Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 449, 2016 г.

О. М. Фоменко

ЦЕЛЫЕ ТОЧКИ В МНОГОМЕРНЫХ ШАРАХ

§1. Введение

Пусть $r_k(n)$, где $k \geqslant 2$, – число представлений неотрицательного целого n суммой k квадратов целых чисел;

$$A_k(x) := \sum_{0\leqslant n\leqslant x} r_k(n) = 1 + \sum_{1\leqslant n\leqslant x} r_k(n)$$

означает число целых точек $(a_1, \dots, a_k)$ в k-мерном шаре

$$y_1^2 + \dots + y_k^2 \leqslant x;$$

$$V_k(x) := \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)} x^{k/2}$$

– объем этого шара.

Ниже будем рассматривать распределение целых точек в шарах размерности $k \geqslant 4$; трехмерный шар изучается в §3 настоящей работы. Отметим, что случаям $k = 2$ и 3 специально посвящена наша работа [1].

Введем обозначения:

$$P_k(x) := A_k(x) - V_k(x),$$

$$E^{(k)}(x) := P_k(x) - 1.$$

Перечислим известные оценки остаточных членов. Вальфиш [2] показал, что

$$A_4(x) = \frac{\pi^2}{2} x^2 + P_4(x), \quad P_4(x) = O(x \log^{\frac{2}{3}} x).$$

В случае $k > 4$ была получена оценка (Вальфиш, Ландау, см. [3])

$$P_k(x) = O(x^{\frac{k}{2}-1}).$$

Этот результат неулучшаем, поскольку, как показал Ярник (см. [3, с. 162]),

$$P_k(x) = \Omega(x^{\frac{k}{2}-1}).$$

Ключевые слова: многомерные шары, интегральные средние значения, дискретные средние значения.

Известны дальнейшие уточнения (Мюнц, Петерсон):

$$P_k(x) = \Omega_\pm(x^{\frac{k}{2}-1});$$

подробности см. в книге Вальфиша [4].

В случае $k = 4$ Вальфиш доказал

$$P_k(x) = \Omega(x \log\log x)$$

(уточнение $P_k(x) = \Omega_\pm(x \log\log x)$ получено в [5]).

Крамер нашел асимптотику для

$$M_2(x) := \int\limits_0^x P_2^2(y)\,dy;$$

Ландау улучшил в формуле Крамера остаточный член. Подробности см. в [3, с. 85].

Ярник [6] изучал интегральные средние квадратичные значения величин $P_k^2(y)$ сразу для эллипсоидов $Q(u) \leqslant x$ размерности $k \geqslant 3$ с целыми коэффициентами; обозначим

$$M_k(x) := \int\limits_0^x P_k^2(y)\,dy.$$

Ниже H – положительное число, зависящее только от Q.

Как доказал Ярник:

$$M_3(x) = Hx^2 \log x + O(x^2 \log^{\frac{1}{2}} x), \tag{1.1}$$

$\log^{\frac{1}{2}} x$ убрал (для шара) Лау [7];

$$M_4(x) = Hx^3 + O(x^{\frac{5}{2}} \log x), \tag{1.2}$$

$\log x$ убрал (для шара) Вальфиш [4];

$$M_5(x) = Hx^4 + O(x^3 \log^2 x);$$

$$M_k(x) = Hx^{k-1} + O(x^{k-2}) \quad \text{для} \;\; k > 5.$$

В работе [8] для эллипсоидов ($k \geqslant 5$) с целыми коэффициентами $Q(u) \leqslant x$ Ярник изучал дискретные средние квадратичные значения. Имеем для целых $x > 0$

$$\sum_{n=1}^{x} P_k^2(n) = H' x^{k-1} + f(x), \tag{1.3}$$

где

$$\begin{aligned} &f(x) = \Omega(x^{k-2}), \\ &f(x) = O(x^{\frac{3}{4}k}\log x) \quad \text{для} \quad 5 \leqslant k \leqslant 7, \\ &f(x) = O(x^{k-2}\log x) \quad \text{для} \quad k = 8, \\ &f(x) = O(x^{k-2}) \quad \text{для} \quad k > 8; \end{aligned}$$

H' – положительная константа, зависящая только от Q.

