Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 449, 2016 г.

Г. В. Кузьмина

ОБ ОДНОМ ЭКСТРЕМАЛЬНО-МЕТРИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К ЗАДАЧАМ ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ

§1. Введение. Формулировки теорем

1. В ГТФ большое внимание уделяется задачам об экстремальном разбиении со свободными полюсами ассоциированных квадратичных дифференциалов. Одной из таких задач является следующая.

Пусть $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_n\}$ и $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ – система различных точек на $\overline{\mathbb{C}}$ и система положительных чисел. Рассматривается задача о максимуме суммы

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 M(D_k, a_k) \tag{1}$$

в семействе $\mathcal{D}(\mathbf{a})$ систем неналегающих односвязных областей $D_1, \dots, D_n$, удовлетворяющих условию $a_k \in D_k$ при $k = 1, \dots, n$. Здесь и ниже используются следующие обозначения. $M(D_k, a_k)$ – приведенный модуль односвязной области D_k относительно точки $a_k \in D_k$. (Напомним, что $M(D_k, a_k) = \frac{1}{2\pi} \log R(D_k, a_k)$, где $R(D_k, a_k)$ – конформный радиус области D_k относительно точки $a_k \in D_k$, если $a_k \neq \infty$, $M(D_k, \infty) = \frac{1}{2\pi} \log R(D_k, \infty)$.)

Максимум суммы (1) в семействе $\mathcal{D}(\mathbf{a})$ обозначаем через $\mathcal{M}(a_1, \dots, a_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, в случае $\boldsymbol{\alpha} = \{1, \dots, 1\}$ – через $\mathcal{M}(a_1, \dots, a_n)$.

Через $M(\Pi, a, b)$ обозначаем приведенный модуль двуугольника Π относительно его вершин a и b.

В связи со сложностью задачи о максимуме суммы (1) в общем случае эта задача рассматривалась в наиболее важном для приложений случае: при наличии той или иной симметрии в расположении точек a_k и параметров α_k. Начало этому кругу исследований положила следующая теорема.

Ключевые слова: экстремальная метрика, экстремальное разбиение, квадратичный дифференциал.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{a} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ *– система точек окружности* $C = \{|z| = 1\}$. *Максимум суммы* (1) *в семействе* $D(\mathbf{a})$ *достигается только в том случае, когда точки* a_k *равномерно распределены на окружности* C, *а областями* D_k *являются углы, образованные биссектрисами лучей, проходящими через точки* a_k. *Имеем равенство*

$$M(a_1, \ldots, a_n) = \frac{n}{2\pi} \log \frac{4}{n}.$$

С точностью до поворота вокруг начала координат, экстремальной конфигурацией являются полюсы и круговые области квадратичного дифференциала

$$-\frac{z^{n-2}}{(z^n - 1)^2} dz^2.$$

Первоначально теорема 1 была доказана В. Н. Дубининым (см. [1]) методом разделяющего преобразования конденсаторов и областей. Доказательство этой и ряда других теорем Е. Г. Емельянов [2] получил посредством экстремально-метрического подхода, а именно, в качестве приложения теоремы о связи между различными задачами об экстремальном разбиении. В этой теореме утверждается, что при выполнения некоторых условий (так называмых условий согласования углов и весов) сумма (1) мажорируется взвешенной суммой приведенных модулей двуугольников с вершинами в тех же точках $a_1, \ldots, a_n$. О других приложениях этой теоремы говорится ниже. Указанную теорему в [2] для краткости будем называть теоремой Е. О более общем результате метода модулей семейств кривых см. работу А. Ю. Солынина [4].

