Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 449, 2016 г.

В. А. Шлык, А. А. Яковлев

МОДУЛИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНФИГУРАЦИЙ И УСТРАНИМЫЕ МНОЖЕСТВА

Описание нуль-множеств для некоторых классов отображений сводится к описанию нуль-множеств для модуля семейств кривых, соединяющих пластины конденсатора (см. [2, 7]).

Естественно возникает задача распространить это утверждение на более общие семейства кривых. В [3] эта задача решена в евклидовом пространстве R^n, $n \geqslant 2$, для набора семейств кривых, где каждое семейство состоит из кривых, соединяющих пластины соответствующего конденсатора. Доказательство этого факта основано на равенстве модуля и емкости поликонденсатора и проведено для аналогов NED-множеств в R^n, $n \geqslant 2$, так называемых $NC_{p,w}$-множеств (см. [3, 7]).

С другой стороны, в геометрической теории функций широко используется модуль конфигурации, состоящей как из набора семейств кривых, соединяющих пластины конечного числа конденсаторов, так и из набора конечного числа гомотопических классов локально спрямляемых замкнутых кривых, не гомотопных нулю (см. [5]).

В данной работе на основе известного свойства малости обхвата для $NC_{p,w}$-множества (см. п. 2) устанавливается, что $NC_{p,w}$-множества не влияют на (p, w)-модуль указанной выше конфигурации.

§1. Основные обозначения и вспомогательные утверждения

Ниже G – открытое ограниченное множество в R^n, $\mathcal{L}_k$ – k-мерная мера Лебега. Для произвольного измеримого множества $F \subset R^n$ обозначим через $|F|$ его n-мерную меру Лебега; A_p – класс локально интегрируемых функций $w : R^n \to (0; +\infty)$, удовлетворяющих условию Макенхаупта

$$\sup \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w\, dx \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w^{1-q}\, dx \right)^{p-1} < \infty,$$

Ключевые слова: модуль семейства кривых, модуль конфигурации, устранимые множества.

где супремум берется по всем координатным кубам $Q \subset R^n$, $p,q \in (1;+\infty)$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Обозначим через $L^{p,w}(D)$, где D – открытое множество в R^n, класс функций $f : D \to [-\infty;+\infty]$, для которых

$$\|f\|_{p,w} = \left(\int\limits_D |f|^p w\, dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Через $L_+^{p,w}(D)$ обозначим класс борелевских функций $f : D \to [0;+\infty]$, $f \in L^{p,w}(D)$.

Пусть $B(x,r)$ – открытый шар с центром в точке $x \in R^n$ радиуса $r > 0$. Определим максимальную функцию

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

для локально интегрируемой в R^n функции f. Известно (см. [9, теорема 5.1.1]), что

$$\|Mf\|_{p,w} \leqslant \mathrm{const} \cdot \|f\|_{p,w}. \tag{1}$$

Если $E, F \subset R^n$, то обозначим через $d(E,F)$, $d(F)$ соответственно евклидово расстояние между E и F, евклидов диаметр множества F.

Пусть $\bar{F}$, ∂F, $int\ F$ – соответственно замыкание, граница, внутренность множества $F \subset R^n$ в топологии R^n. Множество $O(F,\varepsilon) = \bigcup\limits_{x\in F} B(x,\varepsilon)$ для $\varepsilon > 0$ назовем ε-окрестностью множества F.

Кривой γ в R^n назовем образ числового интервала (a,b) или отрезка $[a,b]$ при непрерывном отображении $x = x(t)$ его в R^n. В дальнейшем считаем, что отображение $x = x(t)$ не является постоянным ни на одном интервале и задает параметризацию кривой γ.

Будем говорить, что кривая γ соединяет множества E и $F \subset R^n$, если для ее параметризации $x(t)$, $a < t < b$, выполняются условия $\liminf\limits_{t\to a} d(x(t),E) = 0$, $\liminf\limits_{t\to b} d(x(t),F) = 0$.

Конденсатором назовем набор множеств (F_0, F_1, G), где F_0, F_1 – некоторые непересекающиеся компакты из замыкания $\overline{G}$ открытого множества $G \subset R^n$.

Для конденсатора (F_0,F_1,G) обозначим через $\Gamma(F_0,F_1,G)$ семейство всех локально спрямляемых кривых $\gamma \subset G$, соединяющих F_0 и F_1.

Пусть дано некоторое семейство Γ локально спрямляемых кривых в R^n. Определим (p,w)-модуль с весом $w \in A_p$ семейства Γ следующим образом:

$$m_{p,w}(\Gamma) = \inf_{\rho} \int\limits_{R^n} \rho^p w\, dx,$$

где инфимум берется по всем борелевским функциям $\rho : R^n \to [0; +\infty]$ таким, что $\int\limits_{\gamma} \rho\, ds \geqslant 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. Класс всех таких допустимых функций обозначим через $\mathrm{adm}_{p,w}(\Gamma)$.

