Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 450, 2016 г.

В. А. Буслов

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ МНОГОЧЛЕНЕ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРАХ В ТЕРМИНАХ ДРЕВОВИДНОЙ СТРУКТУРЫ ОРГРАФА

Введение

Характеристики матрицы смежности орграфа удобно анализировать через циклическую структуру орграфов, свойства лапласовской матрицы – через древовидную (более общо – лесную) структуру. Лапласовская матрица, имеющая нулевую сумму элементов по строке, просто не может содержать информацию о петлях орграфа, что сужает её применимость. Однако, если расширить орграф, добавив новую вершину и специальные смежности, одновременно удалив все петли, то матрица смежности исходного орграфа оказывается подматрицей лапласовской матрицы преобразованного. Это позволяет, используя известные свойства лапласовских матриц, описывать характеристики матриц смежности (произвольных квадратных матриц) в древовидной структуре. Предлагаемое в настоящей работе расширение размерности практически встречалось в работах Вентцеля и Фрейдлина [8], где при исследовании случайных блужданий, граница области сразу полагалась одним из состояний марковской цепи, однако без прямой связи со спектральными свойствами управляющей матрицы, в которой это состояние отсутствует. Собственные проекторы лапласовских матриц, отвечающие нулевому собственному значению, подробно рассматривались в [12], однако компоненты собственных векторов для ненулевых собственных значений оставались за кадром.

В настоящей работе, используя расширенный орграф, получено выражение для характеристического многочлена произвольной квадратной матрицы в древовидной структуре (Теорема 1) из аналогичного представления Фидлера и Седлачека [4] для лапласовских. Расширена формула всех миноров Чайкена и Муна [5, 6] с лапласовских матриц на произвольные квадратные (Теорема 2). Получено параметрическое представление для собственных векторов произвольных матриц, отвечающих собственному числу единичной алгебраической кратности,

Ключевые слова: взвешенный орграф, спектральный анализ, цепи Маркова.

в древовидной структуре (Теорема 3), где доказательство проведено на основе обобщенной теоремы о всех минорах. Отдельным пунктом приведено другое доказательство той же формулы, несколько технически более сложное, но не использующее формулу всех миноров. Его самостоятельная ценность состоит в том, что во-первых, на его основе может быть получена сама теорема о всех минорах, и во-вторых, оно не столько комбинаторно, сколько наглядно демонстрирует, как меняется орграф и его свойства при взаимных заменах дуг заходящих в одну вершину, на дуги, заходящие в другую.

§1. Определения и используемые обозначения

Для всякого орграфа $G = (\mathcal{V}G, \mathcal{A}G)$ со взвешенными смежностями g_{ij} произведение весов всех его дуг

$$\pi_G = \prod_{(i,j)\in\mathcal{A}G} g_{ij}$$

назовём *продуктивностью* [1] орграфа. Если $\mathcal{B}$ – некоторое множество подграфов огргафа G, через $\sigma(\mathcal{B})$ обозначим сумму

$$\sigma(\mathcal{B}) = \sum_{B\in\mathcal{B}} \pi_B.$$

Взвешенную матрицу смежности $\mathbf{G}$ с элементами g_{ij} будем обозначать той же буквой, что и сам орграф G.

Линейный орграф [2] – орграф, в котором из каждой вершины ровно одна дуга исходит и заходит ровно одна, то есть линейный орграф состоит из *контуров*, которые являются его связными компонентами.

В орграфах есть два вида лесов: *заходящие* и *исходящие*, получающиеся из первых заменой направлений дуг. Заходящий лес F – орграф, в котором из каждой вершины исходит не более одной дуги, и в нём нет контуров. Вершины, из которых дуги не исходят – *корни* деревьев леса F. В дальнейшем рассматриваются только заходящие леса. *Остовной* подргаф – подграф включающий все вершины (ор)графа.

[1] Эту величину иногда также называют весом орграфа, хотя её формирование не аддитивно, а мультипликативно. Обычно весом принято считать сумму весов дуг. Естественней произведение дуг интерпретировать как объём орграфа. Используемое определение призвано избежать путаницы.

[2] Термин *линейный* взят из [1] и с геометрическими представлениями никак не связан, а обусловлен приложениями к линейной алгебре, поскольку слагаемые в определителях и главных минорах соответствуют именно таким орграфам (1).

Если $\mathcal{I}$ – некоторое подмножество множества вершин орграфа G и $0 \leqslant k \leqslant |\mathcal{V}G \setminus \mathcal{I}|$, то через $\mathcal{F}^k_{\mathcal{I}}(G)$ будем обозначать множество остовных заходящих лесов орграфа G, состоящих из $(k + |\mathcal{I}|)$ деревьев, причём все вершины множества $\mathcal{I}$ являются корнями. Оставшиеся k корней – произвольные вершины из $\mathcal{V}G \setminus \mathcal{I}$. В случаях, когда ясно о подграфах какого орграфа G идёт речь, или это обстоятельство несущественно, будем опускать указание на него. Также $\mathcal{F}_{\mathcal{I}} \equiv \mathcal{F}^0_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{F}^k \equiv \mathcal{F}^k_{\varnothing}$. Если на множество лесов наложены дополнительные условия $a_1, a_2, \cdots, a_l$, то их указываем в качестве аргументов: $\mathcal{F}(a_1, a_2, \cdots, a_l)$. Используемые дополнительные условия:

$\underline{(j,i)}$ – содержится дуга (j,i);

$\overline{(j,i)}$ – отсутствует дуга (j,i);

$j \to$ – из вершины j исходит дуга;

$j \to i$ – вершина i достижима из j;

$j \nrightarrow i$ – вершина i не достижима из j.

Если $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ – некоторые подмножества множества вершин (индексов), то через $\mathbf{G}(\overline{\mathcal{I}}|\overline{\mathcal{J}})$ будем обозначать матрицу $\mathbf{G}$, в которой вычеркнуты строки с номерами из $\mathcal{I}$ и столбцы с номерами из $\mathcal{J}$. Если номера вычёркиваемых строк и столбцов совпадают, используем сокращение $\mathbf{G}(\overline{\mathcal{I}}) = \mathbf{G}(\overline{\mathcal{I}}|\overline{\mathcal{I}})$.

Далее в качестве множества вершин орграфа используются два множества $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$ и $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N} \cup \{0\}$. Условимся подмножество множества вершин снабжать индексом 0, если оно включает вершину 0.

§2. Характеристические многочлены матрицы смежности и лапласиана

Если на произвольную $N \times N$ матрицу $\mathbf{G}$ смотреть как на взвешенную матрицу смежности соответствующего орграфа G, то её характеристический многочлен по "теореме о коэффициентах для орграфов" [1] имеет вид

$$\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{G}) = \sum_{k=0}^{N} \lambda^k \left[\sum_{L \in \mathcal{L}_k} (-1)^{p(L)} \pi_L \right] , \tag{1}$$

где $\mathcal{L}_k$ – множество всех линейных ориентированных подграфов L графа G с точно k вершинами; $p(L)$ означает число компонент (контуров) орграфа L.

Коэффициенты в (1) выражены через цикловидную структуру орграфа G, а сама теорема о коэффициентах является переформулировкой стандартной записи характеристического многочлена в виде суммы произведений матричных элементов со знаком определяемым четностью подстановки (числом контуров).

