Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 449, 2016 г.

П. А. Пугач, В. А. Шлык

КОНДЕНСАТОРЫ И ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ОТКРЫТЫЕ МНОЖЕСТВА НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

§1. Введение и основные определения

Метод модулей семейств кривых в евклидовом пространстве R^n, $n \geqslant 2$, широко используется как при решении экстремальных задач геометрической теории функций (см. [11]), так и при описании устранимых множеств некоторых классов функций (см. [17]).

В ряде случаев модуль семейства кривых вычисляется как модуль соответствующего конденсатора, или,что одно и то же, как емкость этого конденсатора [6].

Недавно в серии своих работ В. Н. Дубинин [7, 8], применяя метод симметризации, дал интересные приложения емкости конденсатора, расположенного на римановой поверхности, к теории многолистных функций.

В настоящей работе рассматриваются более общие конденсаторы на римановой поверхности. В §2 собраны простейшие свойства модуля семейства кривых, емкости конденсатора и доказано одно свойство непрерывности модуля конденсатора.

В §3 установлена теорема о равенстве модуля и емкости конденсатора.

В §4 показано, что NED-множества не влияют на модуль конденсатора и дан критерий функциональной эквивалентности двух открытых множеств на римановой поверхности.

Всюду ниже под римановой поверхностью понимается поверхность $\mathcal{R}$, склеенная из конечного или счетного числа областей замкнутой комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ таким образом, чтобы выполнялись условия: проекция каждой точки поверхности $\mathcal{R}$ совпадает с точкой склеиваемой области; окрестность каждой точки $\mathcal{R}$ представляет собой или однолистный круг, или конечнолистный круг с единственной точкой разветвления в его центре (подробнее см. [5, гл. 4

Ключевые слова: емкость и модуль конденсатора,риманова поверхность, пространства Соболева.

§3]). Граничные точки склеиваемых областей, не задействованные в склеивании, порождают граничные точки поверхности $\mathcal{R}$.

Кривой γ в $\mathcal{R}$ назовем образ числового интервала (a, b) или отрезка $[a, b]$ при непрерывном отображении $W = W(t)$ его в $\mathcal{R}$. В дальнейшем считаем, что отображение $W = W(t)$ не является постоянным ни на одном интервале и задает параметризацию кривой γ. Операция проектирования $W \to \operatorname{pr} W = w$ индуцирует на поверхности $\mathcal{R}$ евклидову метрику ds и сферическую метрику dq, что позволяет говорить о длине $s(\gamma)$, $q(\gamma)$ соответственно в евклидовой и сферической метрике.

Сферическое расстояние $d(W, W')$ между точками $W, W' \in \mathcal{R}$ определим как точную нижнюю грань длин в сферической метрике всех кривых $\gamma \subset \mathcal{R}$, где $W, W' \in \gamma$. Аналогично определим евклидово расстояние
$d_e(W, W')$.

Далее поверхность $\mathcal{R}$ рассматриваем как метрическое пространство $(\mathcal{R}, d(\cdot, \cdot))$ и пусть $\bar{F}$, ∂F, $\operatorname{int} F$ – соответственно замыкание, граница, внутренность множества $F \subset \mathcal{R}$ в топологии на $\mathcal{R}$, порожденной сферической метрикой.

Если множества $E, F \subset \mathcal{R}$, то обозначим $d_e(E, F) = \inf\{d_e(W, W') : W \in E, W' \in F\}$, $d_e(F) = \sup\{d_e(W, W') : W, W' \in F\}$ соответственно евклидово расстояние между E и F, евклидов диаметр множества F.

Для достаточно малого $\delta > 0$ обозначим через $B(W_0, \delta)$ однолистный круг радиуса δ с центром в точке W_0, если $\operatorname{pr} W_0 \neq \infty$, и однолистную внешность круга радиуса $1/\delta$ с центром в 0, если $\operatorname{pr} W_0 = \infty$ в случае обыкновенной точки $W_0 \in \mathcal{R}$; если W_0 – точка разветвления порядка m, то через $B(W_0, \delta)$ обозначим m-листный круг с центром в точке W_0 радиуса δ с единственной точкой разветвления в центре в случае конечной проекции точки W_0; если же проекция бесконечна, то $B(W_0, \delta)$ - m-листная внешность круга с центром в 0 радиуса $1/\delta$ с единственной точкой разветвления в W_0.

Множество $O(F, \delta) = \bigcup\limits_{W \in F} B(W, \delta)$ назовем δ-окрестностью множества $F \subset \mathcal{R}$, где F имеет компактное замыкание в $\mathcal{R}$.

Пусть в дальнейшем G – открытое множество в $\mathcal{R}$, $\bar{G}$ – компакт в $\mathcal{R}$. Конденсатором на $\bar{G}$ назовем набор множеств (F_0, F_1, G), где F_0, F_1 – непустые непересекающиеся компакты из $\bar{G}$. Пусть $\mathcal{R}_\infty = \{W \in \mathcal{R} : \operatorname{pr} W = \infty\}$, $\mathcal{R}_b = \{W \in \mathcal{R} : W$ – точка разветвления для $\mathcal{R}\}$. Тогда в силу компактности замыкания $\bar{G}$ множества $\bar{G} \cap \mathcal{R}_\infty$, $\bar{G} \cap \mathcal{R}_b$ – конечные множества.

Пусть γ – кривая в G и $W = W(t), a < t < b$, – её параметризация. Положим $T = \{t \in (a,b) : W(t) \notin \mathcal{R}_\infty\}$.Тогда T состоит из не более чем счетного числа непересекающихся интервалов T_i, $i \geqslant 1$, и параметризация $W(t), t \in T_i$, задает кривую $\gamma_i \subset G$. Если для всех $i \geqslant 1$ γ_i – локально спрямляемая кривая, то кривую γ назовем локально спрямляемой в G. Кроме того, если ρ – неотрицательная борелевская функция в G, то положим

$$\int\limits_\gamma \rho\, ds = \sum_i \int\limits_{\gamma_i} \rho\, ds$$

(подробнее см. [21, §2.2, p. 18]). Аналогично определим $\iint\limits_G \rho^2\, d\sigma$ как $\iint\limits_{G\setminus(\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b)} \rho^2\, d\sigma$, где элемент площади $d\sigma = dxdy$, если $\operatorname{pr} W = x + iy \in \mathbb{C}$.

Пусть дано некоторое семейство Γ локально спрямляемых кривых в G. Определим модуль семейства Γ как величину

$$m(\Gamma) = \inf_\rho \int\limits_G \rho^2\, d\sigma,$$

где инфимум берется по всем борелевским функциям $\rho : G \to [0; +\infty]$ таким, что $\int\limits_\gamma \rho\, ds \geqslant 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. Класс всех таких функций обозначим через $\operatorname{adm} \Gamma$.

Будем говорить, что кривая γ с параметризацией $W = W(t)$, $a < t < b$, соединяет множества E, F, если

$$\liminf_{t\to a} d(W(t), E) = \liminf_{t\to b} d(W(t), F) = 0.$$

Для конденсатора (F_0, F_1, G) обозначим через $\Gamma(F_0, F_1, G)$ семейство всех локально спрямляемых кривых $\gamma \subset G$, соединяющих множества F_0 и F_1. Тогда модуль конденсатора (F_0, F_1, G) определим как величину

$$m(F_0, F_1, G) = m(\Gamma(F_0, F_1, G)).$$

Емкость $C(F_0, F_1, G)$ конденсатора (F_0, F_1, G) определим равенством

$$C(F_0, F_1, G) = \inf \iint\limits_{G\setminus(F_0 \cup F_1)} |\nabla u|^2\, d\sigma,$$

где инфимум берется по всем допустимым функциям u, непрерывным в $G\setminus(F_0 \cup F_1)$, равным j в некоторой окрестности компакта F_j, $j = 0, 1$, и удовлетворяющих локально условию Липшица в $G_0 = G \setminus (F_0 \cup F_1)$. Последнее означает, что для любой точки из множества G_0 существует окрестность этой точки и положительное число L такие, что для любой пары точек W, W' из этой окрестности выполняется неравенство

$$|u(W) - u(W')| \leqslant L|\operatorname{pr} W - \operatorname{pr} W'|.$$

Класс всех таких допустимых функций для емкости $C(F_0, F_1, G)$ обозначим через $\operatorname{Adm}(F_0, F_1, G)$.

Учитывая, что $\mathcal{R} \setminus (\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b)$ – гладкое многообразие, введем следующий класс функций на $G' = G \setminus (\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b)$:

$$\mathcal{D}_2^1(G') = \{u \in C^\infty(G') : \iint\limits_{G'} |\nabla u|^2 \, d\sigma < \infty\}.$$

Для $u \in \mathcal{D}_2^1(G')$ положим

$$\|u\| = \|u\|_{L_2^1(G')} = \left(\iint\limits_{G'} |\nabla u|^2 \, d\sigma \right)^{1/2}.$$

Пространство Соболева $L_2^1(G')$ определим как пополнение $\mathcal{D}_2^1(G')$ по норме $\|\cdot\|$.