Если вышеуказанное условие на ρ выполняется для $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0$, где $m_{p,w}(\Gamma_0) = 0$, то такую функцию будем называть $m_{p,w}$-почти допустимой. Легко заметить, что инфимум в определении модуля можно брать по $m_{p,w}$-почти допустимым функциям.

Всякий конечный упорядоченный набор семейств кривых

$$H = \{H_1, \ldots, H_m\}$$

в G вместе с упорядоченным набором положительных чисел

$$\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$$

назовем конфигурацией в G и обозначим символом

$$\alpha H = \{\alpha_1 H_1, \ldots, \alpha_m H_m\}.$$

Функцию $\rho \in L_+^{p,w}(G)$ назовем допустимой для конфигурации αH, если

$$\int\limits_{\rho} ds \geqslant \alpha_i$$

для всех локально спрямляемых кривых $\gamma \in H_i$, $i = 1, \ldots, m$. Класс всех таких допустимых функций обозначим через $\mathrm{adm}\,\alpha H$.

Модулем $m_{p,w}(\alpha H)$ конфигурации αH назовем величину

$$m_{p,w}(\alpha H) = \inf_{\rho} \int\limits_{G} \rho^p w\, dx,$$

где инфимум берется по всем функциям $\rho \in \mathrm{adm}\,\alpha H$. Если $\mathrm{adm}\,\alpha H = \varnothing$, то положим $m_{p,w}(\alpha H) = \infty$.

Далее будем считать, что набор H состоит из $m = n_1 + n_2$ семейств локально спрямляемых кривых в G следующих двух типов. Первый тип состоит из семейств H_i, $i = 1. \ldots, n_1$, где $H_i = \Gamma(F_{0i}, F_{1i}, G)$, $F_{0i} \cup F_{1i} \subset \partial G$. Второй тип состоит из гомотопических семейств H_i, $i = n_1+1, \ldots, m$, замкнутых простых жордановых кривых, не гомотопных нулю.

Семейство всех ломаных $\gamma \in H_i$, $1 \leqslant i \leqslant n_1$, таких, что для любой окрестности U компакта $F_{0i} \cup F_{1i}$ пересечение $\gamma \cap (G \setminus U)$ содержится в объединении конечного числа звеньев ломаной γ, обозначим через H_i^0. Семейство всех ломаных с конечным числом звеньев из H_i, $n_1 < i \leqslant m$, обозначим также через H_i^0. Положим $\alpha H^0 = \{\alpha_1 H_1^0, \dots, \alpha_m H_m^0\}$.

Компактное множество $E \subset G$ назовем $NC_{p,w}$-множеством в G, если для любого координатного прямоугольника Π, $\bar{\Pi} \subset G$, выполняется равенство

$$m_{p,w}(\sigma_{0i}, \sigma_{1i}, \Pi \setminus E) = m_{p,w}(\sigma_{0i}, \sigma_{1i}, \Pi),$$

где σ_{0i},σ_{1i} – боковые грани прямоугольника Π, параллельные гиперплоскости $\{(x_1, \dots, x_n) \in R^n : x_i = 0\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Назовем функцию кусочно-линейной на множестве G, если она непрерывна в G и существует разбиение G на симплексы без общих внутренних точек, на каждом из которых она линейна.

Лемма 1. *Существует функция $\beta(x)$, кусочно-линейная на множестве G и удовлетворяющая на G условиям*

$$0 < \beta(x) < 1, \quad \beta(x) < d(x, \partial G)/2, \quad |\nabla \beta(x)| < 1.$$

Доказательство см. в [1,3].

Лемма 2. *Инфимум в определении модуля $m_{p,w}(\alpha H^0)$ можно брать по допустимым функциям, непрерывным на G.*

Доказательство. Если $m_{p,w}(\alpha H^0) = \infty$, то можно взять $\rho \equiv \infty$. Поэтому далее считаем, что $m_{p,w}(\alpha H^0) < \infty$.

Пусть $\varepsilon > 0$ и пусть функция $\rho \in \operatorname{adm}(\alpha H^0)$ такая, что

$$\int\limits_G \rho^p w \, dx < m_{p,w}(\alpha H^0) + \varepsilon.$$

Рассмотрим функцию

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{|B(0,1)|} \int\limits_{B(0,1)} \rho(x + \varepsilon\beta(x) y) \, dy = \frac{1}{\varepsilon^n \beta(x)^n} \int\limits_{B(x, \varepsilon\beta(x))} \rho(y) \, dy,$$

где $\beta(x)$ из леммы 1. Она непрерывна на G и стремится к ρ в $L^{p,w}(G)$ при $\varepsilon \to 0$ [9, лемма 2.4.4].