Теорему 1 дополняет следующая теорема. Её доказательство приводится в §2, оно демонстрирует роль приведенных модулей двуугольников в рассматриваемой задаче.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{a} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ *– система точек, расположенных на* n *лучах,выходящих из начала координат под равными углами друг к другу, и удовлетворяющих условию* $|a_k| = r_k$, *где* $r_1 \cdot \ldots \cdot r_n = A > 0$. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{M}(a_1, \ldots, a_n) = \frac{n}{2\pi} \log(\frac{4}{n} A^{1/n}).$$

Этот максимум достигается только в случае, когда точки a_k *равномерно распределены на окружности* $|z| = A^{1/n}$, *а областями* D_k

служат углы, образованные биссектрисами углов между лучами, проходящими через точки a_k. С точностью до поворота вокруг начала координат, экстремальная конфигурация образуется полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$-\frac{z^{n-2}}{(z^n-A)^2}dz^2.$$

2. К числу классических задач ГТФ относится задача о максимуме конформного инварианта

$$J(a_1,\ldots,a_n)=2\pi\mathcal{M}(a_1,\ldots,a_n)-\frac{2}{n-1}\log\prod_{1\leqslant k<l\leqslant n}|a_k-a_l|.$$

В настоящее время эта задача решена при 3 (результат Г. М. Голузина), при $n=4$ (см. работы автора [5] и С. И. Федорова [6]) и $n=5$. В последнем случае имеем следующую теорему.

Теорема 3. *Справедливо равенство*

$$J(a_1,\ldots,a_5)=4^{11/3}\cdot 3^{-3/4}\cdot 5^{-25/6}. \tag{2}$$

Этот максимум достигается в том случае, когда $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ $=\{1,e^{-2\pi i/3},0,e^{2\pi i/3},\infty\}$, а областями $D_k, k=1,\ldots,5$ служат круговые области квадратичного дифференциала

$$-\frac{z^6+7z^3+1}{z^2(z^3-1)^2}dz^2.$$

Каждая другая экстремальная конфигурация теоремы 3 получается из указанной при дробно-линейном автоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$.

Теорема 3 при дополнительном предположении, что система **a** симметрична относительно некоторой окружности или прямой, доказана в [7] и Дубининым в[10] (см.также [11]). В общем случае эта теорема доказана в [8, I]. При доказательстве в [7] существенно использовалась теорема E, о которой говорилось выше. Эта же теорема дает доказательство допустимости рассматривавшейся метрики в [8,I, лемма3], что дополняет доказательство теоремы в [8, I]. Альтернативные варианты доказательства теоремы 3 рассматриваются в [8, II] и [8, III].

3. Пусть $a_0=0, a_k, k=1,\ldots,n,$ – система точек окружности $C=\{|z|=1\}$, и пусть $\alpha>0$.

Рассмотрим задачу о максимуме $2\pi\mathcal{M}(0, a_1, \ldots, a_n; \alpha, 1, \ldots, 1)$ суммы

$$\alpha^2 \log R(D_0, 0) + \sum_{k=1}^{n} \log R(D_k, a_k) \tag{3}$$

в семействе $\mathcal{D}(\mathbf{a})$ систем неналегающих односвязных областей D_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, где $0 \in D_0, a_k \in D_k$, $k = 1, \ldots, n$. Эта задача существенно различна в случаях $0 < \alpha \leqslant 1$ и $\alpha > 1$. В первом случае имеем следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть $\alpha \in (0, 1]$, $n \geqslant 2$. Максимум суммы* (3) *в указанном семействе систем областей реализуется для симметричной системы точек $0, a_k = e^{i2\pi(k-1)/n}$, $\quad k = 1, \ldots, n$, и для системы круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(z)dz^2 = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{(n^2 - \alpha^2)z^n + \alpha^2}{z^2(z^n - 1)^2} dz^2, \tag{4}$$

каждая из точек a_k является полюсом второго порядка этого дифференциала. Для искомого максимума имеем равенство

$$\begin{aligned} &2\pi\mathcal{M}(0, a_1, \ldots, a_n; \alpha, 1, \ldots, 1) \\ &= n\Big\{ -\big(1 - \frac{\alpha}{n}\big)^2 \log\big(1 - \frac{\alpha}{n}\big) - \big(1 + \frac{\alpha}{n}\big)^2 \log(1 + \frac{\alpha}{n}) \\ &\qquad = \frac{\alpha^2}{n^2} \log\big(\frac{4\alpha^2}{n^2}\big) + \log\frac{4}{n}\Big\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Каждая экстремальная конфигурация получается из указанной при преобразовании поворота $z \to e^{i\phi_0} z$, $\quad \phi_0$ – вещественное число.

