Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 449, 2016 г.

**Н. В. Проскурин**

# ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ КАТЕГОРИИ КОНЕЧНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

**1.** Возможность сопоставить категориям некоторые дзета-функции, отражающие в той или иной степени свойства категорий, рассматривал Курокава [1,2]. Согласно этому автору, дзета-функции категорий определяются эйлеровскими произведениями с локальными множителями, подобными локальным множителям дзета-функции Римана. С нашей точки зрения, в поисках интересных примеров можно определять дзета-функции категорий посредством рядов Дирихле. При этом существование эйлеровских разложений и возможную форму локальных множителей не следует постулировать в определениях. С этой точки зрения, мы рассмотрим комплексную функцию $\zeta(\,\cdot\,, Ab_{\mathrm{finite}})$, определяемую рядом Дирихле

$$\zeta(s, Ab_{\mathrm{finite}}) = \sum_X \frac{1}{\sharp\,\mathrm{End}(X)^s}\,, \qquad s \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}\, s > 1, \tag{1}$$

с суммированием, распространённым на конечные абелевы группы $X$ с точностью до изоморфизма (т.е. на конечные абелевы группы $X$, взятые по одной из каждого класса изоморфных конечных абелевых групп). Под $\sharp\,\mathrm{End}(X)$ мы понимаем число элементов множества $\mathrm{End}(X)$ эндоморфизмов группы $X$. Абсолютная сходимость ряда обеспечивается условием $\mathrm{Re}\, s > 1$. Мы трактуем $\zeta(\,\cdot\,, Ab_{\mathrm{finite}})$ как дзета-функцию категории конечных абелевых групп $Ab_{\mathrm{finite}}$.

**2.** Наша дзета-функция $\zeta(\,\cdot\,, Ab_{\mathrm{finite}})$ отлична от дзета-функции Курокавы категории $Ab_{\mathrm{finite}}$. Для полноты картины, приведём здесь общее определение Курокавы [2].

Пусть $C$ – категория с нулём. Объект $X$ категории $C$ назовём простым, если каждый морфизм $X \to Y$ в $C$ является либо нулевым морфизмом, либо мономорфизмом. Если множество $\mathrm{End}(X)$ эндоморфизмов объекта $X$ конечно и $X$ не нуль, назовём $X$ конечным объектом. Понятно, если $X$ – простой конечный объект и объект $Y$ изоморфен $X$, то $Y$ – также простой конечный объект и $\sharp\,\mathrm{End}(Y) = \sharp\,\mathrm{End}(X)$.

*Ключевые слова*: дзета-функция, конечные абелевы группы.

Курокава определяет дзета-функцию $\zeta(\,\cdot\,, C)$ категории $C$ произведением

$$\zeta(s, C) = \prod_P \Bigl(1 - \frac{1}{\sharp \operatorname{End}(P)^s}\Bigr)^{-1},$$

распространённым на простые конечные объекты $P$ с точностью до изоморфизма (т.е. на простые конечные объекты $P$, взятые по одному из каждого класса изоморфных простых конечных объектов). Если произведение сходится для $s = \sigma$ с некоторым вещественным $\sigma$, то произведение сходится и для каждого $s$ с $\operatorname{Re} s > \sigma$ и представляет комплексную функцию, определённую на полуплоскости $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \sigma\}$. В категории абелевых групп и в категории конечных абелевых групп конечные простые объекты суть группы, изоморфные $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ с простым $p$. При этом $\sharp \operatorname{End}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = p$. Соответственно, дзета-функцией Курокавы каждой из этих категорий оказывается дзета-функция Римана.

