Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 450, 2016 г.

С. Л. Берлов, К. И. Тыщук

О СВЯЗИ МЕЖДУ ХРОМАТИЧЕСКИМ ЧИСЛОМ ГРАФА И КОЛИЧЕСТВОМ ЦИКЛОВ, ПОКРЫВАЮЩИХ ДАННОЕ РЕБРО ИЛИ ВЕРШИНУ

Если $G = (V,\ E)$ – граф, то будем обозначать через:

$|V|$ – число вершин G, а $|E|$ – число ребер;

если $M \subseteq V$, то $G(M)$ – индуцированный подграф графа G, определяемый множеством M и $G \setminus M$ – индуцированный подграф G, определяемый множеством $V \setminus M$;

$d(x)$ (*степень* вершины графа) – количество ребер, содержащих вершину $x \in G$;

$\chi(G)$ – *хроматическое число* G, то есть минимально возможное число цветов по всем правильным раскраскам G;

K_n – полный граф на n вершинах.

§1. Введение

Взаимосвязь хроматического числа графа с другими его характеристиками давно является предметом исследований учёных. Работы [2] и [3] посвящены взаимосвязи хроматического числа графа с его набором длин циклов. В статье [6] установлена связь между хроматическим числом графа и количеством k-критических подграфов, покрывающих любую его вершину для произвольного k. В частности, доказано утверждение, что если любой связный подграф G' графа G содержит вершину x такую, что через x проходит не более d нечетных циклов G', то

$$\chi(G) \leqslant \left] \frac{1 + \sqrt{8d+9}}{2} \right[.$$

В настоящей статье развита теория, позволяющая получить этот результат другим способом, а также ещё ряд результатов про связь между количеством циклов, покрывающих любое ребро или вершину графа и его хроматическим числом.

Ключевые слова: правильная раскраска, хроматическое число.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-01-00563).

В 1943 году Г. Хадвигер [4] высказал гипотезу, что любой граф G с хроматическим числом $\chi(G) = t$ стягиванием рёбер приводится к K_t. В этой же работе это утверждение доказывается для $t = 4$. К. Вагнер [1] доказал, что гипотеза Хадвигера для $t = 5$ равносильна проблеме четырёх красок, а в 1993 году Н. Робертсон, П. Сеймур и Р. Томас [5] доказали гипотезу для $t = 6$, используя проблему четырёх красок. Это доказательство получило премию Фалкерсона в 1994 году. В настоящий момент гипотеза Хадвигера для произвольного t является открытой проблемой. Нетрудно заметить, что при стягивании рёбер количество простых циклов, покрывающих данное ребро или вершину, не увеличивается. Поэтому из гипотезы Хадвигера следует, что любом в графе G с хроматическим числом $\chi(G) = t$ наибольшее количество циклов, покрывающих ребро (вершину) не меньше, чем в K_t. Доказательство этого утверждения и будет основной целью настоящей работы. Основными результатами статьи являются следующие теоремы:

Теорема 1. *Если через любое ребро графа G проходит менее $[e(k-1)!-1]$ простых циклов, то $\chi(G) \leqslant k$.*

Теорема 2. *Если через любую вершину графа G проходит менее $[\frac{ek!}{2} - \frac{k+1}{2}]$ простых циклов, то $\chi(G) \leqslant k$.*

Также получены аналогичные теоремы для $(k+1)$-критических графов. Напомним, что граф G называется *k-критическим*, если его хроматическое число равно k, а любой его собственный подграф $(k-1)$-хроматичен (см [7]). Доказана следующая теорема:

Теорема 3. *Каждая вершина $(k+1)$-критического графа G принадлежит не менее, чем $[\frac{ek!}{2} - \frac{k+1}{2}]$ простым циклам.*

Заметим, что для полного графа на $k+1$ вершинах во всех фигурирующих в основной части статьи леммах и теоремах будет достигаться равенство, поэтому все оценки точны.

§2. Инвариантные множества

Пусть $G = (V, E)$ – (неориентированный) граф, хроматическое число которого больше k. Окрасим в k цветов максимальный по количеству вершин индуцированный подграф $H \subset G$. Пронумеруем цвета числами $1, 2, \ldots, k$. Рассмотрим какую-то неокрашенную вершину

$a \in G \setminus H$. Ясно, что она должна быть смежна с вершинами всех цветов. Рассмотрим вершину $b \in H$, смежную с a. Не умаляя общности можно считать, что вершина b окрашена в цвет 1.

Определение 1. Последовательность цветов $t_1, t_2, \ldots, t_n$ будем называть *чистой*, если $t_1 = 1$ и все t_i при $1 \leqslant i \leqslant n$ попарно различны.