В случае, когда $G' = G$ – однолистное открытое множество на $\mathcal{R}$, то G' можно отождествить с $\operatorname{pr} G'$, класс $L_2^1(G')$ совпадает с классом $L_2^1(G)$ из [4, теорема 5.6, стр. 122] или с классом $BL^2(G)$ из [21].

Как нетрудно заметить (см. теорема 2), функция $u \in L_2^1(G')$ абсолютно непрерывна на почти всех прямолинейных отрезках, расположенных на однолистных кругах из G' и параллельных координатным осям. Ввиду сказанного, функция u имеет частные производные первого порядка почти всюду на G' (площадь по Лебегу проекции множества точек, где ∇u не существует, равна 0).

В дальнейшем положим $G_0' = G' \setminus (F_0 \cup F_1)$.

Если последовательность $u_k \in \operatorname{Adm}(F_0, F_1, G)$, $k \geqslant 1$,

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{G_0} |\nabla u_k|^2 \, d\sigma = C(F_0, F_1, G), \lim_{k\to\infty} \iint\limits_{G_0} |\nabla (u_k - u_0)|^2 \, d\sigma = 0,$$

где $u_0 \in L_2^1(G_0')$, то u_0 назовем экстремальной функцией для емкости $C(F_0, F_1, G)$.

§2. Свойства модулей семейств кривых и емкостей конденсаторов

2.1. Наиболее полное изложение свойств модуля семейств кривых и емкости конденсаторов в $\bar{R}^n = R^n \cup \{\infty\}$, $n \geqslant 2$, можно найти в [21]. К сожалению, нам не известны работы с описанием аналогичных свойств для модуля семейств кривых и емкости конденсаторов на римановой поверхности. С другой стороны, перенос этих свойств на случай римановых поверхностей является простым упражнением. Ниже приводим необходимую сводку результатов, считая, что далее рассматриваются семейства локально спрямляемых кривых на множестве G.

Будем говорить, что семейство Γ_1 длиннее семейства Γ_2, если для каждой кривой $\gamma_1 \in \Gamma_1$ найдется кривая $\gamma_2 \in \Gamma_2$ такая, что $\gamma_2 \subset \gamma_1$. В этом случае будем писать $\Gamma_1 > \Gamma_2$ ($\Gamma_2 < \Gamma_1$).

Предложение 1. *Если* $\Gamma_1 > \Gamma_2$, *то* $m(\Gamma_1) \leqslant m(\Gamma_2)$.

Предложение 2. *Если* $\Gamma = \bigcup\limits_k \Gamma_k$, *где* $\Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}$, $k \geqslant 1$, *то* $m(\Gamma) = \lim\limits_{k\to\infty} m(\Gamma_k)$.

Предложение 3 (Монотонность)**.** *Если* $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, *то* $m(\Gamma_1) \leqslant m(\Gamma_2)$.

Предложение 4. *Если* $\Gamma = \bigcup\limits_i \Gamma_i$, *то* $m(\Gamma) \leqslant \sum\limits_i m(\Gamma_i)$.

Семейство Γ кривых в G назовем исключительным, если $m(\Gamma) = 0$.

Предложение 5. *Семейство* Γ *исключительно тогда и только тогда, когда существует борелевская функция* $\rho : G \to [0; +\infty]$, $\iint\limits_G \rho^2\, d\sigma < \infty$, *такая, что* $\int\limits_\gamma \rho\, ds = \infty$ *для всех* $\gamma \in \Gamma$.

Предложение 6. *Семейство* Γ *всевозможных кривых, проходящих через произвольную точку* $W_0 \in G$, *исключительно.*

Доказательство. Пусть, например, $\operatorname{pr} W_0 = \infty$ и W_0 – точка разветвления порядка m, которую здесь отождествим с бесконечностью. Пусть $B\left(W_0, \frac{1}{i_0}\right)$ – соответствующая m-листная окрестность точки $W_0 = \infty$, где $i_0 \in N$ и для $W \in B\left(\infty, \frac{1}{i_0}\right) : |\operatorname{pr} W| > i_0, \bar{B}\left(\infty, \frac{1}{i_0}\right) \subset G$. Пусть Γ_i – семейство всех кривых, соединяющих в $B\left(\infty, \frac{1}{i}\right)$, $i \geqslant i_0$, точку W_0 с $\partial B\left(\infty, \frac{1}{i}\right)$. Тогда $\zeta = \frac{1}{\sqrt[m]{w}}$, $w = \operatorname{pr} W$, отображает конформно $B\left(\infty, \frac{1}{i}\right) \setminus \{W_0\}$ на кольцо $0 < |\zeta| < \frac{1}{\sqrt[m]{i}}$ и $m(\Gamma_i) = 0$.

Обозначим через Γ_i' подсемейство кривых $\gamma \in \Gamma$, каждая из которых соединяет точку W_0 и $\partial B\left(\infty, \frac{1}{i}\right)$, $i \geqslant i_0$. Очевидно, что каждая кривая $\gamma' \in \Gamma_i'$ содержит подкривую $\gamma \in \Gamma_i$. Поскольку $\Gamma = \bigcup\limits_{i \geqslant i_0} \Gamma_i'$, из предложения 5 сразу следует, что

$$m(\Gamma) \leqslant \sum_{i \geqslant i_0} m(\Gamma_i') = 0.$$

Проводя аналогичные рассуждения для обыкновенной точки W_0 и для точки разветвления W_0, $\operatorname{pr} W_0 \neq \infty$, установим справедливость предложения 6.

Пусть борелевская функция $\rho : G \to [0; +\infty]$ удовлетворяет условию $\int\limits_\gamma \rho\, ds \geqslant 1$ для всех $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0$, где $m(\Gamma_0) = 0$. Тогда будем говорить, что ρ – почти допустимая функция для Γ. Если ρ_0 – почти допустимая функция для семейства Γ и $m(\Gamma) = \iint\limits_G \rho_0^2\, d\sigma$, то ρ_0 назовем экстремальной функцией для Γ. □

Предложение 7. *Для семейства Γ кривых в G существует экстремальная функция ρ.*

Доказательство проводится по схеме, предложенной в [21] и опирается на следующие два утверждения:

Предложение 8 (Неравенство Кларксона [1, лемма 2.37, теорема 2.38]). *Если $f = (f_1, f_2), g = (g_1, g_2)$ – измеримые по Лебегу вектор-функции на $\mathcal{R}$, то*

$$\iint\limits_{\mathcal{R}} \left|\frac{f+g}{2}\right|^2 d\sigma + \iint\limits_{\mathcal{R}} \left|\frac{f-g}{2}\right|^2 d\sigma \leqslant \frac{1}{2}\left(\iint\limits_{\mathcal{R}} |f|^2\, d\sigma + \iint\limits_{\mathcal{R}} |g|^2\, d\sigma\right). \quad (1)$$

Предложение 9. *Если Γ – некоторое семейство кривых в G и $\lim\limits_{k\to\infty} \iint\limits_G |\rho_k - \rho|^2\, d\sigma = 0$, то существует подпоследовательность $\{k_j\}$ такая, что $\lim\limits_{j\to\infty} \int\limits_\gamma |\rho_{k_j} - \rho|\, ds = 0$ для почти всех кривых $\gamma \in \Gamma$. Другими словами, $\lim\limits_{j\to\infty} \int\limits_\gamma |\rho_{k_j} - \rho|\, ds = 0$ для всех $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0$, где $m(\Gamma_0) = 0$.*

2.2. Теперь приведем несколько необходимых в дальнейшем свойств емкости конденсатора на множестве $\bar{G}$.

Предложение 10. *$C(F_0, F_1, G) < \infty$.*

Доказательство. Покроем каждую точку $W \in F_0$ окрестностью $B(W,R)$ с центром в точке W и радиуса $R>0$, замыкание которой не содержит точек из F_1 и точек из $\mathcal{R}_b \setminus \{W\}$.

Из полученного семейства окрестностей в силу компактности F_0 можно извлечь конечное подсемейство окрестностей

$$B(W_1,R_1),\ldots,B(W_k,R_k),$$

покрывающих F_0. Выберем достаточно малое положительное ε такое, чтобы замыкание окрестности $B_l = B(W_l, R_l+\varepsilon)$ не содержало точек из $F_1 \cup (R_b \setminus \{W_l\})$, $l=1,2,\ldots,k$.