Пусть кривая $\gamma \in H_i^0$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Имеем

$$\int\limits_\gamma \rho_\varepsilon \, ds = \frac{1}{|B(0,1)|} \int\limits_{B(0,1)} \int\limits_\gamma \rho(x + \varepsilon\beta(x) y) \, ds(x) \, dy.$$

Рассмотрим внутренний интеграл. Пусть $z(x) = x + \varepsilon\beta(x)y$. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x + \varepsilon\beta(x)y)ds(x) = \int\limits_{z^{-1}(\gamma)} \rho(z)\frac{ds(x)}{ds(z)}ds(z) \geqslant \frac{\alpha_i}{1+\varepsilon},$$

поскольку

$$\frac{ds(z)}{ds(x)} = \left|\frac{dx}{ds} + \varepsilon\frac{d\beta}{ds}y\right| \leqslant 1 + \varepsilon$$

и кривая $z^{-1}(\gamma) \in H_i^0$. Отсюда получаем, что функция $(1+\varepsilon)\rho_\varepsilon \in \mathrm{adm}_{p,w}(\alpha H^0)$ и

$$\begin{aligned} m_{p,w}(\alpha H^0) &\leqslant \int\limits_G (1+\varepsilon)^p \rho_\varepsilon^p w\,dx \\ &\leqslant (1+\varepsilon)^p \left(\int\limits_G \rho^p w\,dx + o(1)\right) \leqslant m_{p,w}(\alpha H^0) + o(1) \end{aligned}$$

при $\varepsilon \to 0$. Лемма доказана.

Замечание 1. *Отметим, что отображение $z(x) = x + \varepsilon\beta(x)y$ в доказательстве леммы 2 – билипшицево отображение G на G для $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$. Кроме того, непрерывное отображение $z(x,t) = x + \varepsilon t\beta(x)y$: $G \times [0,1] \to G$ задает гомотопию каждой кривой $\gamma \in H_i^0$ ($\gamma \in H_i$) на $z(\gamma)$. Другими словами, $z(\gamma) \in H_i^0$ (соответственно, $z(\gamma) \in H_i$). Здесь $n_1 < i \leqslant m$.*

Замечание 2. *Утверждение леммы 2 останется справедливым, если в ее формулировке семейство αH^0 заменить на αH.*

Из леммы 2 и определения криволинейного интеграла также получаем

Следствие 1. *Если $\rho \in \mathrm{adm}_{p,w}(\alpha H^0)$ и ρ непрерывна на G, то $\rho \in \mathrm{adm}_{p,w}(\alpha H)$ и*

$$m_{p,w}(\alpha H^0) = m_{p,w}(\alpha H). \tag{2}$$

Отметим, что если $p = n, w \equiv 1$ и набор H состоит из одного семейства $\Gamma(F_0, F_1, G)$, то равенство (2) было доказано в [1].

Лемма 3. *Для любой непрерывной положительной функции*

$$\rho \in \mathrm{adm}_{p,w}(\alpha H^0)$$

и для любого $\varepsilon > 0$ *существуют* δ*-окрестности* F_{0i}^{δ}, F_{1i}^{δ} *компактов* F_{0i}, F_{1i} *и суммируемая функция* $\widetilde{\rho}$ *такие, что для любой ломаной* $\gamma \subset G$, *соединяющей эти окрестности, выполняются условия*

$$\int\limits_{\gamma} \widetilde{\rho}\, ds > \alpha_i - \varepsilon, \qquad \int\limits_{G} \widetilde{\rho}^p w\, dx < \int\limits_{G} \rho^p w\, dx + \varepsilon,$$

где $i = 1, 2, \dots n_1$.

Доказательство. Возьмем семейство $H_1 = \Gamma(F_{01}, F_{11}, G)$ из набора H и рассмотрим пару (F_{01}, F_{11}). Пусть F_{i1}^k, $k = 1, 2, \dots$ – открытые ограниченные множества, монотонно исчерпывающие снаружи компакт F_{i1} и такие, что $F_{01}^k \cap F_{11}^k = \varnothing$ для $i = 0, 1$ и $k \geqslant 1$; Δ_k, $k \geqslant 1$ – исчерпание G изнутри открытыми множествами.

Обозначим $W_{ik} = F_{i1}^k \setminus F_{i1}^{k+1}$, $i = 0, 1$; $W_k = W_{0k} \cup W_{1k}$, $G_k = F_{01}^k \cup F_{11}^k$, d_k – расстояние между $\partial G_k \cap G$ и $\partial G_{k+1} \cap G$, $k = 1, 2, \dots$; $W_0 = G \setminus (F_{01}^1 \cup F_{11}^1)$. Возьмем монотонно убывающую последовательность $\varepsilon_s \to 0$ при $s \to \infty$ такую, что $\varepsilon_1 < 1$,

$$2^p \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon_s < \frac{\varepsilon}{n_1}, \qquad \varepsilon_s < \frac{1}{\alpha_1} d_s \inf_{W_s \cap G} \rho, s = 1, 2, \dots. \tag{3}$$