В терминах древовидной структуры известно [2, 3] выражение характеристического полинома не матрицы смежности $\mathbf{G}$, а лапласиана $\mathbf{L}$ орграфа G, определяемого как матрица с элементами l_{ij}, равными

$$l_{ij} = \begin{cases} -g_{ij}, & i \neq j, \\ \sum\limits_{k \neq i} g_{ik}, & i = j. \end{cases}$$

Выражение для главных миноров лапласиана получено в [4] и в используемых обозначениях имеет вид

$$\det \mathbf{L}(\overline{\mathcal{I}}) = \sigma(\mathcal{F}_{\mathcal{I}}), \tag{2}$$

где $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ – множество остовных заходящих лесов орграфа G, состоящих из $|\mathcal{I}|$ деревьев, корнями которых являются вершины из $\mathcal{I}$. Поскольку $\mathcal{F}^k = \bigcup\limits_{|\mathcal{I}|=k} \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$, а коэффициент при k-ой степени λ в характеристическом многочлене с точностью до множителя $(-1)^{N-k}$ равен сумме всех главных миноров порядка k, получаем

$$\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{L}) = (-1)^N \sum_{k=1}^{N} (-\lambda)^k \sigma(\mathcal{F}^k)\ , \tag{3}$$

где $\mathcal{F}^k$ – множество всех остовных заходящих лесов орграфа G с точно k компонентами. Заметим, что множество лесов $\mathcal{F}^N$ состоит из одного пустого N-вершинного орграфа. Его продуктивность, как произведение с нулевым количеством сомножителей, полагается равно равной 1 и $\sigma(\mathcal{F}^N) = 1$. Множество $\mathcal{F}^0$ пусто и $\sigma(\mathcal{F}^0) = 0$, поскольку в сумме нет слагаемых. Тем самым, суммирование в (3) можно вести от нуля. Используются различные конкретизирующие варианты этой формулы при исследовании спектров орграфов – неориентированных, невзвешенных, со специальными свойствами (см. [1]).

Максимальное описание связи миноров лапласиана со структурой орграфа даёт формула всех миноров Чайкена [5], которую приведём в варианте Муна [6]. Пусть $\mathcal{I} = \{i_1, i_2, \dots i_k\}$ и $\mathcal{J} = \{j_1, j_2, \dots j_k\}$ – k-элементные подмножества множества вершин. Обозначим через

$\mathcal{F}_{\mathcal{I},\mathcal{J}}$ множество остовных заходящих лесов орграфа G, состоящих из ровно k деревьев, корнями которых являются вершины множества $\mathcal{I}$, причем каждое дерево содержит ровно одну вершину из множества $\mathcal{J}$. Будем считать, что индексы упорядочены: $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ и $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$. Всякий лес $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{I},\mathcal{J}}$ порождает перестановку p_F индексов $\{1, 2, \ldots, k\}$ по правилу $p_F(m) = l$, если в лесе F вершина j_m принадлежит дереву с корнем в вершине i_l. Пусть $\varepsilon(p_F)$ – чётность этой перестановки. Тогда

$$\det \mathbf{L}(\overline{\mathcal{I}}|\overline{\mathcal{J}}) = (-1)^{\sum\limits_{m=1}^{k}(i_m+j_m)} \sum_{F\in\mathcal{F}_{\mathcal{I},\mathcal{J}}} \varepsilon(p_F)\pi_F. \tag{4}$$

Наглядный вывод формул (2)–(4) проведен в [7].

§3. Переход к древовидной структуре в матрице смежности

Заметим, что в матрице Лапласа орграфа G не задействованы диагональные элементы g_{ii}, так что она отвечает орграфу без петель. Поэтому, хоть леса по определению не включают петли, лапласиан не годится для полного исследования орграфа при их наличии. Однако из орграфа G можно создать новый орграф G_0, лапласиан которого содержит матрицу смежности исходного орграфа в качестве подматрицы. Именно, пусть G – орграф с множеством вершин $\mathcal{V}G = \mathcal{N}$ и весами дуг g_{ij}. Введём новую вершину 0, удалим все петли (i, i), а вместо них добавим дуги $(i, 0)$ с весами $g_{i0} = -\sum\limits_{k=1}^{N} g_{ik}$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Полученный орграф обозначим через G_0: $\mathcal{V}G_0 = \mathcal{N}_0 = \mathcal{N} \cup \{0\}$, $\mathcal{A}G_0 = (\mathcal{A}G \bigcup\limits_{i\in\mathcal{N}}(i, 0)) \backslash (\bigcup\limits_{i\in\mathcal{N}}(i, i))$, веса дуг равны g_{ij}, $i \in \mathcal{N}$, $j \in \mathcal{N}_0$ (см. рис. 1)).

Дополнительная вершина [3] и веса захода в неё имеют отчётливый вероятностный смысл. Именно, если $\mathbf{G} = \mathbf{P} - \mathbf{E}$ – генератор марковской цепи с убиванием (у вероятностной матрицы $\mathbf{P}$ сумма элементов

[3]Введение новой вершины с единичными весами захода для орграфа без петель используется для описания стохастических матриц $(\mathbf{E} - \alpha\mathbf{L})$, и такой орграф называют *конусом* [3, 12]. В нашем случае существенно, что петли у исходного орграфа есть, и веса захода в эту вершину выбраны специально, чтобы при удалении петель, информация о них сохранилась. Дальнейшее изложение следует [9] с несущественными изменениями в обозначениях.

строки меньше единицы) [11], то вес $g_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{N} p_{ij}$ как раз есть вероятность убивания процесса, при условии, что он находится в состоянии i. Тем самым, дополнительную вершину 0 можно интерпретировать в некотором смысле как “границу” конечного множества вершин орграфа.

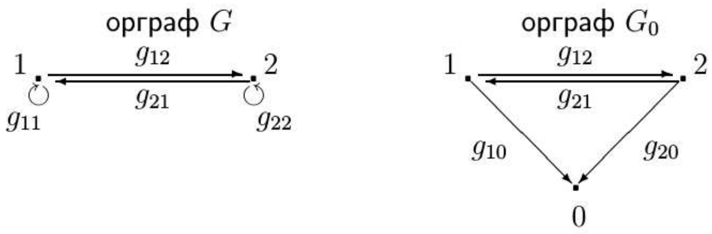

Рис. 1. Построение орграфа без петель G_0 по орграфу G с петлями.

Заметим, что поскольку в орграфе G_0 из вершины 0 дуги не исходят, вообще все его остовные заходящие леса имеют корнем вершину 0. Условимся в дальнейшем, если в формуле фигурирует вершина 0, то речь идёт об орграфе G_0 и его подграфах и ссылку на G_0 будем опускать.

Теорема 1. *Пусть* $\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{G}) = \sum_{k=0}^{N} \lambda^k c_k$ *– характеристический многочлен* $N \times N$ *матрицы* $\mathbf{G}$ *с элементами* g_{ij}. *Тогда*

$$c_k = \sigma(\mathcal{F}^k_{\{0\}}) \ , \tag{5}$$

где $\mathcal{F}^k_{\{0\}}$ *– множество всех остовных заходящих лесов орграфа* G_0, *состоящих из* $k+1$ *дерева, корнем одного из которых является вершина* 0.