Теорема 4 в случае $\alpha = 1$ доказана В. Н. Дубининым [1] методом разделяющего преобразования. В случае $\alpha \in (0, 1]$ доказательство этой теоремы было получено в [12] в качестве приложения теоремы E о связи двух задач об экстремальном разбиении.

Еще в [9] (а также в [10]) Дубининым был поставлен вопрос, будет ли максимум суммы (3) реализоваться симметричной системой точек при $\alpha > 1$. Этому вопросу были посвящены исследования ряда авторов. В настоящей работе мы распространяем теорему 4 на случай значений $\alpha > 1$. При этом мы рассматриваем разбиение z-сферы на семейство неналегающих областей, содержащих как двуугольники, так и треугольники с вершинами в отмеченных точках. В этом случае теорема E непосредственно неприменима, что потребовало модификации экстремально-метрического подхода, использованного в [12]. Именно, доказывается следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть $\alpha = \alpha_0 > 1$ фиксировано. Пусть натуральное число $N(\alpha_0)$ определяется следующим образом. Введем функцию*

$$g(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + (1-\alpha)\log|1-\alpha| - 2(1+\alpha)\log(1+\alpha) + 4\alpha\log(2\alpha).$$

Эта функция непрерывна на положительной вещественной полуоси, $g(0) = g(+\infty) = +\infty$ и $g(\alpha)$ имеет единственный минимум в точке $\alpha_- = 0,662\dots$. Пусть $\alpha^* = \alpha^*(\alpha_0)$ – решение уравнения $g(\alpha^*) = g(\alpha_0)$ на интервале $(0, \alpha_-)$. Через $N(\alpha_0)$ обозначаем наименьшее натуральное число n, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{\alpha_0}{n} \leqslant \alpha^*(\alpha_0). \tag{6}$$

При $n \geqslant N(\alpha_0)$ максимум величины $\mathcal{M}(0, a_1, \dots, a_n; \alpha_0, 1, \dots, 1)$ в семействе $\mathcal{D}(\mathbf{a})$ достигается для равномерно распределенных точек $a_1^*, \dots, a_n^*$ на окружности $|z| = 1$ и для системы круговых областей дифференциала (4) при $\alpha = \alpha_0$. Для указанного максимума имеет место равенство (5), где $\alpha = \alpha_0$.

При $\alpha = \sqrt{2}, 2, 3$ соответственно имеем $N(\alpha_0) = 7, 13, 28$.

§2. Доказательства

1. Доказательство теоремы 2. Пусть S_k – угол, образованный лучами, проходящими через точки a_k, a_{k+1}:

$$S_k = \{z : 2\pi k/n < \arg z < 2\pi(k+1)/n\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

При отображении

$$w = f_k(z) = \{ze^{-2\pi ik/n}\}^{n/2}$$

угла S_k на верхнюю полуплоскость $H = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ точкам a_k, a_{k+1} соответствуют точки

$$\rho_k = r_k^{n/2}, \quad -\rho_{k+1} = -r_{k+1}^{n/2}.$$

На w-сфере рассмотрим задачу о максимуме суммы

$$M(D_k, \rho_k) + M(D_{k+1}, -\rho_{k+1})$$

в семействе пар неналегающих односвязных областей, содержащих соответственно точки ρ_k и $-\rho_{k+1}$. Экстремальной парой областей этой задачи являются полуплоскости, имеющие общей границей прямую

$\operatorname{Re} w = (\rho_k - \rho_{k+1})/2$. Эти полуплоскости являются характеристическими областями квадратичного дифференциала

$$q(w)dw^2 = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{C}{(w-\rho_k)^2(w+\rho_{k+1})^2}dw^2, \quad C > 0.$$

В структуре траекторий дифференциала $-q(w)dw^2$ имеются два двуугольника: верхняя полуплоскость H с вершинами $\rho_k, -\rho_{k+1}$ и нижняя полуплоскость H^- с теми же вершинами. Непосредственно из определения приведенного модуля двуугольника вытекают равенства

$$M(H, \rho_k, -\rho_{k+1}) = M(H^-, \rho_k, -\rho_{k+1}) = \frac{2}{\pi}\log(\rho_k + \rho_{k+1})/2.$$