Рассмотрим любую чистую последовательность $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Понятно, что в ней $n \leqslant k$. Сопоставим этой последовательности набор множеств вершин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ графа H, используя следующий алгоритм. Сначала положим $A_1 = \{b\}; A_i = \emptyset$ при $2 \leqslant i \leqslant k$. Далее, на первом шагу алгоритма добавим в множество A_2 все вершины цвета t_2, смежные с b. На втором шагу добавим в множество A_3 все вершины цвета t_3, смежные хотя бы с одной вершиной текущего множества A_2. Продолжим этот процесс, на $(i-1)$-ом шагу алгоритма добавляя в множество A_i все вершины цвета t_i, смежные хотя бы с одной вершиной текущего множества A_{i-1}. Когда доходим до множества A_n, продолжаем процесс циклически, добавляя в множество A_1 все вершины цвета t_1, смежные хотя бы с одной вершиной текущего множества A_n и дальше действуем аналогично. Заметим, что все последовательно получаемые множества A_i могут только увеличиваться, поэтому через конечное число шагов алгоритма все эти множества стабилизируются.

Определение 2. Полученные при помощи такого алгоритма множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$ будем называть *инвариантными* для чистой последовательности цветов $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Докажем некоторые свойства инвариантных множеств.

Лемма 1. *Рассмотрим чистую последовательность $t_1, t_2, \ldots, t_n$ и соответствующий ей набор инвариантных множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Тогда из вершины a можно дойти до любой вершины любого множества A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ простым путём, причём на этом пути цвета будут чередоваться в порядке $t_1 - t_2 - t_3 - \cdots - t_n - t_1 - t_2 - \cdots - t_i$, начиная с вершины b, которая будет второй на этом пути.*

Доказательство. Положим $A_{nt+\ell} = A_\ell$ для любого целого t. Вершина a_i инвариантного множества A_i попала в это множество на каком-то шагу алгоритма. Тогда эта вершина должна быть смежна с какой-то вершиной a_{i-1} из A_{i-1}, попавшей в это множество на предыдущем шагу алгоритма. Аналогично, должна существовать вершина $a_{i-2} \in A_{i-2}$, смежная с a_{i-1} и попавшая в A_{i-2} непосредственно перед включением a_{i-1} в соответствующее инвариантное множество. Тогда аналогичным способом двигаясь назад по этим вершинам, дойдём до вершины b, причём этот путь будет, очевидно, простым, так как вершины этого пути попадали в соответствующие множества на разных шагах алгоритма. □

Предположим дополнительно, что при фиксированной вершине a среди всех правильных раскрасок H в k цветов мы выбрали ту, в которой вершина a имеет наименьшее количество смежных вершин цвета 1. Тогда для инвариантных множеств верна следующая лемма:

Лемма 2. *Для любой чистой последовательности $t_1, t_2, \ldots, t_n$ в инвариантном множестве A_n найдётся вершина, смежная с вершиной a.*

Доказательство. Предположим противное. Заметим, что по алгоритму построения инвариантных множеств все вершины A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ смежны только с теми вершинами цвета t_{i+1}, которые входят в A_{i+1}, иначе такую вершину цвета t_{i+1} можно было бы включить в A_{i+1} на соответствующем шагу алгоритма (здесь и далее мы считаем, что обозначения цикличны по модулю n, т. е. $A_{n+1} = A_1; t_{n+1} = t_1$). Тогда перекрасим все вершины инвариантных множеств по циклу: все вершины A_i при $1 \leqslant i \leqslant n$ перекрасим в цвет t_{i+1}. Заметим, что тогда раскраска вершин H останется правильной, поскольку все вершины A_i попарно несмежны и они несмежны с вершинами цвета $i+1$, не входившими в A_{i+1}. Но после этой перекраски уменьшится количество вершин цвета 1, смежных с вершиной a, поскольку пропадёт такая вершина b, а новых не появится, так как смежных с a вершин нет в A_n. Это противоречит выбору исходной раскраски. □

§3. Циклы

В этой главе мы будем изучать вопрос о взаимосвязи хроматического числа графа с максимальным количеством циклов, покрывающих какое-то из его рёбер.

Лемма 3. *Дано натуральное число n такое, что $1 < n \leqslant k$. Если через любое ребро графа G проходит менее $\frac{(k-1)!}{(k-n)!}$ простых циклов длин, сравнимых с 1 по модулю n, то $\chi(G) \leqslant k$.*

Доказательство. Предположим противное. Рассмотрим максимальный по количеству вершин k-хроматический индуцированный подграф графа G. Назовём его H. Рассмотрим любую вершину $a \in G \setminus H$. Выберем из всех правильных раскрасок вершин H в k цветов ту, для которой количество вершин цвета 1, смежных с вершиной a, минимально. Если это количество равно нулю, то вершину a можно окрасить в цвет 1 с сохранением правильности раскраски, что противоречит максимальности H. В противном случае, обозначим через b какую-то вершину цвета 1, смежную с a.