Доказательство. По определению внедиагональные элементы матрицы Лапласа $\mathbf{L_0}$ орграфа G_0 есть минус веса g_{ij}. Для диагональных имеем:

$$(\mathbf{L}_0)_{ii} = \sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{N} g_{ij} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} g_{ij} + g_{i0} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} g_{ij} + \Big(-\sum_{j=1}^{N} g_{ij}\Big) = -g_{ii}.$$

Тем самым

$$\mathbf{L}_0 = -\left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline g_{10} & & & & \\ g_{20} & & & \mathbf{G} & \\ \vdots & & & & \\ g_{N0} & & & & \end{array}\right). \tag{6}$$

Откуда

$$\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{G}) = \frac{1}{\lambda}\det(\lambda\mathbf{E} + \mathbf{L_0}) = \frac{(-1)^{N+1}}{\lambda}\det((-\lambda)\mathbf{E} - \mathbf{L_0}) \ .$$

При подстановке последнего выражения в (3) со сменой в определителе знака при λ и учитывая, что размер матрицы равен $N+1$, преобразуем равенство к виду

$$\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{G}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{N+1}\lambda^k\sigma(\mathcal{F}^k(G_0)) = \sum_{k=1}^{N+1}\lambda^{k-1}\sigma(\mathcal{F}^k(G_0)).$$

Сдвигая на единицу индекс суммирования, окончательно получаем

$$\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{G}) = \sum_{k=0}^{N}\lambda^k\sigma(\mathcal{F}^{k+1}(G_0)) = \sum_{k=0}^{N}\lambda^k\sigma(\mathcal{F}^k_{\{0\}}) \ .$$

В последнем равенстве мы использовали, что в орграфе G_0 вершина 0 всегда является корнем, тем самым $\mathcal{F}^{k+1}(G_0) = \mathcal{F}^k_{\{0\}}$. □

В частности

$$\det\mathbf{G} = (-1)^N\sigma(\mathcal{F}_{\{0\}}) \ ,$$

где $\sigma(\mathcal{F}_{\{0\}})$ – множество остовных заходящих деревьев орграфа G_0 с корнем в вершине 0.

Пример 1. Пусть $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}$. Эта матрица является матрицей смежности взвешенного орграфа G, изображенного на рис.(1) слева.

Справа изображен соответствующий ему орграф G_0. В соответствии с (5):

$$\det(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{G}) = \lambda^2 + \lambda[g_{12}+g_{10}+g_{21}+g_{20}] + [g_{12}g_{20}+g_{21}g_{20}+g_{10}g_{20}] \ .$$

Подставляя в это выражение веса новых дуг : $g_{10} = -g_{11} - g_{12}$, $g_{20} = -g_{21} - g_{22}$, получаем классической вид характеристического многочлена.

Связь (6) позволяет пересчитывать известные свойства лапласиана в соответствующие утверждения для произвольных квадратных матриц $\mathbf{G}$.

Теорема 2. *(Обобщение теоремы о всех минорах) Пусть* $\mathbf{G}$ *–* $N\times N$ *матрица,* $\mathcal{I} = \{i_1, i_2, \dots i_k\}$ *– множество вычеркиваемых строк, а* $\mathcal{J} = \{j_1, j_2, \dots j_k\}$ *– столбцов, тогда*

$$\det\mathbf{G}(\overline{\mathcal{I}}|\overline{\mathcal{J}}) = (-1)^{N-k}(-1)^{\sum\limits_{m=1}^{k}(i_m+j_m)} \sum_{F\in\mathcal{F}_{\mathcal{I}_0,\mathcal{J}_0}} \varepsilon(p_F)\pi_F \ , \qquad (7)$$

где $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}\cup\{0\}$, $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J}\cup\{0\}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{I}_0,\mathcal{J}_0}$ *– множество* $(k+1)$*-компонентных остовных заходящих лесов орграфа* G_0*, корнями деревьев которых являются только вершины из* $\mathcal{I}_0$*, причём каждое дерево содержит ровно одну вершину из* $\mathcal{J}_0$*.* $\varepsilon(p_F)$ *– четность перестановки индексов* p_F *порождаемой лесом* $F\in\mathcal{F}_{\mathcal{I}_0,\mathcal{J}_0}$*.*

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что в силу (6)

$$\det\mathbf{G}(\overline{\mathcal{I}}|\overline{\mathcal{J}}) = (-1)^{N-k}\det\mathbf{L}_0(\overline{\mathcal{I}}_0|\overline{\mathcal{J}}_0) \qquad (8)$$

и воспользоваться (4). Поскольку из вершины 0 дуги не исходят в орграфе G_0, то в любом его остовном лесе F перестановка p_F не затрагивает индекс 0 и $i_0 = j_0 = 0$, поэтому в (7) суммирование в показателе степени при (-1) по-прежнему ведётся от единицы. $\square$

В частности, для главных миноров

$$\det\mathbf{G}(\overline{\mathcal{I}}) = (-1)^{N-|\mathcal{I}|}\sigma(\mathcal{F}_{\mathcal{I}_0}), \qquad (9)$$

где $\mathcal{F}_{\mathcal{I}_0}$ – множество $(|\mathcal{I}|+1)$-компонентных остовных заходящих лесов орграфа G_0, корнями которых являются вершины из $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}\cup\{0\}$.

Лемма 1. *Характеристический многочлен матрицы* $\mathbf{G}(\overline{\mathcal{I}})$ *представляется в виде*

$$\det\left(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{G}(\overline{\mathcal{I}})\right) = \sum_{k=0}^{N-|\mathcal{I}|} \lambda^k \sigma(\mathcal{F}^k_{\mathcal{I}_0}) \ , \tag{10}$$

где $\mathcal{F}^k_{\mathcal{I}_0}$ *– множество* $(|\mathcal{I}|+1+k)$*-компонентных остовных заходящих лесов орграфа* G_0*, в которых все вершины множества* $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I} \cup \{0\}$ *являются корнями; оставшиеся* k *корней – произвольные, не совпадающие с ними.*

Доказательство. Для произвольной квадратной матрицы $\mathbf{A}$ порядка M коэффициенты при степенях λ^k в характеристическом многочлене $\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})$ равны, с точностью до множителя $(-1)^{M-k}$, сумме всех главных миноров порядка k. Если в качестве матрицы $\mathbf{A}$ выступает матрица $\mathbf{G}(\overline{\mathcal{I}})$, порядок которой равен $N - |\mathcal{I}|$, то

$$\det\left(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{G}(\overline{\mathcal{I}})\right) = \sum_{k=0}^{N-|\mathcal{I}|} \lambda^k \left[(-1)^{N-|\mathcal{I}|-k} \sum_{\substack{|\mathcal{K}|=k,\\ \mathcal{K}\cap\mathcal{I}=\varnothing}} \det \mathbf{G}(\overline{\mathcal{I}\cup\mathcal{K}})\right].$$

Здесь множество $\mathcal{K}$ автоматически не содержит нулевую вершину, поскольку матрица $\mathbf{G}$ не имеет нулевого индекса. Учитывая (9), это выражение преобразуется к виду

$$\sum_{l=0}^{N-|\mathcal{I}|} \lambda^k \left[\sum_{\substack{|\mathcal{K}|=k,\\ \mathcal{K}\cap\mathcal{I}=\varnothing}} \sigma(\mathcal{F}_{\{0\}\cup\mathcal{I}\cup\mathcal{K}})\right] = \sum_{k=0}^{N-|\mathcal{I}|} \lambda^k \sigma\left(\bigcup_{\substack{|\mathcal{K}|=k,\\ \mathcal{K}\cap\mathcal{I}=\varnothing}} \mathcal{F}_{\{0\}\cup\mathcal{I}\cup\mathcal{K}}\right).$$