Пусть k_l, $l = 1, 2 \dots$ – возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что

$$\int\limits_{B_l} \rho^p w\, dx < \varepsilon_l^{p+1},$$

где $B_l = (G \setminus \Delta_{k_l}) \cap W_l$. Положим $B = \bigcup\limits_l B_l$ и введем в рассмотрение функцию

$$\rho_1 = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_s}\right) \rho, & x \in B_s, s = 1, 2, \dots, \\ \rho, & x \in G \setminus B. \end{cases}$$

Для этой функции выполняются неравенства $\rho_1 \geqslant \rho$,

$$\int\limits_{B} \rho_1^p w\, dx = \sum_{s=1}^{\infty} \int\limits_{B_s} \rho_1^p w\, dx \leqslant \sum_{s=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_s}\right)^p \int\limits_{B_s} \rho^p w\, dx \leqslant 2^p \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon_s < \frac{\varepsilon}{n_1},$$

как следует из (3). Отсюда

$$\int\limits_{G} \rho_1^p w\, dx = \int\limits_{G \setminus B} \rho_1^p w\, dx + \int\limits_{B} \rho_1^p w\, dx \leqslant \int\limits_{G} \rho^p w\, dx + \frac{\varepsilon}{n_1}. \tag{4}$$

Докажем, что существует такое k, что для любой ломаной, соединяющей ∂F_{01}^k и ∂F_{11}^k в G, имеем неравенство $\int\limits_\gamma \rho_1\,dx \geqslant \alpha_1 - \varepsilon$. Если это не выполняется, то для любого k существует ломаная γ_k, соединяющая ∂F_{01}^k и ∂F_{11}^k в G такая, что $\int\limits_{\gamma_k} \rho_1\,dx < \alpha_1 - \varepsilon$. С другой стороны, если для $k \geqslant s$ существует ломаная $\gamma_k' \subset \gamma_k$, соединяющая ∂G_s и ∂G_{s+1} в $W_s \cap B$, то

$$d_s \inf_{W_s\cap B} \rho \leqslant \int\limits_{\gamma_k'} \rho\,ds = \frac{1}{1+\frac{1}{\varepsilon_s}} \int\limits_{\gamma_k'} \rho_1\,ds \leqslant \varepsilon_s \int\limits_{\gamma_k'} \rho_1\,ds \leqslant \varepsilon_s(\alpha_1 - \varepsilon),$$

что противоречит условию (3). Следовательно, указанная ломаная имеет общие точки с множеством $(G \cap W_s) \setminus B$.

Пусть $x_0(s,k)$ (соответственно, $x_1(s,k)$) – точки некоторой связной части γ_k в $(G \cap W_{0s}) \setminus B$ (соответственно, $(G \cap W_{1s}) \setminus B$). Выберем последовательность k_j так, чтобы $x_i(1,k_j)$ сходилась к некоторой точке $x_{i1} \in G \cap W_1$ при $j \to \infty$, $i = 0, 1$.

Обозначим последовательность γ_{k_j} через γ_{1k}. Так как ρ непрерывна в $G \setminus (F_{01} \cup F_{11})$, то можно найти открытый шар V_{i1} с центром в точке x_{i1} такой, что для любого отрезка e в этом шаре выполняется условие $\int\limits_e \rho\,ds < \frac{\varepsilon}{2^6}$. Можно считать, что все γ_{1k} пересекают V_{i1}.

Аналогично, найдем подпоследовательность γ_{2k} последовательности γ_{1k} и открытые шары V_{i2} с центрами в точках $x_{i2} \in G \cap W_{i2}$ такие, что для любого отрезка e в этих шарах выполняется $\int\limits_e \rho\,ds < \frac{\varepsilon}{2^7}$ и каждая ломаная пересекает эти шары, $k = 1, 2 \ldots, i = 0, 1$.

Продолжим этот процесс до бесконечности и рассмотрим диагональную последовательность γ_{kk}. Для любого натурального k изменим ломаную γ_{kk} следующим образом. Заменим какую-либо связную часть ломаной γ_{kk}, содержащейся в шаре V_{is}, двумя радиусами шара V_{is}, идущими в некоторые две точки множества $\gamma_{kk} \cap V_{is}$. Проводим эти действия для $i = 0, 1$ и любого $s = 1, 2, \ldots$.

Обозначим полученную ломаную через τ_k. Для этой ломаной имеем неравенство $\int\limits_{\tau_k} \rho\,ds < \alpha_1 - \frac{3\varepsilon}{4}$ для любого $k \geqslant 1$. Пусть Γ_0 – семейство спрямляемых ломаных, соединяющих x_{01} и x_{11} на G, Γ_{ij} – семейство спрямляемых ломаных, соединяющих точки x_{ij} и $x_{i,j+1}$ в G, $i = 0, 1$,

$j \geqslant 1$. Имеем

$$\inf_{C\in\Gamma_0}\int\limits_C \rho\,ds + \sum_{i=1}^{k-1}\inf_{C\in\Gamma_{0j}}\int\limits_C \rho\,ds + \sum_{i=1}^{k-1}\inf_{C\in\Gamma_{1j}}\int\limits_C \rho\,ds \leqslant \int\limits_{\tau_k} \rho\,ds < \alpha_1 - \frac{3\varepsilon}{4}$$