Ниже мы рассматриваем только шары. Целью настоящей работы является получение асимптотики для суммы

$$\sum_{0 \leqslant n \leqslant x} P_k(n) \tag{1.4}$$

в случае $k \geqslant 4$. Сумма (1.4) в случае $k = 3$ трактовалась в [1], новые подходы обсуждаются в §3. Что касается случая $k = 2$, то, как было замечено в [1], он легко трактуется с помощью формулы Ландау (см. [3, с. 110]), в которой разлагается в ряд интеграл

$$\int_0^x P_2(y)\,dy.$$

Можно также воспользоваться формулой Вороного–Харди (в случае $\rho = 1$): для $\rho \geqslant 1$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho!}\sum_{1 \leqslant n \leqslant x}(x-n)^{\rho} r_2(n) \\ &\quad = \pi\frac{x^{\rho+1}}{(\rho+1)!} - \frac{x^{\rho}}{\rho!} + \frac{x^{\frac{\rho+1}{2}}}{\pi^{\rho}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_2(n)}{n^{\frac{\rho+1}{2}}}J_{\rho+1}(2\pi\sqrt{nx}), \end{aligned} \tag{1.5}$$

причем в каждом интервале $0 < x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ ряд абсолютно и равномерно сходится.

В случаях $k \geqslant 3$ применение аналога формулы (1.5), впервые доказанного Ландау (см. [3, с. 25]), затруднительно, поэтому для доказательства наших результатов воспользуемся современными теоремами о поведении в критической полосе дзета-функции Эпштейна $\zeta_k(s)$, ассоциированной с суммой k квадратов (см. [9]).

Наконец, мы используем полученные результаты при нахождении дискретных средних значений типа (1.3) в случаях $k = 3, 4$, не рассмотренных Ярником [8].

§2. Основные результаты

В настоящем параграфе доказываются теорема 1 и предложение 1.

Теорема 1. *Для $k \geqslant 4$ справедливо соотношение*

$$\sum_{0 \leqslant n \leqslant x} P_k(n) = \frac{\pi^{\frac{k}{2}} x^{\frac{k}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} + O\left(x^{\frac{k-1}{2}+\varepsilon}\right). \tag{2.1}$$

Прежде чем начинать доказательство, рассмотрим дзета-функцию Эпштейна $\zeta_k(s)$, ассоциированную с суммой $k(\geqslant 2)$ квадратов,

$$\zeta_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_k(n)}{n^s} \quad \left(\sigma > \frac{k}{2}\right),$$

где $s = \sigma + it$. $\zeta_k(s)$ допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость с единственной особенностью – простым полюсом в точке $s = k/2$ с вычетом $\pi^{k/2}/\,\Gamma(k/2)$. Имеет место функциональное уравнение

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta_k(s) = \pi^{-(\frac{k}{2}-s)}\Gamma\left(\frac{k}{2}-s\right)\zeta_k\left(\frac{k}{2}-s\right).$$

Критической полосой для $\zeta_k(s)$ является полоса $0 \leqslant \sigma \leqslant k/2$; полуплоскость абсолютной сходимости: $\sigma > k/2$.

Доказательство. Доказательство (2.1) начинаем с соотношения

$$\sum_{1 \leqslant n < x} \left(\sum_{1 \leqslant m \leqslant n} r_k(m) \right) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant x} (x-m) r_k(m), \tag{2.2}$$

в котором предполагается, что x – целое положительное число.

Левая часть соотношения (2.2) равна

$$\sum_{1 \leqslant n < x} \left\{ \frac{\pi^{\frac{k}{2}} n^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} + E^{(k)}(n) \right\} = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} \sum_{1 \leqslant n < x} n^{\frac{k}{2}} + \sum_{1 \leqslant n < x} E^{(k)}(n).$$

По формуле Эйлера–Маклорена [10, с. 26],

$$\sum_{1 \leqslant n < x} n^{\frac{k}{2}} = \int_0^x t^{\frac{k}{2}}\, dt - \frac{1}{2} x^{\frac{k}{2}} + O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right);$$