Всякий лес из объединения, стоящего в аргументе σ, состоит из $(|\mathcal{I}|+k+1)$ дерева, причём корни $(|\mathcal{I}|+1)$ из их них заведомо известны – это все вершины множества $\mathcal{I}_0$. Оставшиеся k корней – произвольные, не совпадающие с ними. Поэтому в используемых обозначениях $\bigcup\limits_{\substack{|\mathcal{K}|=k,\\ \mathcal{K}\cap\mathcal{I}=\varnothing}} \mathcal{F}_{\{0\}\cup\mathcal{I}\cup\mathcal{K}} = \mathcal{F}^k_{\mathcal{I}_0}$, а значит выполнено (10). □

§4. Компоненты собственных векторов в древовидной структуре

Теорема 3. *Пусть* λ *– собственное число* $N \times N$ *матрицы* $\mathbf{G}$ *алгебраической кратности* 1, $\vec{v}$ *– соответствующий ему собственный* *вектор. Тогда найдётся такая компонента v_i этого вектора, что с точностью до множителя*

$$v_i = \sum_{l=0}^{N-1} \lambda^l \sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}) \ , \quad v_j = \sum_{l=0}^{N-2} \lambda^l \sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(j \to i)), \ \textit{при } j \neq i. \qquad (11)$$

Здесь $\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}$ – Множество $(l+2)$-компонентных остовных лесов орграфа G_0, причем вершины 0 и i являются корнями. $\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(j \to i)$ – его подмножество, в лесах которого i достижима из j.

Замечание 1. При транспонировании матрицы направления дуг изменяются, то есть вершины i и j меняются ролями, Поэтому в условиях последней теоремы компоненты собственного вектора $\vec{u}$ матрицы $\mathbf{G}^T$ в терминах того же орграфа G_0 с точностью до множителя равны

$$u_i = \sum_{l=0}^{N-1} \lambda^l \sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}), \quad u_j = \sum_{l=0}^{N-2} \lambda^l \sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,j\}}(i \to j)) \quad \text{при } j \neq i. \qquad (12)$$

Доказательство. Пусть λ – собственное число матрицы $\mathbf{G}$ единичной кратности. Для определения компонент соответствующего собственного вектора $\vec{v}$ необходимо решить стандартную систему

$$(\mathbf{G} - \lambda \mathbf{E})\vec{v} = \vec{0}. \qquad (13)$$

Однородная система (13) имеет ранг $N-1$. Все её решения пропорциональны вектору, составленному из алгебраических дополнений элементов любой строки, в которой есть хотя бы один ненулевой минор порядка $N-1$. Действительно, вектор $\vec{v}$ алгебраических дополнений такой строки отличен от нуля. Пусть для определённости строка с ненулевым минором имеет индекс i. Умножая скалярно $\vec{v}$ на i-ую строку матрицы $\mathbf{G} - \lambda\mathbf{E}$ получаем определитель этой матрицы, который равен нулю, а умножая $\vec{v}$ на любую другую строку, получаем ноль по свойству алгебраических дополнений.

Выражение для алгебраического дополнения соответствующего диагонального элемента матрицы системы (13) получается из (10) при $\mathcal{I} = \{i\}$:

$$\begin{aligned} \det\left(\mathbf{G}(\overline{\{\mathbf{i}\}}) - \lambda\mathbf{E}\right) &= (-1)^{N-1} \det\left(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{G}(\overline{\{i\}})\right) \\ &= (-1)^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \lambda^l \sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}). \end{aligned} \qquad (14)$$

Алгебраические дополнения внедиагональных элементов матрицы $\mathbf{G}-\lambda\mathbf{E}$ впрямую неудобны для вычисления, поскольку после вычеркивания i-ой строки и j-го столбца, параметр λ оказывается не только на главной диагонали, но и вне её. Пусть для определённости $j<i$. Искомое алгебраическое дополнение удобно представить в виде крамеровского минора, который обозначим Δ'_j. Он совпадает с определителем Δ матрицы, получающейся из матрицы $(\mathbf{G}(\overline{\{i\}})-\lambda\mathbf{E})$ заменой столбца с индексом j (в нумерации исходной матрицы) на i-ый столбец с изменением знака:

$$\Delta=\begin{vmatrix} g_{11}-\lambda & \cdots & -g_{1i} & \cdots & g_{1i-1} & g_{1i+1} & \cdots & g_{1N}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ g_{j1} & \cdots & -g_{ji} & \cdots & g_{ji-1} & g_{ji+1} & \cdots & g_{jN}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ g_{i-11} & \cdots & -g_{i-1i} & \cdots & g_{i-1i-1}-\lambda & g_{i-1i+1} & \cdots & g_{i-1N}\\ g_{i+11} & \cdots & -g_{i+1i} & \cdots & g_{i+1i-1} & g_{i+1i+1}-\lambda & \cdots & g_{i+1N}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ g_{N1} & \cdots & -g_{Ni} & \cdots & g_{Ni-1} & g_{Ni+1} & \cdots & g_{NN}-\lambda \end{vmatrix}$$

Действительно, если переставить столбец с измененным знаком на “своё” i-ое место, потребуется $(i-j-1)$ транспозиция, что приводит к появлению множителя $(-1)^{i-j-1}$. Меняя теперь знак этого столбца, получаем минор матрицы $(\mathbf{G}-\lambda\mathbf{E})$, соответствующий удалению i-ой строки и j-го столбца. Тем самым, определитель Δ равен этому минору с множителем $(-1)^{i-j}=(-1)^{i+j}$, то есть совпадает с алгебраическим дополнением элемента $(\mathbf{G}-\lambda\mathbf{E})_{ij}$.

Коэффициенты при степенях $(-\lambda)$ в этом определителе представляют собой сумму главных миноров матрицы

$$\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1j-1} & -g_{1i} & g_{1j+1} & \cdots & g_{1i-1} & g_{1i+1} & \cdots & g_{1N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ g_{j1} & \cdots & g_{jj-1} & -g_{ji} & g_{jj+1} & \cdots & g_{ji-1} & g_{ji+1} & \cdots & g_{jN}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ g_{i-11} & \cdots & g_{i-1j-1} & -g_{i-1i} & g_{i-1j+1} & \cdots & g_{i-1i-1} & g_{i-1i+1} & \cdots & g_{i-1N}\\ g_{i+11} & \cdots & g_{i+1j-1} & -g_{i+1i} & g_{i+1j+1} & \cdots & g_{i+1i-1} & g_{i+1i+1} & \cdots & g_{i+1N}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ g_{N1} & \cdots & g_{Nj-1} & -g_{Ni} & g_{Nj+1} & \cdots & g_{Ni-1} & g_{Ni+1} & \cdots & g_{NN} \end{pmatrix}$$