для любого $k \geqslant 1$. Значит,

$$\inf_{C\in\Gamma_0}\int\limits_C \rho\,ds + \sum_{i=1}^{\infty}\inf_{C\in\Gamma_{0j}}\int\limits_C \rho\,ds + \sum_{i=1}^{\infty}\inf_{C\in\Gamma_{1j}}\int\limits_C \rho\,ds \leqslant \alpha_1 - \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Выберем дуги $C_0 \in \Gamma_0$, $C_{0j} \in \Gamma_{0j}$, $C_{1j} \in \Gamma_{1j}$ такие, что

$$\int\limits_{C_0} \rho\,ds < \inf_{C\in\Gamma_0}\int\limits_C \rho\,ds + \frac{\varepsilon}{8}, \quad \int\limits_{C_{ij}} \rho\,ds < \inf_{C\in\Gamma_{ij}}\int\limits_C \rho\,ds + \frac{\varepsilon}{2^{j+3}},$$

$j \geqslant 1$, $i = 0, 1$.

Рассмотрим ломаную $\widetilde{\gamma} = \cdots + C_{02} + C_{01} + C_0 + C_{11} + \ldots$. Она соединяет множества F_{01} и F_{11} в G и удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}} \rho\,ds = \int\limits_{C_0} \rho\,ds + \sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_{C_{0j}\cup C_{1j}} \rho\,ds < \alpha_1 - \frac{3\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{j+2}} < \alpha_1,$$

что противоречит допустимости функции ρ.

Следовательно, существует k такое, что для любой ломаной γ, соединяющей ∂F_{01}^k и ∂F_{11}^k на G, имеем неравенство $\int\limits_\gamma \rho_1\,ds \geqslant \alpha_1 - \varepsilon$. Проводя такие же рассуждения для остальных семейств $H_i = \Gamma(F_{0i}, F_{1i}, G)$, $i = 2, 3, \ldots, n_1$, получим функции $\rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_{n_1}$ с аналогичными свойствами.

Рассмотрим функцию $\widetilde{\rho} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n_1} \rho_i$. Учитывая (4), легко проверить, что она удовлетворяет условиям леммы.

Замечание 3. *Утверждение леммы* 3 *остается справедливым, если в ее формулировке заменить конфигурацию* αH^0 *на* αH.

Следствие 2. *Если* $\rho, \widetilde{\rho}$ *– функции из леммы* 3, *то*

$$\rho_0 = \frac{\widetilde{\rho}}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n_1}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\alpha_i}\right)} \in \operatorname{adm}_{p,w}\{\alpha_1\Gamma(\widetilde{F}_{0i}\cap\bar{G}, \widetilde{F}_{1i}\cap\bar{G}, G),$$
$$\ldots, \alpha_{n_1}\Gamma(\widetilde{F}_{0n_1}\cap\bar{G}, \widetilde{F}_{1n_1}\cap\bar{G}, G), \alpha_{n_1+1}H_{n_1+1}, \ldots, \alpha_m H_m\}$$

и

$$\int\limits_G \rho_0^p w\,dx = \int\limits_G \rho^p w\,dx + o(1), \quad \varepsilon \to 0,$$

где $\widetilde{F}_{ji}$ *– замкнутые окрестности компактов* F_{ji}, $j=0,1$; $i=1,\dots,n_1$, *расположенные в* δ*-окрестностях компактов* F_{ji} *из леммы* 3.

Лемма 4. *Для* (p,w)*-модуля конфигурации* αH *справедливы неравенства*

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m} \alpha_i^p m_{p,w}(H_i) \leqslant m_{p,w}(\alpha H) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^p m_{p,w}(H_i). \tag{5}$$

Справедливость леммы 4 следует непосредственно из определений модуля конфигурации и модулей семейств кривых.

§2. $NC_{p,w}$-МНОЖЕСТВА И МОДУЛИ КОНФИГУРАЦИЙ

Из определения $NC_{p,w}$-множества E (см. [2]) следует, что E не разбивает локально G, $\mathcal{L}_n(E)=0$. Кроме того, принимая во внимание, что E является устранимым множеством для соболевского класса функций $L^1_{p,w}(G)$, который инвариантен при билипшицевых отображениях множества G (и, в частности, при поворотах и переносах декартовой системы координат), для E выполняется следующее условие малости обхвата (см. [2]):