тем самым, левая сторона (2.2) равна

$$\frac{\pi^{\frac{k}{2}}x^{\frac{k}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)\cdot\left(\frac{k}{2}+1\right)}-\frac{\pi^{\frac{k}{2}}x^{\frac{k}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}+O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right)+\sum_{1\leqslant n<x}E^{(k)}(n). \qquad (2.3)$$

По формуле Перрона, правая часть (2.2) равна

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{k}{2}+1-i\infty}^{\frac{k}{2}+1+i\infty}\frac{\Gamma(s)\zeta_k(s)}{\Gamma(s+2)}x^{s+1}\,ds=:I_1.$$

Сдвигая прямую интегрирования влево от полюса $\zeta_k(s)$, $s=\frac{k}{2}$, на прямую $\sigma=\alpha$ (которую ниже выберем специальным образом), получаем по теореме Коши о вычетах

$$I_1=\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})}\,\frac{\Gamma(\frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2}+2)}x^{\frac{k}{2}+1}+O\left\{x^{\alpha+1}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{|\zeta_k(\alpha+it)|}{1+t^2}\,dt\right\}. \qquad (2.4)$$

Из результатов работы [9, с. 218] следует, что если $\delta>0$ – константа и $k\geqslant 3$, то при выполнении неравенств

$$\frac{1}{2}+\varepsilon_0\leqslant\frac{k-1}{2}-\delta\leqslant\frac{k-1}{2}-\varepsilon_0$$

справедлива оценка

$$\frac{1}{T}\int\limits_{T}^{2T}\left|\zeta_k\left(\frac{k-1}{2}-\delta+it\right)\right|dt\ll T^{\delta}; \qquad (2.5)$$

здесь $\varepsilon_0>0$ – достаточно малая константа. Положим $\delta=1-\varepsilon_1$, $\alpha=\frac{k-1}{2}-\delta=\frac{k-3}{2}+\varepsilon_1$, где в случае $k=4$ $\varepsilon_1=\varepsilon_0$, а для $k\geqslant 5$ ε_1 – сколь угодно малая положительная константа.

"Диадическое" вычисление позволяет получить, используя (2.5), оценку

$$\int\limits_{-T}^{T}\frac{\left|\zeta_k\left(\frac{k-3}{2}+\varepsilon_1+it\right)\right|}{1+t^2}\,dt\ll 1,$$

где $T>C$ ($C>0$ – некоторая константа), и тем самым доказать сходимость интеграла при $T=\infty$. Следовательно, остаток в (2.4) оценивается как

$$O\left(x^{\frac{k-1}{2}+\varepsilon_1}\right).$$

Приравнивая (2.3) и правую часть (2.4), доказываем теорему 1. □

С помощью формулы Ярника (1.2) и теоремы 1 получим теперь асимптотику (1.3) при $k=4$.

Предложение 1. *Справедливо соотношение*

$$\sum_{0\leqslant n\leqslant x} P_4^2(n) = H'x^3 + O(x^{\frac{5}{2}+\varepsilon}).$$

Доказательство. Будем считать $x>0$ целым числом. Имеем

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^x P_4^2(y)\,dy &= \int\limits_0^x \Big(A_4(y) - \frac{\pi^2}{2}y^2\Big)^2\,dy \\
&= \sum_{n=0}^{x-1} \bigg\{ \int\limits_{[n,n+1]} A_4^2(y)\,dy - \int\limits_{[n,n+1]} A_4(y)\pi^2 y^2\,dy + \int\limits_{[n,n+1]} \frac{\pi^4}{4} y^4\,dy \bigg\} \\
&= \sum_{0\leqslant n\leqslant x-1} \Big\{ A_4^2(n) - A_4(n)\pi^2 \int\limits_{[n,n+1]} y^2\,dy + \frac{\pi^4}{4} \int\limits_{[n,n+1]} y^4\,dy \Big\} \\
&= S_1 - S_2 + S_3,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{0\leqslant n\leqslant x-1} A_4^2(n), \\
S_2 &= \sum_{0\leqslant n\leqslant x-1} A_4(n)\pi^2\Big(n^2+n+\frac{1}{3}\Big), \\
S_3 &= \frac{\pi^4}{4}\Big\{ \sum_{0\leqslant n\leqslant x-1} n^4 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + O(x^2) \Big\}.
\end{aligned}$$