соответствующего порядка, но не всех, а только тех, которые включают порядковый номер j, поскольку из элемента $-g_{ji}$, который теперь стоит на пересечении j-го столбца и j-ой строки в Δ'_j после замены столбцов, λ не вычитается. В частности, это приводит к тому, что максимальная степень полинома оказывается равной $N-2$. Сама же эта матрица отличается от матрицы $\mathbf{G}(\overline{\{i\}}|\overline{\{j\}})$ тем, что i-ый столбец стоит на месте j-го и имеет противоположный знак. Тем самым, требуемые миноры совпадают с точностью до знака с подходящими минорами матрицы $\mathbf{G}(\overline{\{i\}}|\overline{\{j\}})$, или, более полно – с минорами самой матрицы $\mathbf{G}$. Требуется лишь аккуратно проследить за знаком. Именно, чтобы получить каждый минор при $(-\lambda)^l$, $l = 0, 1, \ldots, N-2$, необходимо вычеркнуть из матрицы $\mathbf{G}(\overline{\{i\}}|\overline{\{j\}})$ строки и столбцы с номерами из произвольного l-элементного множества $\mathcal{R}$, такого что $\mathcal{R} \cap \{j, i\} = \varnothing$. Затем переставить i-ый столбец на j-ое место, изменить у него знак и взять определитель. Пусть множество $\mathcal{R}$ состоит из индексов $r_1, r_2, \ldots, r_l$, занумерованных в порядке возрастания, причём r_s – минимальный индекс, который больше j, а r_t – максимальный индекс, который меньше i. Если $s > t$, то между j и i нет вычёркиваемых строк и столбцов. В этом случае требуется $i-j-1$ транспозиция, чтобы переставить i-ый столбец на j-ое место. При $s \leqslant t$, число необходимых транспозиций уменьшается на величину $t-s+1$. Каждая транспозиция меняет знак определителя, еще один минус возникает при изменении знака переносимого столбца. Таким образом, миноры при $(-\lambda)^l$ равны

$$-(-1)^{i-j-1-(t-s+1)\theta(t-s+1)} \det \mathbf{G}(\overline{\mathcal{R} \cup \{i\}}|\overline{\mathcal{R} \cup \{j\}}), \qquad (15)$$

где $\theta(\,\cdot\,)$ – функция Хевисайда: $\theta(x) = 1$, при $x > 0$ и $\theta(x) = 0$, если $x \leqslant 0$. В соответствии с обобщением теоремы о всех минорах (7)

$$\det \mathbf{G}(\overline{\mathcal{R} \cup \{i\}}|\overline{\mathcal{R} \cup \{j\}}) = (-1)^{N-l-1}(-1)^{i+j} \sum_{F \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}_0 \cup \{i\}, \mathcal{R}_0 \cup \{j\}}} \varepsilon(p_F)\pi_F, \quad (16)$$

где $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R} \cup \{0\}$. Определим четности перестановок $\varepsilon(p_F)$, порождаемой лесами из множества $\mathcal{F}_{\mathcal{R}_0 \cup \{i\}, \mathcal{R}_0 \cup \{j\}}$. Во всяком лесе из указанного множества каждая вершина из множества $\mathcal{R}_0 \cup \{j\}$ должна оказаться ровно в одном дереве, корнями которого являются вершины из $\mathcal{R}_0 \cup \{i\}$. Если $s \leqslant t$, запишем перестановку p_F в индексах исходной матрицы:

$$p_F = \begin{pmatrix} O & r_1 & \ldots & r_{s-1} & j & r_s & \ldots & r_t & \ldots & r_l \\ O & r_1 & \ldots & r_{s-1} & i & r_s & \ldots & r_t & \ldots & r_l \end{pmatrix}.$$

Здесь, в нижней строке указаны вершины, являющиеся корнями деревьев, а в верхней – вершины, которые должны принадлежать деревьям с указанными корнями. Номера в верхней строке последовательно возрастают. В нижней же строке, номер i больше последующих номеров $r_s, \ldots, r_t$. То есть перестановка содержит $t-s+1$ беспорядков. Если

$s > t$, то между индексами j и i нет номеров из $\mathcal{R}$, а сама перестановка чётная. Тем самым

$$\varepsilon(p_F) = (-1)^{(t-s+1)\theta(t-s+1)}. \tag{17}$$

Заметим, что в любом лесе их множества $\mathcal{F}_{\mathcal{R}_0\cup\{i\},\mathcal{R}_0\cup\{j\}}$ вершина j принадлежит дереву с корнем в вершине i, поэтому

$$\bigcup_{\substack{|\mathcal{R}|=l \\ \{i,j\}\cap\mathcal{R}=\varnothing}} \mathcal{F}_{\mathcal{R}_0\cup\{i\},\mathcal{R}_0\cup\{j\}} = \mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(j\to i)\ . \tag{18}$$

Собирая (15),(16),(17) и учитывая (18), получаем, что коэффициент при $(-\lambda)^l$ равен

$$(-1)^{N-l-1}\sum_{F\in\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(j\to i)} \pi_F\ ,$$

а искомое алгебраическое дополнение принимает вид

$$\Delta'_j = (-1)^{N-1}\sum_{l=0}^{N-2}\lambda^l\sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(j\to i)),$$

что вместе с (14) даёт (11). □

Полученные параметрические формулы верны для любых матриц, в том числе и тех, которые сами представляют из себя лапласиан некоторого орграфа. В этом случае сумма элементов любой строки равна нулю (и введение дополнительной вершины не требуется), а внедиагональные элементы есть минус веса дуг орграфа (что в формулах приводит к изменению знака при λ). Поэтому справедлива

Теорема 4. *Пусть G – орграф без петель, со взвешенными смежностями g_{ij}, $\mathbf{L}$ – его матрица Лапласа, $\vec{v}$ – собственный вектор лапласиана, соответствующий собственному числу λ алгебраической кратности* 1. *Тогда найдётся такая компонента v_i этого вектора, что с точностью до множителя*

$$v_i = \sum_{l=0}^{N-1}(-\lambda)^l\sigma(\mathcal{F}^l_{\{i\}})\ ,\quad v_j = \sum_{l=0}^{N-2}(-\lambda)^l\sigma(\mathcal{F}^l_{\{i\}}(j\to i)),\ \text{при } j\neq i, \tag{19}$$

где $\mathcal{F}^l_{\{i\}}$ – множество $(l+1)$-компонентных остовных лесов орграфа G, причем вершина i является корнем. $\mathcal{F}^l_{\{i\}}(j\to i)$ – его подмножество, в лесах которого вершина i достижима из j.

Доказательство. Требуемый результат получается, если в (13) в качестве исходной матрицы выступает не произвольная матрица $\mathbf{G}$, характеристический многочлен которой описывается (5), а лапласиан $\mathbf{L}$, для которого выполнено (3). Дословно повторяя рассуждения Теоремы 3 с заменой формул (9) для миноров матрицы $\mathbf{G}$ на соответствующие формулы (2) для миноров $\mathbf{L}$, приходим к (19). □

Замечание 2. Аналогично предыдущему замечанию, для компонент собственного вектора $\vec{u}$ матрицы $\mathbf{L}^T$, транспонированной лапласиану, в условиях последней теоремы, имеем с точностью до множителя

$$u_i = \sum_{l=0}^{N-1}(-\lambda)^l\sigma(\mathcal{F}^l_{\{i\}}), \quad u_j = \sum_{l=0}^{N-2}(-\lambda)^l\sigma(\mathcal{F}^l_{\{j\}}(i\to j)) \text{ при } j\neq i. \tag{20}$$

§5. Вывод крамеровских определителей, не использующий формулу всех миноров

Полученное выражение

$$\Delta'_j = (-1)^{N-1}\sum_{l=0}^{N-2}\lambda^l\sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(j\to i)) \tag{21}$$

для алгебраических дополонений внедиагональных элементов $(\mathbf{G}-\lambda\mathbf{E})_{ij}$ связано с “почти” главными минорами, когда ровно один столбец заменён другим. Вывод формулы (21) получен применением теоремы о всех минорах (точнее, её обобщения (7)). Известные выводы самой формулы всех миноров достаточно громоздки. Существенно проще выводится более слабый факт – формула для главных миноров (2). Последовательная замена в главных минорах одних столбцов другими приводит к произвольным минорам. Тем самым, если получить выражение (21) независимо (именно из (2)), то это практически эквивалентно доказательству самой формулы всех миноров, с точностью до того, что процедуру замены столбцов необходимо осуществить несколько раз и сосчитать накапливаемое число беспорядков (при однократной замене столбца оно подсчитано в Теореме 3).