**3.** Обратимся теперь к функции $\zeta(\,\cdot\,, Ab_{\text{finite}})$, определённой нами посредством ряда Дирихле (1). Мы разложим её в эйлеровское произведение и найдём для неё представление через дзета-функцию Римана. Для целого положительного числа $n$ пусть $q_n$ есть число разбиений $n$ в сумму квадратов целых положительных чисел. Другими словами, $q_n$ есть число представлений

$$n = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x_k \quad \text{с} \quad x_k \geqslant 0, \quad x_k \in \mathbb{Z}.$$

Ниже, для обеспечения необходимых сходимостей рядов и произведений, нам достаточно знать, что с некоторым вещественным $h < 2$ для всех целых $n \geqslant 1$ имеет место неравенство $q_n \leqslant h^n$. Доказательство этого простого неравенства мы, ради краткости, опускаем. Вместе с тем, $q_n$ не превосходит числа $p(n)$ всех разбиений $n$ в сумму целых положительных чисел, а для $p(n)$ имеет место оценка $p(n) \ll an^{-1} \exp(b\sqrt{n})$ с некоторыми вещественными положительными $a$ и $b$ (см. [3, гл. 4, §4.2]).

**Теорема.** *Для дзета-функции $\zeta(\,\cdot\,, Ab_{\text{finite}})$ категории конечных абелевых групп* (1) *имеется разложение в произведение*

$$\zeta(s, Ab_{\text{finite}}) = \prod_p \Bigl(1 + \frac{q_1}{p^s} + \frac{q_2}{p^{2s}} + \frac{q_3}{p^{3s}} + \dots\Bigr), \tag{2}$$

*распространённое на простые числа* $p$ *и сходящееся при* $s \in \mathbb{C}$ *под условием* $\operatorname{Re} s > 1$.

**Доказательство.** Каждая конечная абелева группа $X$ представима единственным образом как прямое произведение по всем простым числам $p$ своих примарных компонент $X(p)$, при этом

$$\sharp \operatorname{End}(X) = \prod_p \sharp \operatorname{End}(X(p)).$$

Для простого числа $p$ выберем как-либо множество $U_p$ конечных абелевых $p$-групп, содержащее в точности по одной группе из каждого класса изоморфных конечных абелевых $p$-групп, исключая класс, состоящий из тривиальной группы порядка 1. Сумма в определении (1) оказывается равной произведению

$$\prod_p \bigl(1 + R_p(s)\bigr) \quad \text{с} \quad R_p(s) = \sum_{Q \in U_p} \frac{1}{\sharp \operatorname{End}(Q)^s} \tag{3}$$

Согласно известной классификации, $U_p$ можно составить из групп

$$Q = \prod_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/p^{e_i}\mathbb{Z}, \tag{4}$$

со всевозможными целыми $e_1 \geqslant e_2 \geqslant \ldots \geqslant e_r \geqslant 1$, $r \geqslant 1$ (здесь знак произведения обозначает прямое произведение групп). В соответствии с этим, мы можем трактовать сумму по $Q$ в (3) как сумму, распространённую на множество $\mathcal{E}$ всевозможных конечных невозрастающих последовательностей целых положительных чисел. Порядок группы $Q$ в (4) равен $p^m$ с $m = e_1 + e_2 + \ldots$. Пусть $m = \widehat{e}_1 + \widehat{e}_2 + \ldots$ с $\widehat{e}_1 \geqslant \widehat{e}_2 \geqslant \ldots$ – разбиение числа $m$, сопряжённое к разбиению $m = e_1 + e_2 + \ldots$ с $e_1 \geqslant e_2 \geqslant \ldots$. Для числа эндоморфизмов группы $Q$ имеется представление

$$\sharp \operatorname{End}(Q) = p^{\lambda} \quad \text{с} \quad \lambda = \widehat{e}_1^{\,2} + \widehat{e}_2^{\,2} + \ldots.$$

Сопряжение понимается нами так, как это принято в комбинаторике в связи с разбиениями (см. [3, гл. 4, §4.1]). Сопряжение отображает биективно $\mathcal{E}$ на $\mathcal{E}$. Поэтому, суммирование по всем $(e_1, e_2, \ldots) \in \mathcal{E}$ можно интерпретировать как суммирование по всем $(\widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \ldots) \in \mathcal{E}$ и таким образом

$$R_p(s) = \sum_{(\widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \ldots)} \frac{1}{p^{(\widehat{e}_1^2 + \widehat{e}_2^2 + \ldots)s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{p^{ns}},$$