Остается вычислить сумму S_2. Имеем

$$S_2 = S_2^{(0)} + S_2^{(1)} + S_2^{(2)},$$

где

$$S_2^{(0)} = \sum_{0\leqslant n\leqslant x-1} A_4(n)\pi^2 n^2,$$

$$S_2^{(1)} = \pi^2 \sum_{0\leqslant n\leqslant x-1} A_4(n)n,$$

$$S_2^{(2)} = \frac{\pi^2}{3}\sum_{0\leqslant n\leqslant x-1} A_4(n) = \frac{\pi^2}{3}\sum_{0\leqslant n\leqslant x-1}\Bigl\{\frac{\pi^2 n^2}{2} + O\bigl(n\log^{\frac{2}{3}} n\bigr)\Bigr\}$$

$$= \frac{\pi^4}{18}x^3 + O\bigl(x^{2+\varepsilon}\bigr).$$

Вычислим сумму

$$S_2^{(1)} = \pi^2 \sum_{0\leqslant n\leqslant x-1}\Bigl\{\frac{\pi^2}{2}n^2 + P_4(n)\Bigr\}n$$

$$= \frac{\pi^4}{2}\sum_{0\leqslant n\leqslant x-1} n^3 + \pi^2\sum_{0\leqslant n\leqslant x-1} P_4(n)n =: A + B,$$

где

$$A = \frac{\pi^4}{2}\Bigl\{\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}x^3 + O(x^2)\Bigr\}.$$

Сумму B вычисляем с помощью абелева суммирования и теоремы 1:

$$B = \pi^2\Bigl\{-\int_0^{x-1}\Bigl(\sum_{0<n\leqslant y} P_4(n)\Bigr)\cdot 1\cdot dy + \sum_{0<n\leqslant x-1} P_4(n)\cdot(x-1)\Bigr\}$$

$$= \pi^2\Bigl\{-\int_0^{x-1}\Bigl(\frac{\pi^2}{4}y^2 + O\bigl(y^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\bigr)\,dy\Bigr) + \Bigl[\frac{\pi^2}{4}(x-1)^2 + O\bigl(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\bigr)\Bigr](x-1)\Bigr\}$$

$$= \pi^2\Bigl\{-\frac{\pi^2}{4}\frac{(x-1)^3}{3} + O\bigl(x^{\frac{5}{2}+\varepsilon}\bigr) + \frac{\pi^2}{4}(x-1)^3 + O\bigl(x^{\frac{5}{2}+\varepsilon}\bigr)\Bigr\}.$$

Отсюда уже легко показать, что

$$\int_0^x P_4^2(y)\,dy = \sum_{0\leqslant n\leqslant x-1} P_4^2(n) - \frac{\pi^4}{18} + O\bigl(x^{\frac{5}{2}+\varepsilon}\bigr).$$

Поскольку имеет место формула Ярника (1.2), предложение 1 доказано, причем $H' = H + \frac{\pi^4}{18}$. □

Отметим, что в книге [4] константы H в асимптотиках для

$$\int_0^x P_4^2(y)\,dy$$

вычислены для всех шаров размерности $k \geqslant 4$.

§3. Случай трехмерного шара

В работе [1] было получено соотношение

$$\sum_{0\leqslant n\leqslant x} P_3(n) = \frac{2}{3}\pi x^{\frac{3}{2}} + \Psi_3(x), \tag{3.1}$$

где

$$\Psi(x) = O\bigl(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon}\bigr).$$

Доказательство основано на тех же соображениях, что и доказательство теоремы 1. При рассмотрении интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\zeta_3(s)\,ds$$

мы сдвигаем прямую интегрирования на $\sigma = 1/4+\varepsilon_1+it$ и применяем оценку

$$\int_{T/2}^{T} \Bigl|\zeta_3\Bigl(\frac{1}{4}+\varepsilon_1+it\Bigr)\Bigr|\,dt \ll T^{2-\varepsilon_2}; \tag{3.2}$$

здесь ε_1 и ε_2 – сколь угодно малые положительные константы и ε_2 зависит от ε_1.