По формуле преобразования приведенного модуля двуугольника при конформном отображении [3], для приведенного модуля двуугольника, представляющего собой область S_k с вершинами a_k, a_{k+1}, имеем равенство

$$M(S_k, a_k, a_{k+1}) = M(H, \rho_k, -\rho_{k+1}) - \frac{1}{\pi}\left[\log\frac{n}{2} + \frac{n-2}{n}(\log\rho_k + \log\rho_{k+1})\right].$$

Теперь из теоремы E получаем неравенство

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(a_1, \dots, a_n) \leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\Big\{\frac{1}{2}\log(\rho_k + \rho_{k+1})& \\ - \Big[2\log\frac{n}{2} + \frac{n-2}{n}(\log\rho_k + \log\rho_{k+1}\Big]\Big\}& \\ = \frac{1}{\pi}\mathcal{F}(\rho_k, \dots, \rho_n)&,\end{aligned}$$

и рассматриваемая задача сводится к задаче о максимуме функции $\mathcal{F}(\rho_1, \dots, \rho_n)$ при связи $\rho_1 ... \rho_n = A^{n/2}$.

Введем функцию

$$\tilde{\mathcal{F}}(\rho_1, \dots, \rho_n) = \mathcal{F}(\rho_1, \dots, \rho_n) - \mu(\sum_{k=1}^{n}\log\rho_k - \frac{n}{2}\log A),$$

μ – постоянная. Система уравнений $\frac{\partial\tilde{\mathcal{F}}}{\partial\rho_k} = 0, k = 1, \dots, n$, имеет вид

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{\rho_k + \rho_{k+1}} + \frac{1}{\rho_k + \rho_{k-1}}) - \frac{n-2}{n}\frac{1}{\rho_k} = \frac{\mu}{\rho_k}$$

или

$$\frac{\rho_k}{\rho_k + \rho_{k+1}} + \frac{\rho_k}{\rho_k + \rho_{k-1}} = \tilde{\mu}, \quad \tilde{\mu} = 2\mu + 2(n-2)/n.$$

Складывая почленно полученные равенства, получаем $\tilde{\mu} = 1$. Предположение, что среди чисел $\rho_1, \dots, \rho_n$ имеется наибольшее, например, $\rho_1 > \rho_k$ при $k > 1$, приводит к противоречию. Следовательно, $\rho_k = r_1^{n/2} = A^{1/2}$ при $k = 1, \dots, n$. Отсюда получаем выражение теоремы 2 для искомого максимума и завершаем доказательство.

2. Доказательство теоремы 5. Предварительно приведем следующую лемму,являющуюся расширенной формулировкой результата Л. И. Колбиной [11].

Лемма 1. *Пусть $\alpha > 0$. Пусть $2\pi\mathcal{M}(0, 1, -1; 2\alpha, 1, 1)$ – максимум суммы*

$$4\alpha^2 \log R(D_0, 0) + \log R(D_1, 1) + \log R(D_2, -1) \tag{7}$$

в семействе всех троек неналегающих односвязных областей D_0, D_1, D_2 на w-сфере, $0 \in D_0, 1 \in D_1, -1 \in D_2$. Имеем равенство

$$\begin{aligned} 2\pi\mathcal{M}(0, 1, -1, ; 2\alpha, 1, 1) \\ = -2(1-\alpha)^2 \log|1-\alpha| - 2(1+\alpha)^2 \log(1+\alpha) \\ + 4\alpha^2 \log\alpha + (1+2\alpha^2)\log 4. \end{aligned} \tag{8}$$

*При $\alpha \neq 1$ экстремальной системой областей D_0, D_1, D_2 служит система круговых областей квадратичного дифференциала (см. рис.*1–3)

$$q(w)dw^2 = -\frac{1}{\pi^2}\frac{(1-\alpha^2)w^2 + \alpha^2}{w^2(w^2-1)^2}dw^2. \tag{9}$$

Точки $0, 1, -1$ являются двойными полюсами этого дифференциала. Вещественная ось является объединенем замыканий критических траекторий и ортогональных траекторий дифференциала (9).