Положим для $l=1,2,\ldots,k$

$$u_l(W)=\begin{cases} 0, & W\in B(W_l,R_l),\\ \frac{\ln|w-w_l|-\ln R_l}{\ln(R_l+\varepsilon)-\ln R_l}, & W\in B_l\setminus B(W_l,R_l), w=\operatorname{pr}W, \text{ если } w_l=\operatorname{pr}W_l\neq\infty,\\ \frac{\ln|w|-\ln R_l}{\ln(R_l+\varepsilon)-\ln R_l}, & W\in B_l\setminus B(W_l,R_l), w=\frac{1}{\operatorname{pr}W}, \text{ если } \operatorname{pr}W_l=\infty,\\ 1, & W\in\mathcal{R}\setminus B_l. \end{cases}$$

Тогда u_l удовлетворяет локально условию Липшица на $\mathcal{R}$ и

$$\iint |\nabla u_l|^2\, d\sigma < \infty.$$

Введем функцию $u = \min\limits_{1\leqslant l\leqslant k} u_l$. По построению, $u=j$ в некоторой окрестности F_j, $j=0,1$, и удовлетворяет условию Липшица на $\mathcal{R}$. Следовательно, $u\in \operatorname{Adm}(F_0,F_1,G)$ и, поскольку

$$\iint\limits_G |\nabla u|^2\, d\sigma \leqslant \sum_{l=1}^{k} \iint\limits_G |\nabla u_l|^2\, d\sigma,$$

то $C(F_0,F_1,G)<\infty$. □

Для аппроксимации функций из $\operatorname{Adm}(F_0,F_1,G)$ гладкими функциями на $\mathcal{R}$ приведем некоторые свойства усреднений функций в $\mathbb{C}$ (подробнее см. [12, п. 1.15]).

Пусть $\Omega\subset\mathbb{C}$ – открытое множество, $B_1=\{w=x+iy\in\mathbb{C} : |w|<1\}$, $\varphi\in C^\infty(\mathbb{C})$, $\varphi\geqslant 0$ на $\mathbb{C}$, $\operatorname{supp}\varphi\subset B_1$ и $\iint\limits_{\mathbb{C}}\varphi(x,y)\,d\sigma=1$, $(\varepsilon\in(0,+\infty))$.

Любой суммируемой по Лебегу в Ω функции u, продолженной нулем в на $\mathbb{C}\setminus\Omega$, поставим в соответствие семейство ее усреднений:

$$(M_\varepsilon u)(z)=\varepsilon^{-2}\iint\limits_{\mathbb{C}}\varphi(\frac{z-w}{\varepsilon})u(w)\,d\sigma.$$

Известно [12] что

1) $M_\varepsilon u\in C^\infty(\Omega)$,
2) Если $u\in L_2(\Omega)$, то $M_\varepsilon u\to u$ в $L_2(\Omega)$ при $\varepsilon\to 0$,
3) Если u имеет обобщенный градиент в Ω, $|\nabla u|\in L_2(\Omega)$, то в любой ограниченной области ω, $\bar\omega\subset\Omega$, $\nabla(M_\varepsilon u)\to\nabla u$ в $L_2(\omega)$ при $\varepsilon\to 0$.

В силу предложения 10 будем считать, что интеграл Дирихле

$$\iint\limits_G|\nabla u|^2\,d\sigma=\iint\limits_{G_0}|\nabla u|^2\,d\sigma$$

конечен для всех $u\in\mathrm{Adm}(F_0,F_1,G)$.

Предложение 11. $C(F_0,F_1,G)=\inf\limits_u\iint\limits_G|\nabla u|^2\,d\sigma$, *где*

$$u\in\mathrm{Adm}(F_0,F_1,G)$$

и $0\leqslant u\leqslant 1$ *в* G.

Доказательство. Пусть $u\in\mathrm{Adm}(F_0,F_1,G)$ и $O(F_j,\delta)$ – окрестность компакта F_j, в которой $u=j$, $j=0,1$. Тогда срезка $\tilde u=\min(1,\max(u,0))$ на $\tilde G=G\cup O(F_0,\delta)\cup O(F_1,\delta)$ будет принадлежать классу

$$\mathrm{Adm}(F_0,F_1,G),\quad \tilde u=j$$

на $O(F_j,\delta)$, $j=0,1$,

$$\iint\limits_G|\nabla\tilde u|^2\,d\sigma\leqslant\iint\limits_G|\nabla u|^2\,d\sigma.$$

Это и доказывает предложение. □

Теорема 1. $C(F_0,F_1,G)=C(F_0,F_1,G')$.

Доказательство. Если $(G\setminus(F_0\cup F_1))\cap(\mathcal{R}_\infty\cup\mathcal{R}_b)=\varnothing$, то утверждение теоремы очевидно. Поэтому, не теряя общности, можно считать, что $(G\setminus(F_0\cup F_1))\cap(\mathcal{R}_\infty\cup\mathcal{R}_b)$ состоит из одной точки $W_0\in\mathcal{R}_b$, $\mathrm{pr}\,W_0=0$, W_0 – точка разветвления порядка m.

Пусть $u \in \mathrm{Adm}(F_0, F_1, G')$, $0 \leqslant u \leqslant 1$ на G',

$$\iint\limits_{G'} |\nabla u|^2 \, d\sigma = C(F_0, F_1, G') + o(1),$$

$O(F_j, \delta_1)$ – окрестность компакта F_j, в которой $u = j$, $j = 0, 1$.

Пусть $n > 2$. Зададим в окрестности $B(W_0, \delta)$, где $\bar{B}(W_0, \delta) \subset G \setminus (F_0 \cup F_1)$, функцию

$$v(W) = \begin{cases} 0, & W \in B\left(W_0, \frac{\delta}{n}\right), \\ \frac{\ln|w| - \ln\frac{\delta}{n}}{\ln\frac{\delta}{2} - \ln\frac{\delta}{n}}, & W \in \bar{B}\left(W_0, \frac{\delta}{2}\right) \setminus B\left(W_0, \frac{\delta}{n}\right), w = \mathrm{pr}\, W, \\ 1, & W \in \mathcal{R} \setminus B\left(W_0, \frac{\delta}{2}\right). \end{cases}$$

Тогда $v(W)$ удовлетворяет условию Липшица локально на $\mathcal{R}$,

$$\iint\limits_{\mathcal{R}} |\nabla v|^2 \, d\sigma = 2\pi m \left(\ln\frac{n}{2}\right)^{-1} = o(1)$$

при $n \to \infty$. Введем функцию $\tilde{u} = \min(u, v)$. Тогда $\tilde{u}$ равна 0 на $O(F_0, \delta_1)$, равна 1 на $O(F_1, \delta_1) \setminus \bar{B}(W_0, \delta)$, равна 0 на $B\left(W_0, \frac{\delta}{n}\right) \setminus \{W_0\}$. Положим $\tilde{u}(W_0) = 0$. Тогда $\tilde{u}(W) \in \mathrm{Adm}(F_0, F_1, G)$ и

$$\iint\limits_{G} |\nabla \tilde{u}|^2 \, d\sigma \leqslant \iint\limits_{G'} |\nabla u|^2 \, d\sigma + \iint\limits_{G} |\nabla v|^2 \, d\sigma \leqslant C(F_0, F_1, G') + o(1).$$

Следовательно, $C(F_0, F_1, G) \leqslant C(F_0, F_1, G')$. С другой стороны, по определению $C(F_0, F_1, G') \leqslant C(F_0, F_1, G)$, что и завершает доказательство теоремы 1. □

Пусть u – числовая функция на G' и на каждом однолистном круге $U \subset G'$ она абсолютно непрерывна на почти всех отрезках из этого круга, параллельных координатным осям и $\iint\limits_{G'} |\nabla u|^2 \, d\sigma < \infty$. Класс этих функций обозначим через $ACL_2(G')$.

Теорема 2. $ACL_2(G') = L_2^1(G')$.

Доказательство. Пусть $u \in L_2^1(G')$ и $u_k \in C^\infty(G')$ $k \geqslant 1$, выбраны такими, что $\lim\limits_{k\to\infty} \iint\limits_{G'} \nabla(u - u_k)|^2 \, d\sigma = 0$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \iint\limits_{U} \nabla(u - u_k)|^2 \, d\sigma = 0$ на каждом однолистном круге $U \subset G'$. Отождествляя U с $\mathrm{pr}\, U$, получим, что u принадлежит классу $L_2^1(U)$, который, как известно [4, теорема 5.6, стр. 122], совпадает с классом $ACL_2(U)$. Следовательно, $u \in ACL_2(G')$.

Пусть теперь $u \in ACL_2(G')$. Покажем, что $u \in L_2^1(G')$, модифицируя рассуждения из доказательства аналогичной теоремы 1 в R^n из [12, п. 1.1.5].

Пусть $\{B_k\}_{k\geqslant 1}$ — локально конечное покрытие G' открытыми однолистными кругами B_k, $B_k \subset G'$, с радиусами r_k. Пусть, кроме того, $\{\varphi_k\}_{k\geqslant 1}$ — подчиненное этому покрытию разбиение единицы [15], $\{s_k\}_{k\geqslant 1}$ — последовательность положительных чисел, стремящихся к нулю монотонно и столь быстро, что последовательность концентрических кругов $\{(1+s_k)B_k\}$ обладает теми же свойствами, что и $\{B_k\}$. Обозначим $u_k = \varphi_k u$, $v_k = M_{s_k r_k}(u_k)$. По построению, функция $v = \sum\limits_k v_k$ принадлежит классу $C^\infty(G')$.

Возьмем $\varepsilon \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ и выберем s_k так, чтобы имело место неравенство

$$\|u_k - v_k\|_{L_2^1(G')} < \varepsilon^k.$$

Здесь учитывается, что u_k имеет компактный носитель в B_k и, следовательно, при малых s_k $u_k = v_k = 0$ вне некоторого компакта, расположенного в B_k.