Предлагаемый ниже вывод (21), несмотря на свою техническую сложность, достаточно “нагляден” в смысле графовой интерпретации, поскольку впрямую показывает, как меняется орграф и свойства его остовных лесов при замене дуг, заходящих в одну вершину, на дуги, заходящие в другую, и наоборот. Приведём соответствующее доказательство равенства (21).

Доказательство. Введём вспомогательный орграф H, который получается из орграфа G заменой всех дуг (включая петли), заходящих в вершину i на дуги заходящие в j, и наоборот. В матрице смежности это эквивалентно перемене мест столбцов i и j. Орграф H_0 создаётся по тому же правилу, что и G_0. В терминах орграфа H после выноса знака из j-го столбца искомый определитель Δ'_j приобретает вид

$$-\begin{vmatrix} h_{11}-\lambda & \cdots & h_{1j} & \cdots & h_{1i-1} & h_{1i+1} & \cdots & h_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{j1} & \cdots & h_{jj} & \cdots & h_{ji-1} & h_{ji+1} & \cdots & h_{jN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{i-11} & \cdots & h_{i-1j} & \cdots & h_{i-1i-1}-\lambda & h_{i-1i+1} & \cdots & h_{i-1N} \\ h_{i+11} & \cdots & h_{i+1j} & \cdots & h_{i+1i-1} & h_{i+1i+1}-\lambda & \cdots & h_{i+1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & \cdots & h_{Nj} & \cdots & h_{Ni-1} & h_{Ni+1} & \cdots & h_{NN}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Добавляя и вычитая λ из диагонального элемента h_{jj}, представим определитель в виде

$$\Delta'_j = -\left[\det\left(\mathbf{H}(\overline{\{i\}}) - \lambda\mathbf{E}\right) + \lambda\det\left(\mathbf{H}(\overline{\{i,j\}}) - \lambda\mathbf{E}\right)\right]$$

$$= -(-1)^{N-1}\det\left(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{H}(\overline{\{i\}})\right) - (-1)^{N-2}\lambda\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{H}(\overline{\{i,j\}}))\ .$$

Поскольку $\mathbf{H}(\overline{\{i,j\}}) = \mathbf{G}(\overline{\{i,j\}})$, имеем

$$(-1)^{N-1}\Delta'_j = \lambda\det\left(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{G}(\overline{\{i,j\}})\right) - \det\left(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{H}(\overline{\{i\}})\right). \qquad (22)$$

С учётом Леммы 1, первый член в последнем выражении равен

$$\lambda\det\left(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{G}(\overline{\{i,j\}})\right)$$
$$= \lambda\sum_{l=0}^{N-2}\lambda^l\sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i,j\}}(G_0)) = \sum_{l=1}^{N-1}\lambda^l\sigma(\mathcal{F}^{l-1}_{\{0,i,j\}}(G_0)), \qquad (23)$$

где коэффициенты σ при степенях λ представляют собой суммы по остовным лесам орграфа G_0. Второе же слагаемое в (22) отвечает вспомогательному орграфу H_0:

$$\det\left(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{H}(\overline{\{i\}})\right) = \sum_{l=0}^{N-1} \lambda^l \sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(H_0)). \qquad (24)$$

В этом выражении необходимо перейти от сумм по остовным захо-

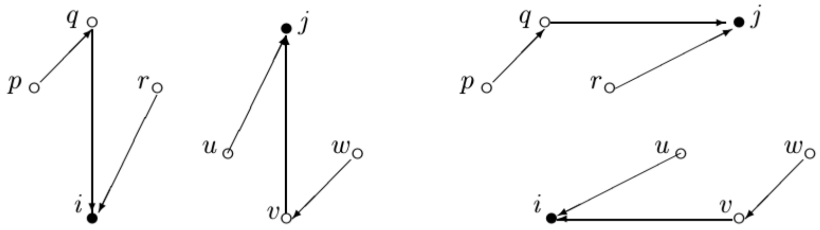

Рис. 2. Взаимная замена дуг, заходящих в корневые вершины i и j. Слева – исходный лес; справа – лес, после замены. Заменённые дуги: (q,i) на (q,j), (r,i) на (r,j), (u,j) на (u,i), (v,j) на (v,i). Получившийся орграф – по-прежнему лес, с тем же числом деревьев.

дящим лесам вспомогательного орграфа H_0 к соответствующей сумме, отвечающей подграфам G_0. Заметим, что множество $\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(H_0)$ разбивается на два непересекающихся подмножества, одним из которых является множество $\mathcal{F}^{l-1}_{\{0,i,j\}}(H_0)$, во всех лесах которого вершина j – корень (при $l = 0$ это множество пустое), а другим – множество $\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(H_0, j \to)$, в каждом лесе которого из вершины j исходит дуга (это множество пустое при $l = N-1$). При этом, $\sigma(\mathcal{F}^{l-1}_{\{0,i,j\}}(H_0)) = \sigma(\mathcal{F}^{l-1}_{\{0,i,j\}}(G_0))$, поскольку H и G (и, соответственно, H_0 и G_0) отличаются лишь взаимной заменой дуг (вместе с весами), заходящих в i и j, а в ситуации, когда обе эти вершины – корни, при такой замене петли в рассмотрение не попадают и лес остаётся лесом с тем же количеством корней (см. рис. 2).

Поэтому (24) переписывается в виде

$$\det\left(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{H}(\overline{\{i\}})\right) = \sum_{l=1}^{N-1} \lambda^l \sigma(\mathcal{F}^{l-1}_{\{0,i,j\}}(G_0)) + \sum_{l=0}^{N-2} \lambda^l \sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(H_0, j \to)).$$

Тем самым, с учетом (23), выражение (22) принимает вид

$$(-1)^{N-1}\Delta'_j = -\sum_{l=0}^{N-2} \lambda^l \sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(H_0, j \to)) \ . \tag{25}$$

Множество лесов $\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(H_0, j \to)$ разбивается на два непересекающих-

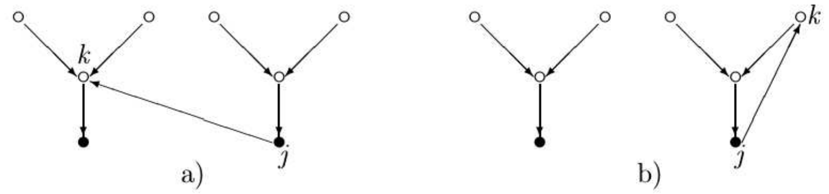

Рис. 3. Добавление дуги (j,k) к лесу, в котором вершина j корневая. Слева – вершина k не принадлежала дереву с корнем в j, орграф остаётся лесом, число деревьев уменьшается на 1. Справа – вершина k принадлежала дереву с корнем в j. Число компонент орграфа не изменяется. Возникает цикл включающий вершину j.