При $\alpha \neq 1$ в структуре ортогональных траекторий дифференциала (9) *имеются три полосообразные области, каждая из них симметрична относительно вещественной оси.*

При $0 < \alpha < 1$ указанными областями являются двуугольники $\Pi_1 = \Pi_1(0, 1), \Pi_2 = \Pi_2(0, -1), \Pi_3 = \Pi_3(1, -1)$, имеющие вершины в указанных точках. Области Π_1 и Π_2 симметричны друг с другом относительно мнимой оси и имеют общий граничный отрезок $[-i\alpha/\sqrt{1-\alpha^2}, i\alpha/\sqrt{1-\alpha^2}]$ (при $\alpha \to 1$ этот отрезок переходит в мнимую ось).Область Π_3 симметрична относительно обеих координатных осей и содержит полупрямые $(1, \infty]$ и $(i\alpha/\sqrt{1-\alpha^2}, i\infty]$.

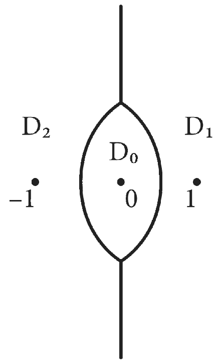

Рис. 1. $(0 < \alpha < 1)$.

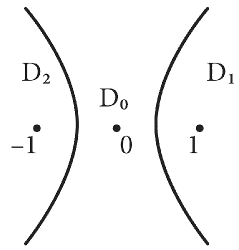

Рис. 2. $(\alpha = 1)$.

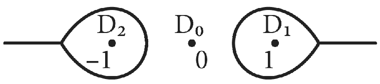

Рис. 3. $(\alpha > 1)$.

При $\alpha > 1$ *в структуре ортогональных траекторий имеются полосообразные области* $\Pi_1 = \Pi_1(0,1)$, $\Pi_2 = \Pi_2(0,-1)$, $\Pi_3 = \Pi_3(0,0)$. *Области* Π_1 *и* Π_2 *симметричны друг с другом относительно мнимой оси, замыкания этих областей содержат соответственно отрезок* $[1, \alpha/\sqrt{\alpha^2-1}]$ *и* $[-1, -\alpha/\sqrt{\alpha^2-1}]$. *Область* Π_3 *симметрична относительно обеих координатных осей и содержит полупрямые* $(\alpha/\sqrt{\alpha^2-1}, \infty]$ *и* $(-\alpha/\sqrt{\alpha^2-1}, -\infty]$ *(см. рис. 4–6).*

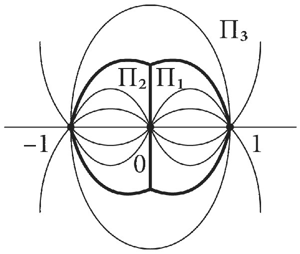

Рис. 4. $(0 < \alpha < 1)$.

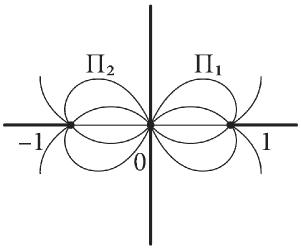

Рис. 5. $(\alpha = 1)$.

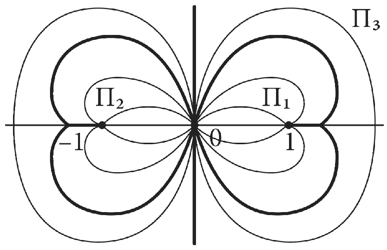

Рис. 6. $(\alpha > 1)$.

В случае $\alpha = 1$ *структура траекторий и ортогональных траекторий дифференциала* (9) *предельно проста.*

Неравенство леммы 1 следует из общего результата Л. И. Колбиной [12]. Факты о структуре траекторий и ортогональных траекторий квадратичного дифференциала (9) устанавливабтся непосредственно.