На любом открытом множестве $\omega, \bar{\omega} \subset G'$, справедливо равенство $u = \sum\limits_k u_k$, причем сумма содержит конечное число слагаемых. Поэтому

$$\|u - v\|_{L_2^1(G')} \leqslant \sum_k \|u_k - v_k\|_{L_2^1(G')} \leqslant \varepsilon(1-\varepsilon)^{-1}.$$

Следовательно, $v_\varepsilon = v \in L_2^1(G') \cap C^\infty(G')$ и $\|u - v\|_{L_2^1(G')} \leqslant 2\varepsilon$. □

Следствие 1. *Пусть* $u \in \operatorname{Adm}(F_0, F_1, G')$ *и* $O(F_j, \delta)$ *– окрестность компакта* F_j*, в которой* $u = j$, $j = 0, 1$. *Заменяя в доказательстве теоремы* 2 *множество* G' *на* $\tilde{G}' = (G' \cup O(F_0,\delta) \cup O(F_1,\delta)) \setminus (\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b)$ *и беря* $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $k \in N$, *получим, что* $v_\varepsilon = \widetilde{u}_k \in C^\infty(\tilde{G}')$, $\widetilde{u}_k = j$ *в* $O\left(F_j, \frac{\delta}{2}\right)$, $j = 0, 1$, $\iint\limits_{G'} \nabla(u - \widetilde{u}_k)|^2\, d\sigma \to 0$ *при* $k \to \infty$. *Кроме того,* $u \in L_2^1(G')$.

Следствие 2. *Рассмотрим следующий класс* $\widetilde{\operatorname{Adm}}(F_0, F_1, G')$ *функций* u, *где* $u = j$ *в некоторой окрестности компакта* F_j, $j = 0, 1$, *функция* u *непрерывна в* G' *и* $u \in ACL_2(G')$. *Кроме того, для разных* $u \in \widetilde{\operatorname{Adm}}(F_0, F_1, G')$ *окрестности* $O(F_j, \delta)$, $j = 0, 1$, *могут различаться.*

Очевидно, что $\mathrm{Adm}(F_0, F_1, G') \subset \widetilde{\mathrm{Adm}}(F_0, F_1, G')$ *и, следовательно,*

$$C(F_0, F_1, G') \geqslant \inf_{u \in \widetilde{\mathrm{Adm}}(F_0, F_1, G')} \iint_{G'} |\nabla u|^2 \, d\sigma.$$

С другой стороны, применяя следствие 1, *в котором вместо* $u \in \mathrm{Adm}(F_0, F_1, G')$ *рассмотрим* $u \in \widetilde{\mathrm{Adm}}(F_0, F_1, G')$, *найдем функцию* $v \in \mathrm{Adm}(F_0, F_1, G')$, $v \in C^\infty(G')$, *для которой*

$$\iint_{G'} |\nabla(u - v)|^2 \, d\sigma < \varepsilon,$$

где ε *– любое наперед заданное положительное число. Это влечет неравенство*

$$C(F_0, F_1, G') \leqslant \inf_{u \in \widetilde{\mathrm{Adm}}(F_0, F_1, G')} \iint_{G'} |\nabla u|^2 \, d\sigma.$$

Следовательно,

$$C(F_0, F_1, G') = \inf_{u \in \widetilde{\mathrm{Adm}}(F_0, F_1, G')} \iint_{G'} |\nabla u|^2 \, d\sigma. \tag{2}$$

Теорема 3. *Существует функция* u_0, *экстремальная для* $C(F_0, F_1, G')$ *и гармоническая в* $G'_0 = G' \setminus (F_0 \cup F_1)$.

Доказательство. В силу следствия 1, можно указать последовательность функций $u_k \in \mathrm{Adm}(F_0, F_1, G')$, $u_k \in C^\infty(G'_0)$, такую, что

$$\lim_{k \to \infty} \iint_{G'_0} |\nabla u_k|^2 \, d\sigma = C(F_0, F_1, G').$$

Покажем, что $\{u_k\}$ – фундаментальная последовательность по норме $\| \cdot \|_{L^1_2(G'_0)}$.

Ясно, что для $k, k' \in N$

$$\frac{u_k + u_{k'}}{2} \in \mathrm{Adm}(F_0, F_1, G').$$

Тогда из неравенства Кларксона (1) имеем соотношения

$$C(F_0, F_1, G') \leqslant \iint\limits_{G_0'} \left|\nabla\left(\frac{u_k + u_{k'}}{2}\right)\right|^2 d\sigma + \iint\limits_{G_0'} \left|\nabla\left(\frac{u_k - u_{k'}}{2}\right)\right|^2 d\sigma$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\iint\limits_{G_0'} |\nabla u_k|^2\, d\sigma + \iint\limits_{G_0'} |\nabla u_{k'}|^2\, d\sigma\right).$$

Отсюда и из равенств

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{G_0'} |\nabla u_k|^2\, d\sigma = \lim_{k'\to\infty} \iint\limits_{G_0'} |\nabla u_{k'}|^2\, d\sigma = C(F_0, F_1, G')$$

сразу следует требуемая фундаментальность последовательности $\{u_k\}$:

$$\lim_{k,k'\to\infty} \iint\limits_{G_0'} |\nabla(u_k - u_{k'})|^2\, d\sigma = 0. \tag{3}$$

Представим теперь открытое множество G_0' в виде не более чем счетного объединения его попарно непересекающихся компонент связности D_l, $l \geqslant 1$. Далее пусть $D_l = \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} B_{ls}$, где B_{ls} — локально конечное покрытие области D_l однолистными кругами B_{ls}, $\overline{B_{ls}} \subset D_l$, для всех $l, s \geqslant 1$. Пусть, кроме того, ни один из этих кругов не содержит другого круга из семейства $\{B_{ls}\}$. Фиксируем теперь l и заменим круг B_{l1} с центром в точке O_1 и радиусом r_1 на однолистный круг B_1 с тем же центром и радиусом $r_1' > r_1$, круг B_1 содержится в D_l и не содержит ни одного круга из семейства $\{B_{ls}\}_{s\geqslant 2}$. Как обычно, отождествляем круг B_1 с его проекцией $\mathrm{pr}\, B_1$ и используем известные свойства класса L_2^1. Из фундаментальности построенной последовательности в $L_2^1(G_0')$, значит, и в $L_2^1(B_1)$, следует существование функции $v_0 \in L_2^1(B_1)$ такой, что (см. [21, теорема 4.4.4])

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{B_1} |\nabla(u_k - v_0)|^2\, d\sigma = 0.$$

Отсюда и из предложения 9 получим, что

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\gamma} |\nabla(u_k - v_0)|\, ds = 0$$

для почти всех кривых $\gamma \subset B_1$.

Ввиду того, что семейство окружностей, концентрических окружности ∂B_1 и с радиусами r, $r_1 < r < r_1'$, имеет положительный модуль, то найдем окружность C_1 радиуса $\rho_1 \in (r_1, r_1')$, на которой $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{C_1} |\nabla(u_k - v_0)|\, ds = 0$.

Кроме того, извлекая, если надо, из $\{u_k\}$ подпоследовательность, и учитывая оценку $0 \leqslant u_k \leqslant 1$ на G_0', потребуем, чтобы $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(a_0) = A_0$ для некоторой точки $a_0 \in C_1$. Тогда последовательность непрерывных функций $u_k(a) = u_k(a_0) + \int\limits_\gamma \frac{\partial u_k}{\partial s}\, ds$ сходится равномерно на C_1 к непрерывной функции $g(a) = A_0 + \int\limits_\gamma \frac{\partial v_0}{\partial s}\, ds$, где γ – любая дуга на окружности C_1, соединяющая a_0 с точкой $a \in C_1$.

Переопределим функцию u_k в круге U_1, $\partial U_1 = C_1$, заменив ее значения на соответствующие значения интеграла Пуассона с граничной функцией $u_k(a)$, $a \in C_1$. Полученную таким образом из u_k функцию на G_0' обозначим через u_{1k}, $k \geqslant 1$. Ясно, что $u_{1k} \in \widetilde{\mathrm{Adm}}(F_0, F_1, G')$.

В силу минимальности интеграла Дирихле (см. [13, глава 2]) имеем

$$\iint\limits_{U_1} |\nabla u_{1k}|^2\, d\sigma \leqslant \iint\limits_{U_1} |\nabla u_k|^2\, d\sigma,$$

значит,

$$\iint\limits_{G_0'} |\nabla u_{1k}|^2\, d\sigma \leqslant \iint\limits_{G_0'} |\nabla u_k|^2\, d\sigma.$$

Отсюда, повторяя рассуждения, проведенные выше, придем к равенству

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{G_0'} |\nabla(u_{1k} - u_k)|^2\, d\sigma = 0.$$

С другой стороны, гармоническая в круге U_1 функция u_{1k} сходится при $k \to \infty$ равномерно внутри этого круга к функции v_1, равной интегралу Пуассона с граничной функцией $g(a)$, $a \in C_1$.

Как известно [3, гл. 2], v_1 непрерывна на $\overline{U_1}$ и $v_1 = g$ на C_1. Другими словами, u_{1k} сходится на $\overline{U_1}$ при $k \to \infty$ к функции v_1 и можно считать, что $v_0 = v_1$ на U_1.