Рассмотрим какую-нибудь чистую последовательность цветов $t_1, t_2, \dots, t_n$ длины n. Ей соответствует некоторый набор инвариантных множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$. В силу леммы 2 в множестве A_n найдётся вершина a_n, смежная с a. Но в силу леммы 1 существует простой путь, соединяющий вершину a с вершиной a_n, на котором цвета вершин чередуются как $t_1 - t_2 - t_3 - \cdots - t_n - t_1 - \cdots - t_n$ (начиная с вершины b, которая является второй на этом пути). Этот путь можно дополнить до простого цикла ребром $a_n a$. Следовательно, каждой чистой последовательности $A_1, A_2, \dots, A_n$ соответствует простой цикл длины $1 + sn$, где s равно числу посещений каждого цвета в этом цикле. Очевидно, что разным чистым последовательностям соответствуют разные циклы, поскольку в них цвета идут в разном порядке. Следовательно, простых циклов, проходящих по ребру ab и имеющих длину $1+sn$, не меньше, чем количество чистых последовательностей длины n. Но первый член любой такой последовательности – единица, следующий можно выбрать $k-1$ способом, следующий – $k-2$ способами и т.д., всего $\frac{(k-1)!}{(k-n)!}$ различных последовательностей. Но это противоречит условию, поэтому всегда можно окрасить вершины G в k цветов. □

Докажем теперь теорему 1.

Доказательство. Предположим противное. Рассмотрим максимальный по количеству вершин k-хроматический индуцированный подграф графа G. Назовём его H. Рассмотрим любую вершину $a \in G \setminus H$. Выберем из всех правильных раскрасок вершин H в k цветов ту, для

которой количество вершин цвета 1, смежных с вершиной a, минимально. Если это количество равно нулю, то вершину a можно окрасить в цвет 1 с сохранением правильности раскраски, что противоречит максимальности H. В противном случае, обозначим через b какую-то вершину цвета 1, смежную с a.

Аналогично доказательству предыдущей леммы, любой чистой последовательности цветов $t_1, t_2, \ldots, t_n$ соответствует некоторый простой цикл, проходящий по ребру ab, причём все такие циклы различны для разных чистых последовательностей. Осталось подсчитать количество чистых последовательностей. Первый член любой такой последовательности – единица, следующий можно выбрать $k-1$ способом, следующий – $k-2$ способами и т. д. всего $\frac{(k-1)!}{(k-n)!}$ различных последовательностей. Просуммировав все такие выражения для всех $1 < n \leqslant k$, получим

$$(k-1)!\sum_{n=2}^{k}\frac{1}{(k-n)!} = (k-1)!\sum_{i=0}^{k-2}\frac{1}{i!} = e(k-1)! - \sum_{i=k-1}^{\infty}\frac{(k-1)!}{i!} = [e(k-1)!-1].$$

Но это противоречит условию теоремы, поэтому всегда можно окрасить вершины G в k цветов. □

А теперь докажем теорему 2.

Доказательство. Предположим противное. Рассмотрим максимальный по количеству вершин k-хроматический индуцированный подграф графа G. Назовём его H. Рассмотрим любую вершину $a \in G \setminus H$. В силу максимальности H, $d(a) \geqslant k$. По формуле, полученной при доказательстве теоремы 1, применённой к любому ребру, выходящему из a, по этому ребру проходит не менее $(k-1)!\sum\limits_{i=0}^{k-2}\frac{1}{i!}$ простых циклов. Просуммировав это по всем рёбрам, выходящим из a, получим не менее $k!\sum\limits_{i=0}^{k-2}\frac{1}{i!}$ простых циклов. Но каждый из этих циклов был посчитан дважды, поскольку проходил ровно по двум рёбрам, выходящим из a.

Следовательно, всего циклов не менее

$$\frac{k!}{2}\sum_{i=0}^{k-2}\frac{1}{i!}=e\frac{k!}{2}-\frac{k}{2}-\frac{1}{2}-\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{k!}{2i!}=\left\lceil\frac{ek!}{2}-\frac{k+1}{2}\right\rceil,$$

что противоречит условию теоремы. □

§4. Критические графы

Заметим, что для любого графа G с $\chi(G) > k$ существует остовный $(k+1)$-критический подграф.