Оценка (3.2) не содержится в работе [9], однако мы используем результаты из [9] вместе с теоремой о выпуклости средних значений аналитических функций [11, с. 149] для доказательства (3.2).

Оценка остаточного члена в (3.1) является предельной для предложенного метода.

Дальнейшее улучшение возможно при разложении $\Psi_3(x)$ в ряды типа Вороного (см. [12, 13]). Здесь мы ограничимся лишь вводными замечаниями.

Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – две последовательности комплексных чисел, не равные тождественно нулю. Пусть $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ – две строго возрастающие последовательности положительных чисел, стремящихся к бесконечности. Пусть

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{-s}$$

и

$$\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mu_n^{-s}$$

– ряды, сходящиеся абсолютно в некоторопых полуплоскостях комплексной плоскости. Определим

$$\Delta(s) = \prod_{\nu=1}^{N} \Gamma\bigl(\alpha_\nu s + \beta_\nu\bigr).$$

Пусть $\delta \in \mathbb{R}$ и $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ – мероморфные функции на всей комплексной плоскости, удовлетворяющие функциональному уравнению

$$\Delta(s)\varphi(s) = \Delta(\delta - s)\psi(\delta - s).$$

Существует компактное множество S, содержащее все особенности функции $\Delta(s)\varphi(s)$; дальнейшие требования см. в [12].

Рассмотрим сумматорные функции (суммы Рисса)

$$A_\rho(x) = {\sum_{\lambda_n \leqslant x}}' a_n (x - \lambda_n)^\rho,$$

где Σ' означает, что последний член в сумме равен $\frac{1}{2}a_n$, если $\rho = 0$ и $x = \lambda_n$.

Нас интересуют тождество для $A_\rho(x)$, включающее “главный член”, который представляет собой вычетную функцию, и “остаточный член” (ряд из обобщенных функций Бесселя); подробности см. в [12, 14, 15].

Определим для $x > 0$

$$A_\rho(x) = Q_\rho(x) + E_\rho(x),$$

где

$$Q_\rho(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{\Gamma(s)\varphi(s)x^{s+p}}{\Gamma(s+\rho+1)}\, ds,$$

C_ρ – кривая, окружающая S.

Общую картину проясним на примере $\zeta_3(s)$. Пусть

$$\begin{aligned}&\varphi(s)=\psi(s)=\sum_{n=1}^{\infty} r_3(n)(\pi n)^{-s}=\pi^{-s}\zeta_3(s);\\ &\lambda_n=\mu_n=\pi n;\\ &\Delta(s)=\Gamma(s),\quad \Delta(s)\varphi(s)=\Delta\Big(\frac{3}{2}-s\Big)\psi\Big(\frac{3}{2}-s\Big).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Множество особенностей S для рассматриваемой функции $\Delta(s)\varphi(s)$ состоит из двух простых полюсов в точках $s=\frac{3}{2}$ и $s=0$;

$$Q_\rho(x)=2\pi\cdot\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\rho+\frac{5}{2})}x^{\frac{3}{2}+\rho}-\frac{x^\rho}{\Gamma(\rho+1)}\zeta_3(0).$$

Очевидно, изучение $\Psi_3(x)$ в (3.1) эквивалентно изучению $E_1(x)$.

Лау и Тзанг [13], опираясь на общие результаты Хафнера [12], для случая (3.3) вычислили величину $E_\rho(x)$, $0<\rho\leqslant 1$:

$$\begin{aligned}E_\rho(x)&=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_3(n)}{\mu_n^{1+\rho/2}}\cos\Big(2\sqrt{\mu_n x}+(-1-\rho/2)\pi\Big)\\ &+e_1(\rho)x^{\frac{1}{2}\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_3(n)}{\mu_n^{3/2+\rho/2}}\cos\Big(2\sqrt{\mu_n x}+(-\frac{1}{2}-\frac{\rho}{2})\pi\Big)+O\Big(x^{\frac{1}{2}\rho-\frac{1}{2}}\Big),\end{aligned}\tag{3.4}$$

где $e_1(\rho)$ – квадратный многочлен от ρ и O-константа от ρ не зависит. Как доказал Хафнер [12], первая сумма в (3.4) сходится равномерно на любом замкнутом интервале в $(0,\infty)$; вторая сумма сходится абсолютно для любого фиксированного $\rho>0$.