Возьмем теперь круг из семейства $\{B_{ls}\}$, имеющий общие точки с B_{l1} (таких кругов конечное число). Не ограничивая общности, будем считать, что это круг B_{l2}. Заменим теперь в предыдущих рассуждениях последовательность u_k на u_{1k}, круг B_{l1} на круг B_{l2}. Тогда установим, что существует однолистный круг U_2, $\overline{U_2} \subset D_l$, $\overline{B_{l2}} \subset U_2$, U_2 не содержит ни одного круга из семейства $\{B_{ls}\}$, $s \neq 2$; последовательность функций $\{u_{2k}\}$, где u_{2k} – гармоническая в U_2 и равная u_{1k} в остальных точках из G_0', $u_{2k} \in \widetilde{\mathrm{Adm}}(F_0, F_1, G_0')$. Кроме того,

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{G_0'} |\nabla(u_{2k} - u_k)|^2 \, d\sigma = 0, \tag{4}$$

последовательность u_{2k} сходится при $k \to \infty$ равномерно внутри U_2 к гармонической функции v_2, непрерывной на $\overline{U_2}$ и равной на $\partial U_1 \cap U_2$ функции v_1. Тогда из стандартных рассуждений [13, гл. 2], учитывая (4), получим, что v_2 является гармоническим продолжением функции v_1 на круг U_2, значит, на B_{l2}. В частности, u_{2k} сходится при $k \to \infty$ к гармонической функции $\tilde{u}_0$, равной v_j на B_{lj}, $j = 1, 2$,

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{B_{l1}\cup B_{l2}} |\nabla(u_{2k} - \tilde{u}_0)|^2 \, d\sigma = 0.$$

Продолжим этот процесс до бесконечности. В результате получим последовательность гармонических функций v_s на B_{ls}, $s \geqslant 1$, и гармоническую функцию u_0 на D_l, равную v_s на B_{ls}, $s \geqslant 1$; последовательности $\{u_{1k}\}$, $\{u_{2k}\}$, $\{u_{3k}\}$,... такие, что диагональная последовательность $u_{kk} = v_{kl}$ сходится к гармонической функции u_{0l} на D_l, $v_{kl} \in \widetilde{\mathrm{Adm}}(F_0, F_1, G')$,

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{D_l} |\nabla(v_{kl} - u_{0l})|^2 \, d\sigma = 0, \lim_{k\to\infty} \iint\limits_{G_0'} |\nabla(v_{kl} - u_k)|^2 \, d\sigma = 0.$$

Положим теперь $u_0 = u_{0l}$, $v_k = v_{kl}$ на D_l, $l \geqslant 1$. Тогда u_0 – гармоническая функция на G_0' и

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{G_0'} |\nabla(v_k - u_k)|^2 \, d\sigma = 0, \lim_{k\to\infty} \iint\limits_{G_0'} |\nabla(v_k - u_0)|^2 \, d\sigma = 0. \tag{5}$$

Поскольку $v_k \in L_2^1(G_0')$, то $u_0 \in L_2^1(G_0')$ и, в силу (5),

$$\iint\limits_{G_0'} |\nabla u_0|^2 \, d\sigma = C(F_0, F_1, G_0').$$

Другими словами, u_0 является экстремальной функцией для $C(F_0, F_1, G'_0)$. $\square$

Замечание 1. Каждая функция $v_k \in \widetilde{\mathrm{Adm}}(F_0, F_1, G')$ из доказательства теоремы 3 допускает аппроксимацию в $L_2^1(G')$ гладкими функциями из $C^\infty(G')$, равными j в некоторой окрестности компакта F_j, $j = 0, 1$. Тогда экстремальная функция u_0 для $C(F_0, F_1, G')$ из доказательства теоремы 3 также допускает аналогичную аппроксимацию функциями u. Поскольку для таких функций u имеют место оценки

$$1 \leqslant \int\limits_\gamma \left|\frac{\partial u}{\partial s}\right| ds \leqslant \int\limits_\gamma |\nabla u|\, ds$$

для всех $\gamma \in \Gamma(F_0, F_1, G')$, то, в силу предложения 4,

$$\int\limits_\gamma |\nabla u_0|\, ds \geqslant 1 \tag{6}$$

для почти всех кривых $\gamma \in \Gamma(F_0, F_1, G')$.

Замечание 2. Известно [19, теорема 2], что гармоническую функцию с ограниченным интегралом Дирихле в проколотой окрестности некоторой точки $w_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ можно продолжить до гармонической функции на эту окрестность, пополненную точкой w_0. Из этого факта и инвариантности интеграла Дирихле при конформном отображении проколотой окрестности точки $W_0 \in \mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b$ на проколотую окрестность униформизирующего параметра вытекает, что экстремальная функция u_0 для $C(F_0, F_1, G')$, гармоническая в $G'_0 = G' \setminus (F_0 \cup F_1)$, продолжается до гармонической функции на все открытое множество $G \setminus (F_0 \cup F_1)$.

§3. Равенство модуля и емкости конденсатора

Здесь установим равенство

$$C(F_0, F_1, G) = m(F_0, F_1, G). \tag{7}$$

Сначала установим равенство (7) в предположении, что $d(\bar{G}, \mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b) > 0$.

Лемма 1. *Если $d(\bar{G}, \mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b) > 0$, то существует функция $\alpha \in C^\infty(G_0)$ такая, что*

1) $0 < \alpha \leqslant 1$;

2) $|\nabla\alpha| < \frac{1}{2}$;
3) $2\alpha(W) < d_e(W, \partial G_0)$, *где* $G_0 = G \setminus (F_0 \cup F_1)$.

Доказательство. Покроем $\overline{G}_0$ конечным числом однолистных открытых кругов $B_1, \ldots, B_m$, где $d(\bar{B}_j, \mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b) > 0$ для всех $j = 1, \ldots, m$. Выберем $\delta > 0$ таким, чтобы круг $(1+\delta)B_j$, концентрический кругу B_j, был однолистным и находился на положительном расстоянии в евклидовой метрике от $\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b$. Кроме того, зададим функцию $\varphi_j \in C^\infty(\mathcal{R} \setminus (\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b))$, $0 \leqslant \varphi_j \leqslant 1$ на $\overline{G_0}$, с компактным носителем в $(1+\delta)B_j$ и равной единице на $\overline{B_j}$.

Положим $M = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} |\nabla\varphi_j|$ на $\overline{G_0}$. Наконец, определим функцию α_j, удовлетворяющую условиям леммы, если в ней G_0 заменить на $G_0 \cap (1+\delta)B_j$.

Поскольку $G_0 \cap (1+\delta)B_j$ можно отождествить с $\operatorname{pr} G_0 \cap (1+\delta)B_j$, открытым множеством в $\mathbb{C}$, то построение такой функции можно найти в [21, лемма 2.4.1]. Для $W \in \mathcal{R} \setminus (1+\delta)B_j$ положим $\alpha_j = 0$.

Заметим, что для $W \in (1+\delta)B_j$ имеет место оценка $d_e(W, \partial G_0) \geqslant d_e(W, \partial((1+\delta)B_j \cap G_0)$. Тогда функция

$$\alpha(W) = \frac{1}{m(2+M)} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \varphi_j$$

удовлетворяет условиям леммы.

Далее пусть $\alpha(W)$ – функция из леммы 1 и пусть $R(W) = \sup\{R : B(W, R)$ однолистный круг на $\mathcal{R}\}$ для $W \in \overline{G_0}$ и $R_0 = \inf\limits_{W \in \overline{G_0}} R(W)$. В силу условия $d_e(G, \mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b) > 0$ имеем $R_0 > 0$). Тогда введем на G_0 для фиксированных ε, ζ, где $0 < \varepsilon < \min\{1, \frac{R_0}{4}\}$, $0 < |\zeta| \leqslant 1$, отображение

$$T_{\varepsilon,\zeta} : W \to Z = W + \varepsilon\alpha(W)\zeta \tag{8}$$

по следующему правилу. Отождествляя $B(W, R_0)$ с множеством $\operatorname{pr} B(W, R_0)$, $W \in G_0$, точке W поставим в соответствие точку $Z \in B(W, R_0)$, для которой $\operatorname{pr} Z = \operatorname{pr} W + \varepsilon\alpha(W)\zeta$. Отсюда и из выбора $\alpha(W)$ следует, что

$$|\operatorname{pr} Z - \operatorname{pr} W| \leqslant \varepsilon < \frac{R_0}{4}.$$

Значит, $Z \in B(W, R_0)$. Из свойств $\alpha(W)$ также следует, что

$$|\operatorname{pr} Z - \operatorname{pr} W| < \frac{1}{2} d_e(W, \partial G_0).$$

Другими словами, отрезок ZW, соединяющий точки Z и W, содержится в $B(W, R_0) \cap G_0$.