Пусть l^0 – некоторая прямая в R^n, h – некоторая гиперплоскость, ортогональная прямой l^0, L – семейство всех прямых, параллельных прямой l^0. Индексируем каждую прямую $l \in L$ индексом a, где a – точка пересечения прямой l с гиперплоскостью h. Тогда для заданной наперед локально ограниченной в $G \setminus E$ функции $\rho \in L_+^{p,w}(G)$ существует множество $A \subset h$, $\mathcal{L}_{n-1}(A)=0$ такое, что для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ и любой прямой $l = l_a$, $a \notin A$, $l \cap E \neq \varnothing$, можно указать последовательность непересекающихся интервалов $(c_k, d_k) \subset l_a$ и кривых $\gamma_k \subset G \setminus E$, соединяющих c_k и d_k в $G \setminus E$, $k = 1,2,\dots,k_a$, и

$$\sum_{k=1}^{k_a} \int\limits_{\gamma_k} \rho\,ds < \varepsilon, \quad \sum_{k=1}^{k_a} \int\limits_{\gamma_k} ds < \varepsilon, \sum_{k=1}^{k_a} |d_k - c_k| < \varepsilon, \bigcup_{k=1}^{k_a} (c_k, d_k) \supset l \cap E.$$

Выписанное условие на l будем в дальнейшем называть условием малости обхвата на прямой l для ρ относительно E.

Пусть $\alpha H = \{\alpha_1 H_1, \ldots, \alpha_m H_m\}$ конфигурация из п. 1. Обозначим через $\widetilde{H}_i$ семейство всех локально спрямляемых кривых γ из H_i, содержащихся в $G \setminus E$. Тогда нетрудно заметить, что $\widetilde{H}_i = \Gamma(F_{0i}, F_{1i}, G \setminus E)$ для $i = 1, 2, \ldots, n_1$. Положим

$$\widetilde{H} = \{\widetilde{H}_1, \ldots, \widetilde{H}_m\}, \quad \widetilde{\alpha} H = \{\alpha_1 \widetilde{H}_1, \ldots, \alpha_m \widetilde{H}_m\}.$$

Установим теперь, используя леммы 2,3 и указанное выше условие малости обхвата, что $NC_{p,w}$-множества не влияют на (p, w)-модуль конфигурации.

Теорема 1. *Если E – $NC_{p,w}$-множество, то*

$$m_{p,w}(\alpha H) = m_{p,w}(\alpha \widetilde{H}). \tag{6}$$

Доказательство. Используем здесь технику усреднения допустимых функций для модуля по схеме, предложенной в доказательстве аналогичной теоремы 1 работы [4]. Если $m_{p,w}(\alpha \widetilde{H}) = \infty$, то очевидно, что $m_{p,w}(H) = \infty$, значит, равенство (6) верно.

Пусть теперь $m_{p,w}(\alpha \widetilde{H}) < \infty$. Применяя рассуждения из доказательства леммы 2, найдем непрерывную в G функцию $\rho \in \mathrm{adm}_{p,w}(\alpha \widetilde{H})$, для которой

$$\int\limits_G \rho^p w \, dx = m_{p,w}(\alpha \widetilde{H}) + o(1).$$

Не ограничивая общности, будем считать, что ρ ограничена снизу положительной постоянной на G. Пусть $H_i(k)$ – семейство всех $\gamma \in H_i$, для которых $d(\gamma, \partial G) > \frac{1}{k}$, где $i = n_1 + 1, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots$.

Положим $\alpha H(k) = \{\alpha_1 H_1, \ldots, \alpha_{n_1} H_{n_1}, \alpha_{n_1+1} H_{n_1+1}(k), \ldots, \alpha_m H_m(k)\}$. В силу монотонности модуля $m_{p,w}$, имеем

$$m_{p,w}(\alpha H) = \lim_{k \to \infty} (\alpha H(k)).$$

Далее считаем натуральное число k фиксированным и достаточно большим.

Применяя рассуждения доказательства леммы 3 к конфигурации $\alpha \widetilde{H}$ и метрике ρ, найдем локально ограниченную функцию $\widetilde{\rho} \geqslant \rho$ в $G \setminus E$, компакты F_{0i}^1, F_{0i}^2, F_{0i}^3,F_{1i}^1, F_{1i}^2, F_{1i}^3, где

$F_{0i} \subset int\ F_{0i}^1, F_{1i} \subset int\ F_{1i}^1, F_{0i}^j \subset int\ F_{0i}^{j+1}, F_{1i}^j \subset int\ F_{1i}^{j+1}, F_{0i}^3 \cap F_{1i}^3 = \varnothing$,

$F_{0i}^3 \cap F_{1i}^3$ принадлежит $\frac{1}{2k}$-окрестности множества G, $j = 1, 2, i = 1, 2, \ldots, n_1$.

Кроме того, $\rho \in \mathrm{adm}_{p,w}(\{\alpha_1\Gamma(F_{01}^3 \cap \bar{G}, F_{11}^3 \cap \bar{G}, G \setminus E), \dots, \alpha_{n_1}\Gamma(F_{0n_1}^3 \cap \bar{G}, F_{1n_1}^3 \cap \bar{G}, G \setminus E), \alpha_{n_1+1}\widetilde{H}_{n_1+1}, \dots, \alpha_m\widetilde{H}_m\})$,

$$\int\limits_{G \setminus \bigcup_{i=1}^{n_1}(F_{0i}^3, F_{1i}^3)} \widetilde{\rho}^p w\, dx = m_{p,w}(\alpha\widetilde{H}) + o(1).$$

Здесь учитываем, что в силу условия $|E| = 0$ функции $\widetilde{\rho}, \rho$ можно считать равными нулю на E.

