цветов исходной правильной раскраски графа в 2 цвета разбит на два новых цвета.

В этой статье мы оценим динамическое хроматическое число графа через его динамическое и хроматическое число.

Теорема 2. *Для любого графа G выполнено $\chi_2(G) \leqslant \chi_d(G) \cdot \chi(G)$.*

Доказательство этой теоремы достаточно тривиально. Интересно отметить, что существуют графы, для которых оценка из теоремы 2 достигается, серия примеров будет построена ниже.

Непосредственно из теоремы 2 и доказанной в работе [6] теоремы 1 следует результат, обобщающий доказанное в работе [4] для произвольного хроматического числа и не обязательно регулярного графа.

Следствие 1. *Пусть $k = \left\lceil \frac{2\Delta(G)}{\delta(G)} \right\rceil$, $c = \chi(G)$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) $\chi_2(G) \leqslant (k+1)c$.

2) *Пусть $\delta(G) \geqslant 3$ и $k \geqslant 3$. Тогда $\chi_2(G) \leqslant kc$.*

Понятно, что оценка из следствия 1 не точна. Для регулярного двудольного графа следствие 1 дает оценку 6 на динамическое хроматическое число, что хуже чем в работе [4]. Однако, для двудольного графа с малой разницей между $\delta(G)$ и $\Delta(G)$ наш результат также дает оценку $\chi_2(G) \leqslant 6$, что уже гораздо интереснее. Отметим, что следствие 1 дает достаточно хорошие оценки на $\chi_2(G)$ для графа G с малым отношением $\frac{\Delta(G)}{\delta(G)}$.

§2. Доказательство теоремы 2 и серия примеров

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим динамическую раскраску вершин ρ_d графа G в $\chi_d(G)$ цветов, а также правильную раскраску ρ_c вершин графа G в $\chi(G)$ цветов. Цветом каждой вершины $v \in V(G)$ в новой раскраске ρ будет следующая упорядоченная пара цветов:

$$\rho(v) = (\rho_c(v), \rho_d(v)).$$

Понятно, что раскраска ρ использует $\chi(G) \cdot \chi_d(G)$ цветов. Из правильности раскраски ρ_c следует правильность раскраски ρ. Пусть v — вершина с $d_G(v) \geqslant 2$. Тогда для динамической раскраски ρ_d есть две вершины разных цветов в окрестности $\mathrm{N}_G(v)$. Очевидно, эти же вершины будут разноцветными и в ρ. Следовательно, ρ — правильная динамическая раскраска вершин графа G.

Таким образом, $\chi_2(G) \leqslant \chi(G) \cdot \chi_d(G)$. $\square$

Построим серию графов, для которых $\chi_2(G) = \chi(G) \cdot \chi_d(G)$.

Для произвольных положительных целых чисел $k \geqslant 2$ и c мы построим граф G с

$$\chi_d(G) = k, \quad \chi(G) = c \quad \text{и} \quad \chi_2(G) = kc.$$

Пусть $\mathcal{H}$ — произвольный гиперграф с $\chi(\mathcal{H}) = k$. К примеру, для произвольного натурального $n \geqslant 2$ можно взять $\mathcal{H}$ такой, что $|V(\mathcal{H})| = k(n-1)$ и любые n вершин из $V(\mathcal{H})$ образуют гиперребро. Если мы покрасим $\mathcal{H}$ в не более чем $k-1$ цвет, то по принципу Дирихле найдутся n вершин одного цвета, и, так как они образуют гиперребро, раскраска не будет правильной. Если же мы покрасим вершины в k цветов так, чтобы вершин каждого цвета было ровно по $n-1$, то получится правильная раскраска. Значит, $\chi(\mathcal{H}) = k$.

Создадим c копий этого гиперграфа $\mathcal{H}_1, \ldots \mathcal{H}_c$ с $V(\mathcal{H}_i) = A_i$ и $E(\mathcal{H}_i) = B_i$. Положим $B = \bigcup_{i=1}^{c} B_i$. Граф G будет иметь множество вершин

$$V = \left(\bigcup_{i=1}^{c} A_i\right) \cup B$$

(то есть, вершины G соответствуют вершинам и гиперрёбрам c копий гиперграфа $\mathcal{H}$). Множества вершин $A_1, \ldots, A_c$ будут независимыми в G, а любые вершины из двух разных множеств A_i и A_j будут смежны в G. Каждая вершина $b \in B_i$ смежна в G со всеми вершинами соответствующего ей гиперребра гиперграфа $\mathcal{H}_i$.

Выясним динамическое, хроматичическое и динамическое хроматическое числа графа G.