Обозначим через L множество всех прямых $l \in \mathbb{C}$, параллельных ζ как вектору и пусть l – прямая из L. Положим $l(G_0) = \{W \in G_0 : \operatorname{pr} W \in l\}$. Тогда из сказанного выше имеем

$$T_{\varepsilon,\zeta}(l(G_0)) \subset l(G_0).$$

Варьируя $l \in L$, заключаем, что $T_{\varepsilon,\zeta} : G_0 \to G_0$. □

На самом деле справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Отображение $T_{\varepsilon,\zeta} : G_0 \to G_0$ является C^∞-гомеоморфизмом G_0 на G_0.*

Доказательство. По построению $\alpha(W) \in C^\infty(G_0)$ и из (8) сразу заключаем, что $T_{\varepsilon,\zeta} \in C^\infty(G_0)$.

Пусть τ – некоторая компонента связности $l(G_0)$. Тогда τ – прямолинейный интервал на G_0, соединяющий две граничные точки $W_1, W_2 \in \partial G_0$. Поскольку $T_{\varepsilon,\zeta}$ – непрерывное отображение на G_0, то $T_{\varepsilon,\zeta}(\tau)$ – прямолинейный промежуток на τ, содержащий точки, достаточно близкие к ∂G. Значит, $T_{\varepsilon,\zeta}(\tau) = \tau$.

Предположим теперь, что найдутся две точки $W, W' \in \tau$, для которых

$$Z = W + \varepsilon\alpha(W)\zeta = W' + \varepsilon\alpha(W')\zeta.$$

Тогда

$$d_e(W, W') = |\operatorname{pr} W - \operatorname{pr} W'| \leqslant \int\limits_W^{W'} |\nabla\alpha|\, ds \leqslant \frac{1}{2}|\operatorname{pr} W - \operatorname{pr} W'|.$$

Из полученного противоречия заключаем, что $T_{\varepsilon,\zeta}$ – взаимно однозначное отображение $l(G_0)$ на $l(G_0)$. Варьируя $l \in L$, получим, что $T_{\varepsilon,\zeta}$ осуществляет взаимно однозначное отображение G_0 на G_0.

Убедимся, что отображение $T^{-1}_{\varepsilon,\zeta}$, обратное к $T_{\varepsilon,\zeta}$, непрерывно в G_0. Действительно, возьмем произвольную точку $W_0 \in G_0$ и ее однолистную окрестность $B(W_0, \delta)$, расположенную в G_0. Из свойств $\alpha(W)$, определения $T_{\varepsilon,\zeta}$, для любых $W, W' \in B(W_0\delta)$ следуют оценки

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) |\operatorname{pr} W - \operatorname{pr} W'| &\leqslant |\operatorname{pr} T_{\varepsilon,\zeta}(W) - \operatorname{pr} T_{\varepsilon,\zeta}(W')| \\ &\leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) |\operatorname{pr} W - \operatorname{pr} W'|,\end{aligned} \tag{9}$$

что влечет непрерывность $T^{-1}_{\varepsilon,\zeta}$ в точке W_0. Следовательно, $T_{\varepsilon,\zeta}$ – гомеоморфизм G_0 на G_0. □

Следствие 3. *Якобиан J отображения $T_{\varepsilon,\zeta}$ в точке $W \in G_0$ равен $1+\varepsilon\zeta\nabla\alpha(W)$ (здесь $\zeta\nabla\alpha(W)$ – скалярное произведение двух двумерных векторов ζ и $\nabla\alpha(W)$). Отсюда и из леммы 1 имеем*

$$1-\frac{\varepsilon}{2} \leqslant J(W) \leqslant 1+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{10}$$

Лемма 3. *Инфимум в определении $m(F_0,F_1,G)$, $d_e(\bar{G},\mathcal{R}_\infty,\mathcal{R}_b)>0$, можно брать по допустимым функциям, непрерывным в $G_0 = G \setminus (F_0 \cup F_1)$.*

Доказательство. Ввиду замечания 1 к теореме 3 модуль градиента экстремальной функции u_0 для емкости $C(F_0,F_1,G)$ будет почти допустимой функцией для $m(F_0,F_1,G)$. Отсюда и из предложения 10 имеем

$$m(F_0,F_1,G) \leqslant \iint\limits_{G_0} |\nabla u_0|^2\, d\sigma = C(F_0,F_1,G) < \infty. \tag{11}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon < \min\left(1, \frac{R_0}{4}\right)$, $\rho \in \operatorname{adm}(F_0,F_1,G)$ и такая, что

$$\iint\limits_{G_0} \rho^2\, d\sigma \leqslant m(F_0,F_1,G)+\varepsilon.$$

Рассмотрим функцию

$$\rho_\varepsilon(W) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} \rho(W+\varepsilon\alpha(W)\zeta)\, d\sigma_\zeta = \frac{1}{\pi\alpha(W)^2\varepsilon^2}\iint\limits_{B(W,\varepsilon\alpha(W))} \rho(z)\, d\sigma_Z.$$

Проводя рассуждения, аналогичные доказательству соответствующих свойств оператора усреднения с переменным ядром в R^n [2, 20], установим непрерывность $\rho_\varepsilon(W)$ на G_0 и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{G_0} |\rho_\varepsilon(W)-\rho(W)|^2\, d\sigma = 0.$$

Пусть кривая $\gamma \in \Gamma(F_0,F_1,G)$ и γ_0 – та связная часть $\gamma \cap G_0$, которая соединяет F_0 и F_1. Ясно, что $\gamma_0 \in \Gamma(F_0,F_1,G)$ и $\int\limits_{\gamma_0} \rho\, ds \geqslant 1$. Имеем

$$\int\limits_{\gamma_0} \rho_\varepsilon\, ds = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\int\limits_{\gamma_0} \rho(W+\varepsilon\alpha(W)\zeta)\, ds(W)\, d\sigma.$$

Рассмотрим внутренний интеграл. Пусть $Z(W) = W + \varepsilon\alpha(W)\zeta$. Тогда
$$\int\limits_{\gamma_0} \rho(W + \varepsilon\alpha(W))\, ds(W) = \int\limits_{Z^{-1}(\gamma_0)} \rho(Z)\frac{ds(W)}{ds(Z)}\, ds(Z) \geqslant (1+\varepsilon)^{-1},$$
так как
$$\frac{ds(Z)}{ds(W)} = \left|\frac{dW}{ds} + \varepsilon\frac{d\alpha}{ds}\zeta\right| \leqslant 1+\varepsilon$$
и кривая $Z^{-1}(\gamma_0)$ в силу леммы 2 принадлежит семейству $\Gamma(F_0, F_1, G_0)$. Отсюда получаем, что функция $(1+\varepsilon)\rho_\varepsilon \in \operatorname{adm}(F_0, F_1, G)$ и
$$\begin{aligned} m(F_0, F_1, G) &\leqslant \int\limits_{G_0} (1+\varepsilon)^2 \rho_\varepsilon^2\, d\sigma \leqslant (1+\varepsilon)^2 \left(\iint\limits_{G_0} \rho^2\, d\sigma + o(1)\right) \\ &\leqslant m(F_0, F_1, G) + o(1) \end{aligned}$$
при $\varepsilon \to 0$. Тем самым лемма 3 доказана. □

Учитывая лемму 2 и применяя стандартные рассуждения из [18, лемма 6.1], [10, лемма2], получим еще одно утверждение.

Лемма 4. *Для конденсатора (F_0, F_1, G), $d_e(\bar{G}_0, \mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b) > 0$, и любой непрерывной положительной на G_0 функции $\rho \in \operatorname{adm}(F_0, F_1, G)$ для любого $\varepsilon > 0$ существуют δ-окрестности $O(F_0, \delta)$, $O(F_1, \delta)$ множеств F_0, F_1 и борелевская функция $\tilde{\rho} \geqslant 0$, локально ограниченная в G_0 и непрерывная почти везде на G_0 такая, что для любой кривой γ, соединяющей $\overline{O(F_0, \delta)}$ и $\overline{O(F_1, \delta)}$ в G, выполняются условия*
$$\int\limits_{\gamma} \tilde{\rho}\, ds \geqslant 1 - \varepsilon, \quad \iint\limits_{G_0} \tilde{\rho}^2\, d\sigma < \iint\limits_{G_0} \rho^2\, d\sigma + \varepsilon.$$

Лемма 5. *Если $d_e(\bar{G}_0, \mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b) > 0$, то*
$$C(F_0, F_1, G) = m(F_0, F_1, G).$$

Доказательство. Ввиду (11) имеем
$$m(F_0, F_1, G) \leqslant C(F_0, F_1, G) < \infty.$$
Докажем обратное неравенство.

Пусть дано $\varepsilon > 0$ и пусть $\rho \in \operatorname{adm}(F_0, F_1, G)$ – непрерывная в G_0 функция такая, что
$$\iint\limits_{G_0} \rho^2\, d\sigma < m(F_0, F_1, G) + \varepsilon.$$

Прибавляя, если надо, к ρ достаточно малую положительную константу, будем считать, что ρ – положительная функция в G_0. Используя лемму 4, построим соответствующую функцию $\tilde\rho$.

Положим $\tilde\rho = 0$ на множествах $\overline{O(F_0,\delta)}$ и $\overline{O(F_1,\delta)}$, указанных в лемме 4. Рассмотрим функцию

$$v(W) = \inf \int\limits_{\gamma_W} \tilde\rho\, ds,$$

где инфимум берется по всем кривым γ_W, соединяющим $\overline{O\left(F_0,\frac{\delta}{2}\right)}$ и точку W на G.