ся множества – множество $\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(H_0,(j,i))$, в каждом лесе которого есть дуга (j,i), и множество $\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(H_0, j \to, \overline{(j,i)})$, ни в каком лесе которого дуги (j,i) нет и вершина j не является корнем. Это последнее множество, в свою очередь, разбивается на два не пересекающихся – множество $\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(H_0, \overline{(j,i)}, j \to i)$, в каждом лесе которого i достижима из j, и множество $\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(H_0, j \to, j \nrightarrow i)$, ни в одном лесе которого i не достижима из j, но дуга из вершины j исходит. Таким образом, коэффициент при λ^l в (25) равен

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(H_0, j \to)) &= \sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(H_0,(j,i))) \\ &+ \sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(H_0, j \to, j \nrightarrow i)) + \sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(H_0, \overline{(j,i)}, j \to i)).\end{aligned} \tag{26}$$

Рассмотрим каждое слагаемое в (26) по отдельности. В первом слагаемом естественно вынести за сумму σ вес h_{ji}. Само же удаление дуги (j,i) из леса приводит к тому, что вершина j становится корнем, поэтому

$$\sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(H_0,(j,i))) = h_{ji}\sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i,j\}}(H_0)) = g_{jj}\sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i,j\}}(G_0)).$$

Здесь мы использовали, что $\sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i,j\}}(H_0)) = \sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i,j\}}(G_0))$, а также, что по построению $h_{ji} = g_{jj}$. Поскольку $\sum\limits_{k=0}^{N} g_{jk} = 0$, имеем

$$\sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(H_0,(j,i))) = -\left(\sum_{k=0,k\neq j}^{N} g_{jk}\right)\sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i,j\}}(G_0)). \tag{27}$$

Теперь необходимо внести веса g_{jk} в суммы σ. Внесение множителя g_{jk} означает добавление дуги (j,k) к каждому лесу F из $\mathcal{F}^l_{\{0,i,j\}}$. Если в таком лесе $k \nrightarrow j$, то он превращается в некоторый лес из множества $\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(j\to)$ (см. рис. 3 a). Если же в лесе F вершина j достижима из k, то добавление дуги (j,k) приводит к $(l+3)$-компонентному орграфу, в котором $(l+2)$ компоненты представляют собой деревья (корни двух их них – вершины $0,i$) и одна компонента содержит единственный цикл и этот цикл включает вершину j. При этом из каждой вершины орграфа по прежнему исходит не более одной дуги (см. рис. 3 b). Обозначим множество таких орграфов через $\mathcal{Q}$ (в итоговые формулы оно вклада не даёт, поэтому нет причин для его специальной индексации). Тем самым, (27) переписывается в виде

$$\sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(H_0,(j,i))) = -\sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(G_0,j\to)) - \sigma(\mathcal{Q}). \tag{28}$$

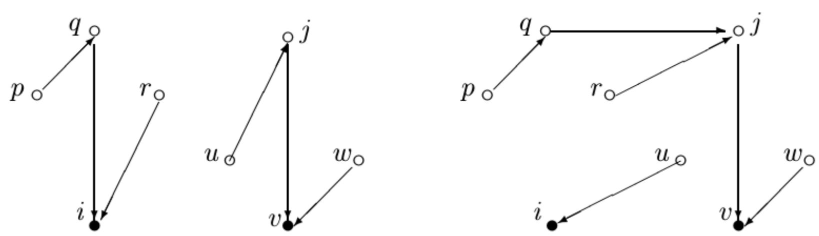

Рис. 4. Взаимная замена дуг, заходящих в корневую вершину i и некорневую вершину j, которая не принадлежит дереву с корнем в i. Слева – исходный лес; справа – лес, после замены. Заменённые дуги: (q,i) на (q,j), (r,i) на (r,j), (u,j) на (u,i). Получившийся орграф – по-прежнему лес, с тем же числом деревьев.

Перейдём ко второму слагаемому в (26). Поскольку $j \nrightarrow i$, то замена дуг, заходящих в i, на дуги, заходящие в j и наоборот, не изменяет тип орграфа (см. рис. 4). Таким образом,

$$\sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(H_0, j \rightarrow, j \nrightarrow i)) = \sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(G_0, j \rightarrow, j \nrightarrow i)). \qquad (29)$$

Рассмотрим третье слагаемое в (26). В любом лесе из $\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(\overline{(j,i)}, j \rightarrow i)$

Рис. 5. Взаимная замена дуг, заходящих в корневую вершину i и некорневую вершину j, которая принадлежит дереву с корнем в i. Слева – до переориентации; справа – получившийся орграф. Заменены дуги: (r,i) на (r,j), (t,i) на (t,j), (u,j) на (u,i), (v,j) на (v,i). Итоговый орграф содержит единственный цикл. Этот цикл включает вершину j. Число компонент орграфа возросло на 1.

замена дуг, заходящих в i, на дуги, заходящие в j и наоборот, приводит к тому (см. рис 5), что возникает $(l+3)$-компонентный орграф, в котором $(l+2)$ компоненты – деревья и два из них имеют корнями вершины 0 и i, орграф содержит ровно один цикл, включающий вершину j, и из каждой вершины исходит не более одной дуги. Значит, такой орграф принадлежит множеству $\mathcal{Q}$ и

$$\sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(H_0, \overline{(j,i)}, j \rightarrow i)) = \sigma(\mathcal{Q}). \qquad (30)$$

Подставим (28)–(30) в (26):

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(H_0, j \rightarrow)) &= -\sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(G_0, j \rightarrow)) - \sigma(\mathcal{Q})\\ &+ \sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(G_0, j \rightarrow, j \nrightarrow i)) + \sigma(\mathcal{Q}) = -\sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(G_0, j \rightarrow i)).\end{aligned}$$

Здесь мы использовали, что если из всех лесов, в которых вершина j не является корнем, удалить леса, в которых вершина i из j недостижима, то останутся леса, в которых i достижима из j . Подставив последнее выражение в (25), окончательно получаем

$$\Delta'_j = (-1)^{N-1} \sum_{l=0}^{N-2} \lambda^l \sigma(\mathcal{F}^l_{\{0,i\}}(G_0, j \to i)). \qquad \square$$

§6. Применение лапласиана орграфа к цепям Маркова и состояние убивания

Пусть $\mathbf{P}(t)$ – матрица переходных вероятностей за время t однородной цепи Маркова с числом состояний N, а

$$\mathbf{Q} = \lim_{t \searrow 0} \frac{\mathbf{P}(t) - \mathbf{E}}{t}$$

– матрица интенсивностей, управляющая процессом

$$\dot{\vec{x}} = \vec{x}\mathbf{Q}. \tag{31}$$

Этой цепи соответствует N-вершинный орграф (переходов) G без петель, в котором присутствуют только те дуги (i,j), $i \neq j$, для которых $q_{ij} > 0$. Вес дуги g_{ij} полагается равным соответствующей интенсивности: $g_{ij} = q_{ij}$. Очевидно, что для матрицы Лапласа $\mathbf{L}$ построенного орграфа выполнено $\mathbf{L} = -\mathbf{Q}$. При этом, матрица смежности орграфа переходов, очевидно, не совпадает с $\mathbf{Q}$ – отличие в главной диагонали, которая у орграфа без петель нулевая. Конечно, можно было бы считать, что у орграфа петли есть и их веса равны диагональным элементам матрицы интенсивностей, но в этом нет практического смысла при отсутствии убивания.

Если $\mathbf{P}$ – стохастическая матрица, то есть матрица перехода за один шаг, соответствующая однородной конечной цепи Маркова с дискретным временем, то матрица $\mathbf{Q} = \mathbf{P} - \mathbf{E}$ есть её дискретная производная и в этом смысле является матрицей интенсивностей. Орграф (переходов) G без петель определяем аналогично: дуга (i,j), $i \neq j$, присутствует в орграфе тогда и только тогда, когда $p_{ij} > 0$, вес g_{ij} полагается равным соответствующей вероятности $g_{ij} = p_{ij} = q_{ij}$. Для матрицы Лапласа построенного орграфа также выполнено: $\mathbf{L} = -\mathbf{Q}$.