Последнее, кстати, очевидно в силу хорошо известной оценки

$$r_3(n)\ll n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Пользуясь приемами из [13], примененным к разложению в (3.4), можно установить $\Omega_\pm$-оценки для остаточного члена $\psi_3(x)$ с хорошей локализацией появления экстремальных значений.

Предложение 2. *Для любого достаточно большого $L\leqslant\sqrt{X}$ мы имеем*

$$\sup_{v\in[X,\,X+L\sqrt{X}]}\pm E_1(v)\gg X.$$

(*Здесь* $\sup\pm E_1(v)$ *означает одновременно* $\sup\,(E_1(v))$ *и* $\sup\,(-E_1(v))$).

Отметим, в случае проблемы шара подобная локализация для $E_0(v)$ установлена в [13], а в случае проблемы круга для соответствующего остатка – Ландау [3, см. 93].

Закончим настоящий параграф нахождением асимптотики для дискретного среднего

$$\sum_{0\leqslant n\leqslant x} P_3^2(n). \tag{3.5}$$

Этот случай не рассматривался Ярником в работе [8].

Соединяя асимптотику Ярника (1.1) для $M_3(x)$ (или слегка более точную асимптотику Лау [7]) с нашим результатом (3.1), мы сможем изучить дискретное среднее (3.5).

Напомним результат Лау:

$$M_3(x) := \int\limits_0^x P_3^2(y)\,dy = Hx^2\log x + O(x^2). \tag{3.6}$$

Предложение 3. *Пусть $x > 0$ – целое число, тогда*

$$\sum_{0\leqslant n\leqslant x} P_3^2(n) = H'x^2\log x + O(x^2).$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^x P_3^2(y)\,dy = \int\limits_0^x \Big(A_3(y) - \frac{4}{3}\pi y^{\frac{3}{2}}\Big)^2\,dy\\
&= \sum_{n=0}^{x-1}\Big\{\int\limits_{[n,n+1]} A_3^2(y)\,dy - 2\cdot\frac{4}{3}\pi\int\limits_{[n,n+1]} A_3(y)y^{\frac{3}{2}}\,dy + \frac{4^2}{3^2}\pi^2\int\limits_{[n,n+1]} y^3\,dy\Big\}\\
&= \sum_{0\leqslant n\leqslant x-1}\Big\{A_3^2(n) - 2\cdot\frac{4}{3}\pi A_3(n)\int\limits_{[n,n+1]} y^{\frac{3}{2}}\,dy + \frac{4^2}{3^2}\pi^2\int\limits_{[n,n+1]} y^3\,dy\Big\}\\
&=: S_1 - S_2 + S_3,
\end{aligned}$$

где

$$S_1 = \sum_{0\leqslant n\leqslant x-1} A_3^2(n),$$
$$S_2 = \sum_{0\leqslant n\leqslant x-1} \frac{8}{3}\pi A_3(n)\Big\{n^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}n^{\frac{1}{2}} + O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Big\},$$
$$S_3 = \frac{4^2}{3^2}\pi^2\Big\{\sum_{0\leqslant n\leqslant x-1} n^3 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + O(x)\Big\}.$$

Остается вычислить сумму S_2. Имеем

$$S_2 = S_2^{(0)} + S_2^{(1)} + O(x^2),$$

где

$$S_2^{(0)} = \sum_{0\leqslant n\leqslant x-1} \frac{8}{3}\pi A_3(n) n^{3/2},$$
$$S_2^{(1)} = 2\pi \sum_{0\leqslant n\leqslant x-1} A_3(n) n^{\frac{1}{2}},$$

Последнюю сумму разобьем на две:

$$S_2^{(1)} = 2\pi\left\{\frac{4}{3}\pi \sum_{0\leqslant n\leqslant x-1} n^2\right\} + 2\pi \sum_{0\leqslant n\leqslant x-1} P_3(n) n^{\frac{1}{2}} \quad =: \quad A + B,$$