Положим

$$\rho_1(x) = \begin{cases} \widetilde{\rho}, & x \in G \setminus (F_{01}^3 \cup F_{11}^3 \cup E); \\ 0, & x \notin G \setminus (F_{01}^3 \cup F_{11}^3 \cup E), \end{cases}$$

и покажем, что

$$\int\limits_{\gamma} \rho_1\, ds \geqslant \alpha_1 \text{ для } (p,w)\text{-почти всех кривых } \gamma \in H_1,$$

$$\int\limits_{\gamma} \rho_1\, ds \geqslant \alpha_i \text{ для } (p,w)\text{-почти всех кривых } \gamma \in H_i(k), n_1 < i \leqslant m.$$

Действительно, рассмотрим семейство $H_1^0(j)$ всех ломаных γ из H_1^0, для которых $d(\gamma \cap (G \setminus (F_{01}^2 \cup F_{11}^2)), \partial(G \setminus (F_{01}^1 \cup F_{11}^1))) > \frac{1}{j}$, $j = 1, 2, 3, \dots$.

По построению, $H_1^0 = \bigcup\limits_{j \geqslant 1} H_1^0(j)$. Далее j считаем фиксированным.

Положим

$$\rho_{1r}(x) = \frac{1}{|B(0,r)|} \int\limits_{B(0,r)} \rho_1(x+y)\, dy,$$

где $0 < r < \min\left\{\frac{1}{2(k+1)}, \frac{1}{j+1}\right\}$. Известно, что ρ_{1r} – непрерывная функция на R^n, $\rho_{1r}(x) \to \rho_1(x)$ почти всюду на R^n при $r \to 0$. В силу (1), $\|\rho_{1r}\|_{p,w} \leqslant const\|\rho_1\|_{p,w}$ и при $r \to 0$

$$\int\limits_G |\rho_{1r}(x) - \rho_1(x)|^p w\, dx \to 0. \tag{7}$$

Пусть $\gamma \in H_1^0(j)$. По определению, $\gamma \cap (G \setminus (F_{01}^2 \cup F_{11}^2)) = \gamma_1$ содержит ломаную γ_2, составленную из конечного числа прямолинейных отрезков $l_1, \dots, l_s$.

Пусть ломаная γ_{2y} и отрезки $l_{1y}, \dots, l_{sy}$ – результаты переноса на вектор y, $|y| < r$, соответственно ломаной γ_2 и отрезков $l_1, \dots, l_s$. В силу выбора r, ломаная γ_2 будет лежать на $G \setminus (F_{01}^1 \cup F_{11}^1)$ и соединять F_{01}^3 и F_{11}^3). Нетрудно заметить, что для почти всех y, $|y| < r$, концы отрезков l_{iy} не принадлежат E, $\mathcal{L}_1(l_{iy} \cap E) = 0$, и для ρ_1 на l_{iy} выполняется условие малости обхвата, $i = 1, \dots, s$. Следовательно, $\int\limits_{\gamma_{2y}} \rho_1\, ds \geqslant \alpha_1$ для почти всех y, $|y| < r$. Это и теорема Фубини [6] дают оценку

$$\int\limits_{\gamma} \rho_{1r}\, ds \geqslant \int\limits_{\gamma_2} \rho_{1r}(x)\, ds = \frac{1}{|B(0,r)|} \int\limits_{B(0,r)} \int\limits_{\gamma_2} \rho_1(x+y)\, ds$$
$$= \frac{1}{|B(0,r)|} \int\limits_{B(0,r)} \int\limits_{\gamma_{2y}} \rho_1\, ds \geqslant \alpha_1.$$

В силу непрерывности ρ_{1r}, отсюда сразу получим, что

$$\int\limits_{\gamma} \rho_{1r}\, ds \geqslant \alpha_1$$

для всех

$$\gamma \in H_1(j) = \left\{\gamma \in H_1 : d(\gamma \cap (G \setminus (F_{01}^2 \cup F_{11}^2)), \partial(G \setminus (F_{01}^1 \cup F_{11}^1))) > \frac{1}{j}\right\}.$$

Заменяя теперь в предыдущих выкладках F_{01} на F_{0i}, F_{11} на F_{1i}, F_{s1}^{κ} на F_{si}^{κ}, получим аналогичную ρ_{1r} функцию ρ_{ir}, где $s = 0, 1, \kappa = 1, 2, 3, i = 1, \dots, n_1$. Для ρ_{ir} выполняются неравенства

$$\int\limits_{\gamma} \rho_{ir}\, ds \geqslant \alpha_i \tag{8}$$

для всех

$$\gamma \in H_i(j) = \left\{\gamma \in H_i : d(\gamma \cap (G \setminus (F_{0i}^2 \cup F_{1i}^2)), \partial(G \setminus (F_{0i}^1 \cup F_{1i}^1))) > \frac{1}{j}\right\},$$

$$\int\limits_{\gamma} \rho_{\widetilde{i}r}\, ds \geqslant \alpha_{\widetilde{i}} \tag{9}$$