Доказательство теоремы 5. Следуем конструкции доказательства теоремы в [7, теорема 1). Пусть

$$0 < \arg a_{k+1} - \arg a_k = 2\pi\lambda_k, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1.$$

Разобъем w-сферу на S_k углов с общей вершиной в начале координат и сторонами, проходящими через точки a_k, a_{k+1}:

$$S_k = \{z : \arg a_k < \arg z < \arg a_{k+1}\}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим отображение

$$w = f_k(z) = \{ze{-}i \arg a_k\}^{1/(2\lambda_k)} \tag{10}$$

угла S_k на верхнюю полуплоскость $H = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$, при котором точки $0, a_k, a_{k+1}$ переходят соответственно в точки $0, 1, -1$. На w-сфере рассмотрим задачу о максимуме величины $2\pi\mathcal{M}(0, 1, -1; 2\alpha_k, 1, 1)$, где $\alpha_k = \alpha\lambda_k$. Для ассоциированного квадратичного дифференциала этой задачи имеем равенство (9) при $\alpha = \alpha_k$:

$$q_k(w)dw^2 = -\frac{1}{\pi^2}\frac{(1-\alpha_k^2)w^2 + \alpha_k^2}{w^2(w^2-1)}d^2. \tag{11}$$

Пусть $\Pi_j^{(k)}, j = 1, 2, 3,$ – полосообразные области лифференциала $-q_k(w)dw^2$, описанные в лемме 1, и пусть

$$\Pi_j^{(k)+} = \Pi_j^{(k)} \cap H, \quad j = 1, 2, 3.$$

Через $P_j^{(k)}$, $j = 1, 2, 3$, обозначаем прообразы областей $\Pi_j^{(k)+}$ при отображении (10). Области $P_j^{(k)}$, $j = 1, 2, 3$, реализуют разбиение угла S_k.

В дальнейшем рассматриваем два случая.

1) Пусть $0 < \alpha < 1$. Тогда $\alpha_k = \alpha\lambda_k < 1$ при всех $k = 1, \ldots, n$. В этом случае $\Pi_j^{(k)+}$, $j = 1, 2, 3,$ – двуугольники соответственно с вершинами $0, 1; 0, -1; 1, -1$; $P_j^{(k)}$, $j = 1, 2, 3,$ – двуугольники в угле S_k соответственно с вершинами $0, a_k; 0, a_{k+1}; a_k, a_{k+1}$. Система двуугольников $P_j^{(k)}$, $j = 1, 2, 3$, $k = 1, \ldots, n$, реализует разбиение области $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, a_1, \ldots, a_n\}$.

Равенство (8) леммы 1 при $\alpha = \alpha_k$ можем записать в виде

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}(0,1,-1;2\alpha_k,1,1)\\
&\qquad = h_1^{(k)2}\operatorname{Mod}\Pi_1^{(k)} + h_2^{(k)2}\operatorname{Mod}\Pi_2^{(k)} + h_3^{(k)2}\operatorname{Mod}\Pi_3^{(k)}\\
&\quad = 2\cdot\frac{1}{4}\{h_1^{(k)2}\operatorname{Mod}\Pi_1^{(k)+} + h_2^{(k)2}\operatorname{Mod}\Pi_2^{(k)+} + h_3^{(k)2}\operatorname{Mod}\Pi_3^{(k)+}\}, \qquad (12)
\end{aligned}$$

где

$$h_1^{(k)} = h_2^{(k)} = \alpha_k, \quad h_3^{(k)} = 1-\alpha_k.$$

По теореме E имеем неравенство

$$\begin{aligned}
&2\pi\mathcal{M}(0,a_1,\dots,a_n;\alpha,1,\dots,1)\\
&\qquad \leqslant \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\{h_1^{(k)2}\operatorname{Mod}P_1^{(k)} + h_2^{(k)2}\operatorname{Mod}P_2^{(k)} + h_3^{(k)2}\operatorname{Mod}P_3^{(k)}\}. \qquad (13)
\end{aligned}$$

По формуле преобразования приведенных модулей двуугольников при конформном отображении,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Mod}\Pi_j^{(k)+} &= \operatorname{Mod}P_j^{(k)} + \frac{1}{\pi\alpha_k}\log\frac{1}{2\lambda_k}, \quad j=1,2,\\
\operatorname{Mod}\Pi_3^{(k)+} &= \operatorname{Mod}P_3^{(k)} + \frac{2}{\pi(1-\alpha_k)}\log\frac{1}{2\lambda_k}.
\end{aligned}$$