Очевидно, что $v = 0$ в окрестности компакта F_0, $v \geqslant 1-\varepsilon$ в окрестности компакта F_1, $|\nabla v| \leqslant \tilde\rho$ почти всюду в G_0, v удовлетворяет локально условию Липшица на G_0. Тогда $u = \min\left(1, \frac{v}{1-\varepsilon}\right) \in \mathrm{Adm}(F_0,F_1,G)$ и выполняются следующие неравенства

$$C(F_0,F_1,G) \leqslant \iint\limits_{G_0} |\nabla u|^2\, d\sigma \leqslant \iint\limits_{G_0} \frac{\tilde\rho^2}{(1-\varepsilon)^2}\, d\sigma \leqslant \frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\left(\iint\limits_{G_0} \rho^2\, d\sigma + \varepsilon\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{(1-\varepsilon)^2}(m(F_0,F_1,G)+2\varepsilon).$$

В силу произвольности ε, лемма доказана. □

Установим равенство (8) в общем случае.

Теорема 4. $C(F_0,F_1,G) = m(F_0,F_1,G)$.

Доказательство. Положим $K = \bar G \cap (\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b) \neq \varnothing$. Поскольку $\bar G$ – компакт, то K состоит из конечного числа точек. Не ограничивая общности, будем считать, что это точки W_0, W_1, W_2, W_3, где $W_0 \in F_0$, $W_1 \in F_1$, $W_2 \in G \setminus (F_0 \cup F_1)$, $W_3 \in \partial G \setminus (F_0 \cup F_1)$.

Выберем натуральное число $k \geqslant k_0$ таким, чтобы окрестности

$$B(W_0, \frac{1}{k}), \ldots, B(W_3, \frac{1}{k})$$

и их замыкания попарно не пересекались, не содержали точек из $(\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b) \setminus \{W_0,\ldots,W_3\}$, $B(W_2,\frac{1}{k}) \cap (F_0 \cup F_1) = \varnothing$, $\bar B(W_2,\frac{1}{k}) \subset G_0$. Положим $G_k = G \setminus \left(\bigcup\limits_{j=0}^{3} \bar B(W_j,\frac{1}{k})\right)$, $F_{jk} = F_j \setminus B(W_j,\frac{1}{k})$, $j = 0,1$, $\Gamma_k = \Gamma(F_{0k},F_{1k},G_k)$, $m_k = m(\Gamma_k)$, $\bigcup\limits_{k\geqslant k_0} \Gamma_k = \Gamma$, $C_k = C(F_{0k},F_{1k},G_k)$.

По построению, $d_e(\bar{G}_k, \mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b) > 0$, значит, по лемме 5, выполнено равенство $m_k = C_k$.

В силу предложения 2, $\lim\limits_{k\to\infty} m_k = m(\Gamma)$. Ясно, что Γ отличается от $\Gamma(F_0, F_1, G)$ на семейство кривых Γ_0, расположенных в G и проходящих через точку W_2 или соединяющих точки W_0 и W_1 с другими точками множества G. Из предложений 4 и 6 сразу получаем, что $m(\Gamma_0) = 0$. Следовательно,

$$m(\Gamma) = m(F_0, F_1, G) = \lim_{k\to\infty} C_k.$$

Очевидно, функция $u \in \mathrm{Adm}(F_0, F_1, G)$ является допустимой функцией для $C(F_{0k}, F_{1k}, G_k)$ для всех $k \geqslant k_0$. Поэтому

$$C(F_0, F_1, G) \geqslant \lim_{k\to\infty} C_k = m(F_0, F_1, G).$$

Отсюда для справедливости теоремы 4 достаточно установить противоположное неравенство. Для этого используем построения из доказательства теоремы 1. Зададим $\varepsilon > 0$ и функцию v, которая удовлетворяет локально условию Липшица на $\mathcal{R}$, $0 \leqslant v \leqslant 1$ на $\mathcal{R}$, $v = 0$ вне окрестности $B(W_2, \delta)$, где $\delta = \frac{1}{k_0}$, $v = 1$ на $\bar{B}(W_2, \delta')$, $\delta' \in (0, \delta)$ и выбрано таким, что

$$\int\limits_{\mathcal{R}} |\nabla v|^2 \, d\sigma < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Аналогично построим функцию $\tilde{v}$, $0 \leqslant \tilde{v} \leqslant 1$, которая удовлетворяет условию Липшица на $\mathcal{R}$, равна 0 вне окрестности $B(W_3, \delta)$, равна 1 на $\bar{B}(W_3, \delta')$. $\iint\limits_{\mathcal{R}} |\nabla \tilde{v}|^2 \, d\sigma < \frac{\varepsilon}{4}$. Положим $C = \lim\limits_{k\to\infty} C_k$ и выберем $k > k_0$ таким, чтобы $0 < \frac{1}{k} < \delta'$, $|C - C_k| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Кроме того, зададим функцию $u_k \in \mathrm{Adm}(F_{0k}, F_{1k}, G_k)$ такую, чтобы

$$\iint\limits_{G_k} |\nabla u_k|^2 \, d\sigma < C_k + \frac{\varepsilon}{4},$$

где применяя надлежащие срезки (см. рассуждения ниже), будем считать $u_k = j$ в некоторой окрестности $\bar{B}(W_j, \frac{1}{k})$, $j = 0, 1$, и введем первую срезку $g_k = \max(v, u_k)$. Ясно, что $g_k = 1$ на $\partial B(W_2, r) \cap G$ для всех $\frac{1}{k} < r \leqslant \delta'$. Поэтому ее можно продолжить непрерывным образом на $B(W_2, \frac{1}{k})$, положив ее равной там единице.

Введем вторую срезку $\tilde{g}_k = \max(g_k, \tilde{v})$, положив ее равной единице на $B(W_3, \frac{1}{k})$. По построению, $\tilde{g}_k \in \mathrm{Adm}(F_0, F_1, G)$. В силу известных свойств срезки и выписанных выше соотношений заключаем, что

$$C(F_0, F_1, G) \leqslant \iint\limits_{G_0} |\nabla \tilde{g}_k|^2\, d\sigma \leqslant \iint\limits_{G_0} |\nabla u_k|^2\, d\sigma + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant C_k + \frac{3\varepsilon}{4} < C + \varepsilon.$$

Отсюда, устремляя ε к нулю, получаем утверждение теоремы. □

§4. Устранимые множества и эквивалентные открытые множества на римановой поверхности

Следуя Альфорсу и Бейрлингу, замкнутое множество $E \subset \mathbb{C}$ назовем NED-множеством, если для любого открытого координатного прямоугольника $\Pi \subset \mathbb{C}$ с противоположными сторонами σ_{0i}, σ_{1i}, параллельными координатной x_i-оси, выполняется равенство

$$m(\sigma_{0i}, \sigma_{1i}, \Pi) = m(\sigma_{0i}, \sigma_{1i}, \Pi \setminus E),\ i = 1, 2. \tag{12}$$

Возьмем произвольный круг $U \subset \mathbb{C}$ и потребуем, чтобы в (12) прямоугольник Π вместе с его границей содержался в U. Ясно, что равенство (12) будет выполнено.

Нетрудно показать, что справедливо и обратное утверждение. Это дает основание определить NED-множество на римановой поверхности следующим образом.

Относительно замкнутое множество E на открытом множестве $Q \subset \mathcal{R}$ назовем NED-множеством на Q, если для любого однолистного круга $B \subset Q$ проекция $\mathrm{pr}(B \cap E)$ есть NED-множество в $\mathrm{pr}\, B$.

Из определения следует, что NED-множество на Q всюду разрывно и имеет нулевую площадь.

Пусть D – произвольное открытое множество на $\mathcal{R}$, не обязательно с компактным замыканием на $\mathcal{R}$, $D \cap (\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b) = \varnothing$. Введем пространство $L_2^1(D)$ аналогично пространству $L_2^1(G)$. Два открытых множества D_1 и D ($D_1 \subset D$) назовем эквивалентными, если оператор ограничения $\theta : L_2^1(D) \to L_2^1(D_1)$ ($\theta u = u|_{D_1}, u \in L_2^1(D)$) является изоморфизмом векторных пространств $\theta : L_2^1(D)$ и $L_2^1(D_1)$.

Установим сначала, что NED-множества не влияют на емкость конденсатора, значит, в силу теоремы 4, на его модуль.

Теорема 5. *Если E – NED-множество на G, то*

$$C(F_0, F_1, G \setminus E) = C(F_0, F_1, G). \tag{13}$$

Доказательство. Установим равенство (13), в котором G заменяется на $G' = G \setminus (\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b)$. Возьмем функцию $u \in \mathrm{Adm}(F_0, F_1, G' \setminus E)$, где

$$C(F_0, F_1, G' \setminus E) + o(1) \geqslant \iint\limits_{G' \setminus E} |\nabla u|^2\, d\sigma = \iint\limits_{G'} |\nabla u|^2\, d\sigma.$$

Ввиду следствия 1 получим $u \in L_2^1(G' \setminus E)$. Тогда $u \in L_2^1(B \setminus E)$ для любого однолистного круга $B \subset G'$. Поскольку $B \cap E$ – NED-множество в B, то [9] $u \in L_2^1(B)$.