для всех $\gamma \in H_{\widetilde{i}}(k)$, $\widetilde{i} = n_1 + 1, \dots, m$, так как для $\gamma \in H_{\widetilde{i}}(k)$ при $\widetilde{i} = n_1 + 1, \dots, m$ подобные неравенства выполняются в силу того, что $d(\gamma, G \setminus (F_{01}^1 \cup F_{11}^1)) > \frac{1}{2k}$. Отсюда и из леммы 2 следует, что

$$\frac{\rho_{ir}}{\alpha_i} \in \mathrm{adm}_{p,w}(\Gamma(F_{0i}, F_{1i}, G))$$

и

$$\frac{\rho_{\widetilde{i}r}}{\alpha_{\widetilde{i}}} \in \mathrm{adm}_{p,w} H_{\widetilde{i}}(j),$$

где $i = 1, \ldots, n_1, \widetilde{i} = n_1 + 1, \ldots, m$. Тогда все $m_{p,w}(H_i) < \infty$, $i = 1, 2, \ldots, m$, значит, в силу (5), $m_{p,w}(\alpha H) < \infty$.

Переходя затем в (8)–(9) к пределу при $r \to 0$, из теоремы Фюгледе о связи сходимости в среднем со сходимостью по мерам [8], получим, что $\int\limits_\gamma \rho_i\, ds \geqslant \alpha_i$ для $m_{p,w}$-почти всех $\gamma \in H_i(j)$, $\int\limits_\gamma \rho_{\widetilde{i}}\, ds \geqslant \alpha_{\widetilde{i}}$ для $m_{p,w}$-почти всех $\gamma \in H_{\widetilde{i}}(k)$, $1 \leqslant i \leqslant n_1, n_1 < \widetilde{i} \leqslant m$.

Наконец, совершая предельный переход при $j \to \infty$ и заменяя ρ_i на $\widetilde{\rho} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n_1} \rho_i$, установим, что $\int\limits_\gamma \widetilde{\rho}\, ds \geqslant \alpha_i$ для $m_{p,w}$-почти всех $\gamma \in H_i$, $\int\limits_\gamma \widetilde{\rho}\, ds \geqslant \alpha_{\widetilde{i}}$ для $m_{p,w}$-почти всех $\gamma \in H_{\widetilde{i}}(k)$, $1 \leqslant i \leqslant n_1, n_1 < \widetilde{i} \leqslant m$. Отсюда

$$m_{p,w}(\alpha H) = m_{p,w}(\alpha H(k)) + o(1) \leqslant \int\limits_G \widetilde{\rho}^p w\, dx + o(1) = m_{p,w}(\alpha \widetilde{H}) + o(1),$$

где $o(1) \to 0$ при $k \to \infty$, что и доказывает теорему.

Литература

1. В. В. Асеев, *NED-множества, лежащие в гиперплоскости.* — Сиб. мат. ж. **50**, No. 5 (2009), 760–775.
2. Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, *Достаточность семейства ломаных в методе модулей и устранимые множества.* — Сиб. мат. ж. **51**, No. 6 (2010), 1028–1042.
3. Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, *Некоторые свойства емкости и модуля поликонденсатора и устранимые множества.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **392** (2011), 84–94.
4. Ф. И. Иванов, В. А. Шлык, *О нуль-множествах для экстремальных длин, Аналитическая теория чисел и теория функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **383** (2010), 86–96.
5. Г. В. Кузьмина, *Общая теоерма коэффициентов Дженкинса и метод модулей семейств кривых.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **429** (2014), 140–156.
6. Л. К. Эванс, Р. Ф. Гариепи, *Теория меры и тонкие свойства функций*, Новосибирск, 2002.
7. L. Ahlfors, A. Beurling, *Conformal invariants and function-theoretic null-sets.* — Acta Math. **83** (1950), 101–129.
8. B. Fuglede, *Extremal length and functional completion.* — Acta Math. **126**, No. 3 (1957), 171–219.
9. M. Ohtsuka, *Extremal length and precise functions*, GAKUTO international series, Gakkōtosho, 2003.

Shlyk V. A., Yakovlev A. A. Modules of space configuration and removable sets.

The sufficiency of the family of broken lines in calculating the module of configuration is established. Also it is proved that the sets that are removable for the condenser module are also removable for the configuration module.

Владивостокский филиал
Российской таможенной академии,
ул. Стрелковая, 16в, Владивосток, Россия
E-mail: shlykva@yandex.ru

Дальневосточный федеральный университет,
ул. Суханова, 8, Владивосток, Россия
E-mail: yakovlev.anatol@mail.ru

Поступило 4 июля 2016 г.