1. $\chi(G) = c$.
Очевидно, что вершины из разных множеств $A_1, \ldots, A_c$ должны быть покрашены в разные цвета, поэтому $\chi(G) \geqslant c$. С другой стороны, покрасим каждое множество A_i в цвет i, после чего все вершины из B_i можно покрасить в любой другой цвет из этих c цветов. Таким образом, $\chi(G) = c$.

2. $\chi_d(G) = k$.
Из $\chi(\mathcal{H}) = k$ следует, что при раскраске вершин графа G менее чем в k цветов в гиперграфе $\mathcal{H}_i$ будет гиперребро $b \in B_i$, все вершины которого одноцветны. Следовательно, $\mathrm{N}_G(b)$ одноцветна и раскраска не является динамической.

С другой стороны, существует правильная раскраска вершин гиперграфа $\mathcal{H}$ в k цветов. Покрасим все копии этого гиперграфа именно так. Все вершины множества B покрасим в цвет 1. Докажем, что получилась динамическая раскраска вершин графа G. Вершина $b \in B$ не является плохой, так как в соответствующем ей гиперребре есть хотя бы две разноцветных вершины по определению правильной раскраски гиперграфа. Вершина $a \in A_i$ соединена со всеми вершинами множества A_j (где $j \neq i$), а эти вершины покрашены в $\chi(\mathcal{H}) = k \geqslant 2$ цветов.

Таким образом, $\chi_d(G) = k$.

3. $\chi_2(G) \geqslant kc$.

Рассмотрим правильную динамическую раскраску графа G. Как уже объяснялось в начале пункта 2, в динамической раскраске все вершины каждого из множеств $A_1, \ldots, A_c$ должны быть покрашены хотя бы в k цветов. Вспомним, что при $i \neq j$ любая вершина из A_i смежна с любой вершиной из A_j. В силу правильнсти раскраски, тогда никакие две вершины из A_i и A_j не могут иметь один цвет, то есть, $\chi_2(G) \geqslant kc$.

Литература

1. R. L. Brooks, *On coloring the nodes of network.* — Proc. Cambridge Philos. Soc. **37** (1941), 194–197.
2. H.-J. Lui, B. Montgomery, H. Poon, *Upper bounds of dynamic chromatic number.* — Ars Combinatoria **68** (2003), 193–201.
3. S. Akbari, M. Ghanbari, S. Jahanbekam, *On the list dynamic coloring of graphs.* — Discrete Applied Mathematics, **157** (2009), No. 14, 3005–3007.
4. S. Akbari, M. Ghanbari, S. Jahanbekam, *On the Dynamic Chromatic Number of Graphs.* — Contemp. Math., **531** (2010), 11–18.
5. Д. В. Карпов, *Динамические правильные раскраски графов.* — Зап. научн. семин, ПОМИ **381** (2010), 47–77.
6. Н. В. Гравин, Д. В. Карпов, *О правильных раскрасках гиперграфов.* — Зап. научн. семин, ПОМИ **391** (2011), 79–89.
7. D. Karpov, *An Analog of Brooks' Theorem for Dynamic Colorings.* — Moscow J. Combinat. Number Theory **6** (2016), No. 1, 25–63.

8. A. Ahadi, S. Akbari, A. Dehghan, M. Ghanbari, *On the difference between chromatic number and dynamic chromatic number of graphs.* — Discrete Math. **312**, No. 17 (2012), 2579–2583.
9. S.-J. Kim, S. J. Lee, W.-J Park, *Dynamic coloring and list dynamic coloring of planar graphs.* — Discrete Appl. Math. **161** (2013), 2207–2212.

Vlasova N. Y., Karpov D. V. Bounds on the dynamic chromatic number of a graph in terms of the chromatic number.

A vertex coloring of a graph is called *dynamic*, if the neighborhood of any vertex of degree at least 2 contains at least two vertices of distinct colors. Similarly to the *chromatic number* $\chi(G)$ of the graph G one can define its *dynamic number* $\chi_d(G)$ (the minimal number of colors in a dynamic coloring) and *dynamic chromatic number* $\chi_2(G)$ (the minimal number of colors in a proper dynamic coloring). We prove that $\chi_2(G) \leqslant \chi(G) \cdot \chi_d(G)$ and construct an infinite series of graphs for which this bound on $\chi_2(G)$ is tight.

For a graph G set $k = \lceil \frac{2\Delta(G)}{\delta(G)} \rceil$. We prove that $\chi_2(G) \leqslant (k+1)c$. Moreover, in the case where $k \geqslant 3$ and $\Delta(G) \geqslant 3$ we prove a stronger bound $\chi_2(G) \leqslant kc$.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28,
Старый Петергоф,
198504, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: evropa2100@mail.ru

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург;
С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28,
Старый Петергоф,
198504, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: dvk0@yandex.ru

Поступило 11 октября 2016 г.