Повторяя рассуждения доказательства из теоремы 2, установим, что u можно аппроксимировать в $L_2^1(G')$ функциями $u_k \in C^\infty(G')$, $u_k \in \mathrm{Adm}(F_0, F_1, G')$. Отсюда

$$C(F_0, F_1, G') \leqslant \iint\limits_{G'} |\nabla u_k|^2\, d\sigma = \iint\limits_{G'} |\nabla u|^2\, d\sigma + o(1) \leqslant C(F_0, F_1, G' \setminus E) + o(1).$$

Это дает требуемое равенство.

Поскольку точки из $\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b$ не влияют на емкость конденсатора (см. теорему 1), то из равенства (13) для G' получим $C(F_0, F_1, G) = C(F_0, F_1, G \setminus E)$. □

Теорема 6. *Для того чтобы открытые множества D, D_1 ($D_1 \subset D$, $D \cap (\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b) = \varnothing$) были эквивалентными на $\mathcal{R}$, необходимо и достаточно, чтобы $D \setminus D_1$ было NED-множеством на D.*

Доказательство. Необходимость. Здесь отметим, что в определении $L_2^1(D)$ (соответственно, $L_2^1(D_1)$) две функции из $L_2^1(D)$, отличающиеся на множестве D на тождественно постоянную функцию, будем считать эквивалентными. Как обычно, под под тождественно постоянной функцией будем понимать функцию, равную почти всюду константе на каждой компоненте связности множества D (для разных компонент связности константы могут быть различными).

Пусть пространства $L_2^1(D)$ и $L_2^1(D_1)$ изоморфны как линейные пространства. при изоморфизме ограничения $\theta u = u|_{D_1}$, $u \in L_2^1(D)$. Используя теорему Банаха, получим ограниченность оператора θ^{-1}.

Установим тогда, что площадь $\sigma(D \setminus D_1) = 0$. Предположим обратное. Тогда множество $D \setminus D_1$ имеет хотя бы одну точку плотности W_0. Рассмотрим однолистный круг $B(W_0, \delta)$, $\bar{B}(W_0, \delta) \subset D$. Этот круг, как обычно, отождествим с $\mathrm{pr}\, B(W_0, \delta)$.

На $B(W_0, \delta)$ рассмотрим последовательность кругов $B(W_0, \frac{\delta}{2m}) = B_m$, $m = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим функцию

$$u_m(W) = d_e(W, \bar{B}(W_0, \delta) \setminus B_m), \qquad W \in \bar{B}(W_0, \delta).$$

Известно [14, п. 3.2.34], что $|u_m(W') - u_m(W'')| \leqslant |\operatorname{pr} W' - \operatorname{pr} W''|$ на $\bar{B}(W_0, \delta)$, $|\nabla u_m| = 1$ почти всюду на B_m, $u_m(W) = 0$ на $\bar{B}(W_0, \delta) \setminus B_m$. Положим $u_m(W) = 0$ на $\mathcal{R}$ вне $\bar{B}(W_0, \delta)$. Ясно, что $u_m \in L_2^1(D)$. Тогда

$$\iint\limits_{B_m} d\sigma \leqslant \iint\limits_{D} |\nabla u_m|^2 \, d\sigma \leqslant \|\theta^{-1}\|^2 \iint\limits_{D_1} |\nabla u_m|^2 \, d\sigma \leqslant \|\theta^{-1}\|^2 \iint\limits_{B_m \cap D_1} d\sigma. \tag{14}$$

При $m \to \infty$ соотношение (14) неверно. Следовательно, $\sigma(D \setminus D_1) = 0$ и любой функции $u \in L_2^1(D)$ ставится в соответствие функция $u_1 = \theta u \in L_2^1(D_1)$ с сохранением нормы.

Покажем, что $E = D \setminus D_1$ – NED-множество в D. Возьмем произвольный однолистный круг $B(W_0, \delta) \subset D$. Отождествим его с $\operatorname{pr} B(W_0, \delta)$. Пусть Π, $\bar{\Pi} \subset D$, – произвольный координатный прямоугольник с противоположными сторонами σ_{0i}, σ_{1i}, параллельными координатной x_i-оси, $j = 1, 2$. Тогда применяя рассуждения из доказательства теоремы 1 в [16], получим, что $|\nabla u_j|$, где u_j – экстремальная функция для емкости $C(\sigma_{0j}, \sigma_{1j}, \Pi \cap D_1)$, будет почти допустимой функцией для $\Gamma(\sigma_{0j}, \sigma_{1j}, \Pi)$. Следовательно,

$$C(\sigma_{0j}, \sigma_{1j}, \Pi \cap D_1) = \iint\limits_{\Pi} |\nabla u_j|^2 \, d\sigma \geqslant m(\sigma_{0j}, \sigma_{1j}, \Pi) = C(\sigma_{0j}, \sigma_{1j}, \Pi).$$

Следовательно, по теореме 4, $\operatorname{pr}(D \setminus D_1)$ будет NED-множеством в круге $B(W_0, \delta)$. Тем самым условие необходимости в теореме доказано.

Достаточность. Поскольку $E = D \setminus D_1$ – NED-множество в D, то любая функция $u \in L_2^1(D_1)$ продолжается на каждом однолистном круге $B \subset D$ до функции $u \in L_2^1(B \cap D)$. Применяя рассуждения из доказательства теоремы 2, получим, что $u \in L_2^1(D)$. Равенство $\sigma(E) = 0$ гарантирует единственность продолжения с сохранением нормы. Значит, оператор θ, введенный выше, осуществляет изоморфизм пространств $L_2^1(D)$ и $L_2^1(D_1)$. Теорема доказана. $\square$

Литература

1. Р. Адамс, Д. Фурнье, *Пространства Соболева.* Белая серия в математике и физике, Новосибирск, Рожковская Т., 2009.
2. В. В. Асеев, *Об одном свойстве модуля.* — Докл. АН СССР **200**, No. 3, (1971), 513–514.
3. Г. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* М., 1966.
4. В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк, *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения.* М., Наука, 1983.
5. А. Гурвиц, Р. Курант, *Теория функций.* М., Наука, 1968.
6. И. Н. Демшин, Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, *Критерии нуль-множеств для весовых соболевских пространств.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **276** (2001), 52–82.
7. В. Н. Дубинин, *Экстремальные задачи Гретша и Тейхмюллера на римановой поверхности.* — Мат. заметки **92**, No. 6 (2012), 834–843.
8. В. Н. Дубинин, *Круговая симметризация конденсаторов на римановых поверхностях.* — Мат. сб. **206**, No. 1 (2015), 69–96.
9. Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, *Достаточность семейства ломаных в методе модулей и устранимые множества.* — Сиб. мат. ж. **51**, No. 6 (2010), 1028–1042.
10. Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, *Некоторые свойства емкости и модуля поликонденсатора и устранимые множества.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **392** (2011), 84–94.
11. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций.* II. — Алгебра и анализ **9**, No. 5 (1997), 1–50.
12. В. Г. Мазья, *Пространства С. Л. Соболева.* — ЛГУ, 1985.
13. С. Стоилов, *Лекции о топологических принципах теории аналитических функции.* М., 1964.
14. Г. Федерер, *Геометрическая теория меры.* М., 1987.
15. О. Форстер, *Римановы поверхности.* М., 1980.
16. В. А. Шлык, *О весовой эквивалентности открытых множеств в R^n.* — Вестник ВолГУ. Серия 1. Математика. Физика **23**, No. 4 (2014), 47–52.
17. L. Ahlfors, A. Beurling, *Conformal invariants and function-theoretic null-sets.* — Acta Math. **83** (1950), 101–129.
18. H. Aikawa, M. Ohtsuka, *Extremal lenth of vector measures.* — Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. **24** (1999), 61–88.
19. L. I. Hedberg, *Removable sungularities and condenser capacities.* — Arkiv. math. **12**, No. 1 (1974), 181–201.
20. J. Hesse, *A p-extremal length and p-capacity equality.* — Ark. mat. **13**, No. 1 (1975), 131–144.
21. M. Ohtsuka, *Extremal length and precise functions.* GAKUTO international series, Gakkōtosho, 2003.

Pugach P. A., Shlyk V. A. Condensers and equivalent open sets on a Riemann surface.

Condensers on the compact closure of an open set on a Riemann surface are studied. The equality of the capacity and module of condenser is proved. The definition of NED-sets on the Riemann surface is given and it is proved that NED-sets do not affect the condenser module. Also, a criterion of equivalence of open sets on the Riemann surface is established.

Владивостокский филиал
Российской таможенной академии
ул. Стрелковая, 16в, 690034 Владивосток, Россия
E-mail: 679097@mail.ru

Поступило 28 июля 2016 г.

Владивостокский филиал
Российской таможенной академии
ул. Стрелковая, 16в, 690034 Владивосток, Россия
E-mail: shlykva@yandex.ru