что и требовалось. □

**Теорема.** *Дзета-функция $\zeta(\,\cdot\,, Ab_{\mathrm{finite}})$ категории конечных абелевых групп* (1) *продолжается мероморфно на полуплоскость*

$$\{s \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\, s > 0\} \tag{5}$$

*и голоморфна в этой полуплоскости всюду, исключая точки $1/m^2$ с $m = 1, 2, 3, \ldots$, где она имеет простые полюсы. В этой полуплоскости имеется разложение*

$$\zeta(s, Ab_{\mathrm{finite}}) = \prod_{m=1}^{\infty} \zeta(m^2 s) \tag{6}$$

*с дзета-функцией Римана $\zeta$ в правой части, сходящееся равномерно на каждой полуплоскости $D_\varepsilon = \{s \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}\, s \geqslant \varepsilon\}$ с вещественным $\varepsilon > 0$. В области* (5) *функция $\zeta(\,\cdot\,, Ab_{\mathrm{finite}})$ обращается в нуль в тех и только тех точках, в которых обращается в нуль какой-либо из множителей в правой части* (6).

**Доказательство.** Обратимся к эйлеровскому разложению (2). Коэффициенты $q_n$ можно охарактеризовать производящей функцией

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n z^n = \prod_{m=1}^{\infty} \Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty} z^{km^2}\Big) = \prod_{m=1}^{\infty} \big(\,1 - z^{m^2}\,\big)^{-1}. \tag{7}$$

Под условием $|z| < 1$, все ряды и произведения в (7) сходятся. Пусть $p$ – простое число. Из (7) с $z = 1/p^s$ и $\mathrm{Re}\, s > 0$ следует

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{p^{ns}} = \prod_{m=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{p^{m^2 s}}\Big)^{-1}. \tag{8}$$

Здесь в левой части мы имеем $p$-ый локальный множитель эйлеровского произведения (2). В предположении, что $\mathrm{Re}\, s > 1$, можно перемножить (8) по всем $p$ и таким образом получить (6). Рассмотрим теперь более детально произведение в правой части (6). Если $s \in D_\varepsilon$, то для каждого $m \in \mathbb{Z}$ под условием $m > \sqrt{2/\varepsilon}$ имеем

$$|\zeta(m^2 s) - 1| < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{m^2\varepsilon - 2 + 2}} < \frac{1}{2^{m^2\varepsilon - 2}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{3}{2^{m^2\varepsilon}}.$$

Этой оценкой обеспечивается равномерная на $D_\varepsilon$ сходимость произведения (6). Вместе с тем произведение

$$\prod_m \zeta(m^2(\,\cdot\,)) \quad \text{по целым} \quad m > \sqrt{2/\varepsilon}$$

оказывается произведением голоморфных в $D_\varepsilon$ функций, сходящимся нормально на $D_\varepsilon$. Отсюда стандартным образом следуют утверждения теоремы (см. [4, гл. V, §3]). $\square$

## Литература

1. N. Kurokawa, *On Some Euler Products* I. — Proc. Japan Acad., Ser. A **60**, No. 9 (1984), 335–338.
2. N. Kurokawa, *Zeta functions of categories*. — Proc. Japan Acad., Ser. A **72**, No. 10 (1996), 221–222.
3. M. Hall, *Combinatorial Theory*, Blaisdell publishing company, 1967. 10 pp.
4. H. Cartan, *Théorie Élémentaire des Fonctions Analytiques d'une ou Plusieurs Variables Complex*, Hermann, Paris, 1961. 2 pp.

Proskurin N. V. Zeta function of the category of finite Abelian groups.

Zeta function attached to the category of finte Abelian groups is defined and studied. This zeta function is expressed in terms of the Riemann zeta function.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191023, Санкт-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27
Россия
*E-mail*: np@pdmi.ras.ru

Поступило 26 сентября 2016 г.