Теперь неравенство (13) можем записать в виде

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(0,a_1,\dots,a_n;\alpha,1,\dots,1] &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\biggl\{\frac{\alpha_k^2}{4}[\operatorname{Mod}\Pi_1^{(k)+} + \frac{1}{\pi\alpha_k}\log(2\lambda_k)]\\
&\quad + \frac{\alpha_k^2}{4}\Bigl[\operatorname{Mod}\Pi_2^{(k)+} + \frac{1}{\pi\alpha_k}\log(2\lambda_k)\Bigr]\\
&\quad + \frac{(1-\alpha_k)^2}{4}\Bigl[\operatorname{Mod}\Pi_3^{(k)+} + \frac{2}{\pi(1-\alpha_k)}\log(2\lambda_k)\Bigr]\biggr\}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\biggl\{\frac{\alpha_k^2}{4}\operatorname{Mod}\Pi_1^{(k)+} + \frac{\alpha_k^2}{4}\operatorname{Mod}\Pi_2^{(k)+}\\
&\quad + \frac{(1-\alpha_k)^2}{4}\operatorname{Mod}\Pi_3^{(k)+} + \frac{1}{2\pi}\log(2\lambda_k)\biggr\}. \qquad (14)
\end{aligned}$$

Из (12) и (14) получаем неравенство

$$2\pi\mathcal{M}(0,a_1,\dots,a_n;\alpha,1,\dots,1) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\{\pi\mathcal{M}(0,1,-1;\alpha_k,1,1)+\log(2\lambda_k)\}. \quad (15)$$

Остановимся коротко на другом доказательстве неравенства (15). Пусть метрика $\rho(z)|dz|$ определяется условием

$$\rho(z)|dz| = |q_k(f_k(z))|^{1/2}|f_k'(z)||dz|$$

$$\text{при} \quad z\in S_k\setminus\{0,a_k,a_{k+1}\}, \quad k=1,\dots,n. \quad (16)$$

Покажем, что метрика $\rho(z)|dz|$ допустима в проблеме модуля, определяющей $\mathcal{M}(0,a_1,\dots,a_n;\alpha,1,\dots,1)$. С этой целью рассмотрим структуру двуугольников $P_j^{(k)}$, $k=1,\dots,n$; $j=1,2,3$. Двуугольники $P_1^{(1)}$, $P_2^{(1)},\dots,P_1^{(n)}$, $P_2^{(n)}$ заполняют окрестность начала координат, каждый из них содержит дуги, соединяющие начало координат с соответствующей из точек $a_k, k=1,\dots,n$. Двуугольники $P_1^{(k)}$, $P_3^{(k)}$, $P_2^{(k-1)}$, $P_3^{(k-1)}$ заполняют окрестность точки a_k, каждый из них содержит дуги, соединяющие точку a_k с одной из точек $0,a_{k+1},a_{k-1}$. Пусть Γ_k – кривая на $\overline{\mathbb{C}}$, гомотопная точечной кривой в точке a_k. Ясно, что кривая Γ_k содержит дуги, целиком принадлежащие каждому из двуугольников $P_1^{(k)},P_3^{(k)},P_2^{(k-1)},P_3^{(k-1)}$ и соединяющие их противоположные стороны, поэтому для длины кривой Γ в метрике $\rho(z)|dz|$ имеем неравенство

$$\operatorname{length}_\rho\Gamma_k \geqslant 1.$$

Пусть теперь Γ_0 – кривая на $\overline{\mathbb{C}}$, – гомотопная точечной кривой в начале координат. Тогда кривая Γ_0 содержит дуги, целиком принадлежащие каждому из перечисленных выше двуугольников, заполняющих окрестность начала координат, и соединяющих их противоположные стороны. Поэтому

$$\operatorname{length}_\rho\Gamma_k \geqslant \sum_{k=1}^{n}\alpha_k = \alpha.$$

Учитывая, что метрика $\rho(z)|dz|$ допустима в рассматриваемой проблеме модуля и что при отображении $w=f_k(z)$ угла S_k на полуплоскость H ϵ-окрестностям точек a_k,a_{k+1} соответствуют $(2\lambda_k)^{-1}$-окрестности точек $1,-1$, получаем неравенство (15).