Нормированный на единичную сумму компонент левый собственный вектор матрицы $\mathbf{L}$, отвечающий нулевому собственному числу, совпадает со стационарным распределением как для случая непрерывного времени, так и для дискретного. Согласно (20) он равен с точностью до множителя

$$u_i = \sigma(\mathcal{F}_{\{i\}}), \quad u_j = \sigma(\mathcal{F}_{\{j\}}(i \to j)) \ ,$$

где $\mathcal{F}_{\{i\}}$ – множество остовных деревьев с корнем в i, что, в частности, означает, что все вершины орграфа, принадлежащего $\mathcal{F}_{\{i\}}$, находятся в единственном дереве. Таким образом, множество $\mathcal{F}_{\{j\}}(i \to j)$, состоящее из деревьев, в которых есть путь из i в j, совпадает с $\mathcal{F}_{\{j\}}$. Приводя вектор к единичной сумме компонент, получаем

$$u_i = \frac{\sigma(\mathcal{F}_{\{i\}})}{\sum\limits_j \sigma(\mathcal{F}_{\{j\}})} \ , \qquad i = 1, 2, \dots N \ . \tag{32}$$

Впервые этот результат был получен Вентцелем и Фрейдлином [8]. Алгоритм нахождения остовных деревьев, дающих максимальный вклад, для случая весов, возникающих из потенциала, изложен в [13].

Если матрица Лапласа $\mathbf{L}$ имеет базис из собственных векторов, то эволюцию одномерных распределений (31) можно разложить по левым $\vec{u}_i$ и правым $\vec{v}_i$ собственным векторам, нормировка которых составляет дуальный базис [9, 10]:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{-\mathbf{L}t} = \sum_i e^{-\lambda_i t}(\vec{x}_0, \vec{v}_i)\vec{u}_i, \ (\vec{u}_i, \vec{v}_j) = \delta_{ij}. \tag{33}$$

В случае, когда все собственные числа имеют алгебраическую кратность 1, такое представление заведомо есть. Предельное распределение описывается формулой (32).

При наличии убивания процесса внедиагональные элементы матрицы интенсивностей $\mathbf{Q}$ по-прежнему неотрицательны, но сумма элементов строки меньше нуля. То, насколько эта величина меньше нуля, и есть интенсивность убивания. Строго говоря, $\mathbf{Q}$ не является классической матрицей интенсивностей, но она по-прежнему есть управляющая матрица процесса вида (31), в котором сумма компонент не сохраняется, а убывает. Такому процессу уже не может соответствовать орграф порядка N без петель, поскольку в нём негде "прописать" интенсивность убивания. Поэтому либо надо вводить петли, что всё равно не позволяет пользоваться матрицей Лапласа, либо расширять порядок орграфа, учтя состояние убивания. Если ввести состояние убивания (индексируем его через 0), с интенсивностями убивания $q_{i0} = -\sum\limits_{j=1}^{N} q_{ij}$, то расширенная матрица

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline q_{10} & & & & \\ q_{20} & & & \mathbf{Q} & \\ \vdots & & & & \\ q_{N0} & & & & \end{array}\right) \tag{34}$$

обладает свойствами классической матрицы интенсивностей: внедиагональные элементы неотрицательны и сумма элементов строки равна нулю: $\sum_{j=0}^{N} q_{ij} = 0$. Ей соответствует $(N+1)$-вершинный орграф переходов G_0 без петель. Веса g_{ij} его дуг равны: $g_{ij} = q_{ij}$, $i, j \neq 0$, $g_{i0} = -\sum_{j=1}^{N} q_{ij} = -\sum_{j=1}^{N} g_{ij}$. Его матрица Лапласа $\mathbf{L}_0$ совпадает с точностью до знака с (34). Именно эти вероятностные соображения положены в пункте 3 за основу преобразования орграфа с петлями в расширенный орграф без петель, которое приводит к связи матрицы смежности и матрицы Лапласа (6). Само такое преобразование матриц (орграфов) уже не связано с вещественностью коэффициентов.

С добавлением состояния убивания, увеличенный на одну компоненту вектор распределения будет эволюционировать согласно уравнению (31) с заменой $\mathbf{Q}$ на матрицу (34), которая равна $-\mathbf{L}_0$. Его решение будет иметь вид (33) с увеличением размерности на единицу. Собственные числа и компоненты расширенных собственных векторов определяются по формулам (3), (19), (20), в которых следует учесть, что добавлена новая вершина, отвечающая нулевому индексу, и что она всегда является корнем. Можно обойтись и без расширения размерности уравнения (31). Для этого следует просто положить $\mathbf{G} = \mathbf{Q}$ и воспользоваться формулами для спектра (11),(12), в которых фиктивная нулевая вершина всё равно фигурирует как вершина расширенного орграфа G_0, но уже не является индексом матрицы.

Полученные параметрические формулы для собственных векторов для случая, когда все собственные числа имеют алгебраическую кратность 1, позволяют описать эволюцию полностью.

Литература

1. D. Cvetkovič , M.Doob, H.Sachs, *Spectra of Graphs: Theory and Application.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschlaften, Berlin 1980.
2. У. Татт, *Теория графов.* М., Мир 1988.

3. P. Chebotarev, R. Agaev, *Forest matrices around the Laplacian matrix.* — Linear Algebra and its Applications **356** (2002) 253–274.
4. M.Fiedler, J.Sedlaček, *O w-basich orientirovanych grafu.* — Časopis Pěst. Mat. **83** (1958), 214–225.
5. S. Chaiken, *A combinatorial proof of the all minors matrix tree theorem.* — SIAM J. Algebraic Discrete Methods **3**, No. 3 (1982), 319–329.
6. J. W. Moon, *Some determinant expansions and the matrix-tree theorem.* — Discrete Mathematics **124** (1994), 163–171.
7. В. А. Буслов, *О коэффициентах характеристического многочлена лапласиана взвешенного ориентированного графа и теореме о всех минорах.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **427** (2014), 5–21.
8. А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин, *Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений.* М. (1979).
9. В. А. Буслов, *Иерархия марковских подпроцессов в модели дискретных ориентаций.* Кандидатская диссертация, Санкт-Петербург (1992).
10. В. А. Буслов, К. А. Макаров, *Иерархия масштабов времени при малой диффузии.* — ТМФ **76**, No. 2 (1988), 219–230.
11. В. А. Буслов, К. А. Макаров, *Времена жизни и низшие собственные значения оператора малой диффузии.* — Мат. заметки **51**, No. 1 (1992), 20–31.
12. П. Ю. Чеботарёв, Р. П. Агаев, *Матричная теорема о лесах и лапласовские матрицы орграфов.* LAP LAMBERT Academic Publising GmbH Co.Kg (2011).
13. В. А. Буслов, М. С. Богданов, В. А. Худобахшов, *О минимальном остовном дереве для орграфов с потенциальными весами.* — Вестник СПбГУ **10**, No. 3 (2008).

Buslov V. A. On characteristical polinomial and eigenvectors in terms of tree-like structure of the graph.

While considering the square matrix as an adjacency matrix of a weighted digraph we construct an extended digraph, whose laplacian contains the original matrix as a submatrix. This construction allows us to use the known results on laplacians to study arbitrary square matrices. An eigenvector calculation in parametrical form demonstrates a connection between its components and a tree-like structure of the digraph.

С.-Петербургский
государственный Университет,
физический факультет,
ул. Ульяновская, д.3
Старый Петергоф,
198504 Санкт-Петербург
E-mail: abvabv@bk.ru, v.buslov@spbu.ru

Поступило 11 октября 2016 г.