Лемма 4. *Дано натуральное число n такое, что $1 < n \leqslant k$. Тогда в любом $(k+1)$-критическом графе G по каждому ребру проходит не менее $\frac{(k-1)!}{(k-n)!}$ простых циклов длин, сравнимых с 1 по модулю n.*

Доказательство. Предположим это утверждение неверно для некоторого ребра ab. Заметим, что по определению критического графа, граф $G \setminus \{a\}$ является k-хроматическим. Тогда для любой чистой последовательности цветов $t_1, t_2, \ldots, t_n$ длины n аналогично доказательству леммы 3, найдётся простой цикл длины $1 + sn$, проходящий по ребру ab, где $s \geqslant 1$. Поскольку имеется ровно $\frac{(k-1)!}{(k-n)!}$ чистых последовательностей длины n, то получим противоречие. □

Следствие 1. *Дано натуральное число n такое, что $1 < n \leqslant k$. Тогда в любом $(k+1)$-критическом графе G через каждую вершину проходит не менее $\frac{k!}{2(k-n)!}$ простых циклов длин, сравнимых с 1 по модулю n.*

Доказательство. Заметим, что для любой вершины $a \in G$ верно $d(a) \geqslant k$. По каждому из рёбер этого графа проходит не менее $\frac{(k-1)!}{(k-n)!}$ простых циклов длин, сравнимых с 1 по модулю n в силу леммы 4. По всем рёбрам, выходящим из a суммарно проходит не менее $\frac{k!}{(k-n)!}$ таких циклов. Но каждый из них посчитан ровно дважды, поскольку проходит по двум выходящим из a рёбрам. Это и даёт нужный результат. □

Заметим, что если в формулу из следствия 1 подставить $n = 2$, то получится следующий результат: для любого натурального числа $k \geqslant 2$ в любом $(k+1)$-критическом графе G через каждую вершину проходит не менее $\frac{k(k-1)}{2}$ простых циклов нечётной длины. Этот результат равносилен одному из результатов статьи [6], о чём упоминалось во введении.

Лемма 5. *В любом $(k+1)$-критическом графе G по каждому ребру проходит не менее*

$$(k-1)!\sum_{i=0}^{k-2}\frac{1}{i!}=[e(k-1)!-1]$$

простых циклов.

Доказательство. Рассмотрим некоторое ребро ab. Граф $G\setminus\{a\}$ является k-хроматическим. Аналогично доказательству леммы 4, любой чистой последовательности цветов $t_1, t_2, \ldots, t_n$ соответствует некоторый простой цикл, проходящий по ребру ab, причём все такие циклы различны для разных чистых последовательностей. Аналогично доказательству теоремы 1, существует всего

$$(k-1)!\sum_{i=0}^{k-2}\frac{1}{i!}=[e(k-1)!-1]$$

чистых последовательностей, каждой из которых соответствует простой цикл, проходящий по ребру ab, откуда и следует утверждение леммы. □

Докажем теперь теорему 3.

Доказательство. Рассмотрим произвольную вершину $a \in G$. В силу определения $(k+1)$-критического графа, $d(a) \geqslant k$. По лемме 5, применённой к любому ребру, выходящему из a, по этому ребру проходит не менее $(k-1)!\sum\limits_{i=0}^{k-2}\frac{1}{i!}$ простых циклов. Аналогично доказательству теоремы 2, получаем требуемое. □

Литература

1. K. Wagner, *Uber eine Eigenschaft der ebenen Komplexe.* — Math. Ann. **114** (1937),. 570–590.
2. P. Mihok, I. Schiermeyer, *Cycle lengths and chromatic number of graphs.* — Discrete Math. **286**, Nos.1–2 (2004), 147–149.
3. B. Randerath, I. Schiermeyer, *Colouring graphs with prescribed induced cycle lengths.* — Discuss. Math. Graph Theory **21** (2001), 267–281.
4. H. Hadwiger, *Uber eine Klassifikation der Streckenkomplexe.* — Vierteljahrsschr. Naturforsch. Ges. Zurich **88** (1943), 133–142.

5. N. Robertson, P. Seymour, R. Thomas, *Hadwiger's conjecture for K6-free graphs.* — Combinatorica **14** (1993), 279–361.
6. S. L. Berlov, V. L. Dol'nikov, *Some generalization of theorems on a vertex colouring.* — J. Combinator. Theory Ser. A **113**. No. 7 (2006), 1582–1585.
7. G. A. Dirac, *A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs.* — J. London Math. Soc. **27** (1952), 85–92.

Berlov S. L., Tyschuk K. I. On the connection between the chromatic number of a graph and the number of cycles, covering a vertex or an edge.

We prove several tight bounds on the chromatic number of a graph in terms of the minimal number of simple cycles, covering a vertex or an edge of this graph. Namely, we prove that $\chi(G) \leqslant k$ in the following two cases: any edge of G is covered by less than $[e(k-1)!-1]$ simple cycles or any vertex of G is covered by less than $[\frac{ek!}{2} - \frac{k+1}{2}]$ simple cycles. Tight bounds on the number of simple cycles covering an edge or a vertex of a k-critical graph are also proved.

Физико-математический лицей No. 239,
ул. Кирочная д.8а,
191028, Санкт-Петербург,
E-mail: sberlov@rambler.ru

Поступило 11 октября 2016 г.