где

$$A = \frac{8}{3}\pi^2\left\{\frac{x^3}{3} + O(x^2)\right\} = \frac{8}{9}\pi^2 x^3 + O(x^2).$$

Сумму B вычисляем с помощью абелева суммирования и нашего результата (3.1):

$$B = 2\pi\Big\{-\int_0^{x-1}\Big(\sum_{0<n\leqslant y} P_3(n)\Big)\cdot\frac{1/2}{\sqrt{y}}\cdot dy + \sum_{0<n\leqslant x-1} P_3(n)\cdot(x-1)^{1/2}\Big\}$$
$$= 2\pi\left\{-\int_0^{x-1}\left(\frac{2}{3}\pi y^{\frac{3}{2}} + \Psi_3(y)\right)\frac{1/2}{\sqrt{y}}\,dy + \left[\frac{2}{3}\pi(x-1)^{\frac{3}{2}} + \Psi_3(x-1)\right](x-1)^{\frac{1}{2}}\right\}$$
$$= \pi^2(x-1)^2 + O\big((x-1)^{\frac{7}{4}+\varepsilon}\big).$$

Упрощая, имеем

$$\int_0^x P_3^2(y)\,dy = \sum_{0\leqslant n\leqslant x-1} P_3^2(n) + O(x^2).$$

Вместе с (3.6) это доказывает предложение 3. □

Литература

1. О. М. Фоменко, *Целые точки в круге и шаре.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **418** (2013), 198–220.
2. A. Walfisz, *Weylsche Exponentialsummen in der Neueren Zahlentheorie*, Berlin, 1963.
3. E. Landau, *Ausgewählte Abhandlungen zur Gitterpunktlehre*, Berlin, 1962.
4. А. З. Вальфиш, *Целые точки в многомерных шарах*, Тбилиси, 1959.
5. S. D. Adhikari, Y.-F. S. Pétermann, *Lattice points in ellipsoids.* — Acta Arithm. **59** (1991), 329–338.
6. V. Jarnik, *Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre,* 5 *Abhandlung.* — Časopis pro pěst. mat. a fys. **69** (1940), 148–174.
7. Y.-K. Lau, *On the mean square formula of the error term for a class of arithmetical functions.* — Monatsh. Math. **128** (1999), 111–129.
8. V. Jarnik, *Sur une fonction arithmétique.* — Věstnik Král. Čes. Sp. Nauk (1930), 1–13.
9. K. Ramachandra, A. Sankaranarayanan, *Hardy's theorem for zeta-functions of quadratic forms.* — Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) **106**, No. 3 (1996), 217–226.
10. М. Абрамович, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, М., 1979.
11. E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function.* 2nd edn, revized by D. R. Heath-Brown, New York, 1986.
12. J. L. Hafner, *On the representation of the summatory function of a class of arithmetical functions.* Analytic Number Theory, M. I. Knopp, ed., Springer Lect. Notes Math. **899** (1981), 148–165.
13. Y.-K. Lau, K.-M. Tsang, *Large values of error terms of a class of arithmetical functions.* — J. reine angew, Math. **544** (2002), 25–38.
14. K. Chandrasekharan, R. Narasimhan, *Hecke's functional equation and arithmetical identities.* — Ann. Math. **74** (1961), 1–23.
15. K. Chandrasekharan, R. Narasimhan, *Functional equations with multiple gamma factors and the average order of arithmetical functions.* — Ann. Math. **76** (1962), 93–136.

Fomenko O. M. Lattice points in many-dimensional balls.

Let $P_k(n)$ be the difference of the number of points of the integer lattice contained in the ball $y_1^2 + \cdots + y_k^2 \leqslant n$ and the volume of this ball.

We investigate the asymptotic behavior of the sums $\sum_{n\leqslant x} P_k(n)$ $(k \geqslant 4)$, $\sum_{n\leqslant x} P_3^2(n)$, and $\sum_{n\leqslant x} P_4^2(n)$ as $x \to +\infty$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 17 октября 2016 г.