Пусть теперь $\alpha > 1$. Тогда среди чисел $\alpha_k = \alpha\lambda_k$ могут быть $\alpha_k > 1$. В этом случае в структуре ортогональных траекторий дифференциала (11) присутствуют двуугольники

$$\Pi_1^{(k)} = \Pi_1^{(k)}(0,1), \quad \Pi_2^{(k)} = \Pi_2^{(k)}(0,-1), \quad \Pi_3^{(k)} = \Pi_3^{(k)}(0,0),$$

где $\Pi_3^{(k)}$ содержит отрезок вещественной оси $[-\infty, -b_k) \cup (b_k, +\infty]$, где $b_k = \alpha_k/(\alpha_k^2 - 1)^{1/2}$. Соответственно, угол S_k заполняется областями $P_1^{(k)}, P_2^{(k)}, P_3^{(k)}$, являющимися прообразами областей

$$\Pi_j^{(k)+} = \Pi_j^{(k)} \cap H, \quad j = 1, 2, 3,$$

при отображении (10); в отличие от случая $\alpha_k < 1$, здесь область $\Pi_3^{(k)+}$ представляет собой треугольник с вершиной в начале координат и противоположной стороной $[-\infty, -b_k) \cup (b_k, +\infty]$. Поэтому к указанной системе областей теорема E неприменима. Однако рассуждение, аналогичное приведенному выше, показывает, что метрика (16) является допустимой и потому неравенство (15) остается справедливым.

Используя выражение леммы, неравенство (12) можем записать в виде

$$2\pi\mathcal{M}(0, a_1, \ldots, a_n; \alpha, 1, \ldots, 1) \leqslant G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

где

$$\begin{aligned} G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ = \sum_{k=1}^{n} \Big\{ -(\alpha_k)^2 \log|1-\alpha_k| - (1+\alpha_k)^2 \log(1+\alpha_k) \\ + (1+2\alpha_k^2)\log\alpha_k + \alpha_k^2 \log 4 + \log\frac{4}{\alpha}\Big\}. \end{aligned}$$

Обратимся к задаче о максимуме функции $G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ при условии

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \alpha.$$

Рассматривая задачу на относительный экстремум, введем функцию

$$\tilde{G}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) - \mu(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k - \alpha),$$

где μ – постоянная.

Оозначим $\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \alpha_k}$ через $g(\alpha_k)$. Имеем

$$g(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + 2(1-\alpha)\log|1-\alpha| - 2(1+\alpha)\log(1+\alpha) + 4\alpha\log(2\alpha),$$

$$g(0) = +\infty, \quad g(1) = 1, \quad g(\infty) = +\infty.$$

Исследуем систему

$$g(\alpha_k) = \mu, \quad k = 1, \dots, n. \tag{17}$$

Находим

$$g'(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2} - 2\log|1-\alpha^2| + 4\log(2\alpha);$$

$$g'(0) = -\infty, \quad g'(1) = +\infty, \quad g'(\alpha) \to 4\log 2 \text{ при } \alpha \to \infty.$$

Так как

$$g''(\alpha) = \frac{2}{\alpha^3} + \frac{4\alpha}{1-\alpha^2} + \frac{2}{\alpha} = \frac{2+\alpha^2}{\alpha^3(1-\alpha^2)} > 0$$

$$\text{при} \quad \alpha \in (0,1), g''(\alpha) < 0 \quad \text{при} \quad \alpha < 1, g''(\alpha) \to 0 \quad \text{при} \quad \alpha \to \infty,$$

то $g'(\alpha)$ возрастает на отрезке $(0,1)$ от $-\infty$ до $+\infty$ и имеет на этом отрезке единственный нуль $\alpha_- = 0,662$. При $\alpha \in (0, \alpha_-)$ $g(\alpha)$ убывает от $+\infty$ до $g(\alpha_-) = -0,168$, при $\alpha \in (\alpha_-, 1)$ $g(\alpha)$ возрастает от $g(\alpha_-)$ до $g(1) = 1$. Пусть $\alpha^*(1) < \alpha_-$ – корень уравнения $g(\alpha) = 1$ на интервале $(0, \alpha_-) : \alpha^*(1) = 0,349$. При $\alpha \in (1, +\infty)$ $g(\alpha)$ возрастает от 1 до $+\infty$.

Пусть сначала $\alpha = 1$. Пусть $n \geqslant 3$. Тогда

$$(\alpha_k)_{\min} \leqslant 1/3, \quad g[(\alpha_k)_{\min}] > g(\alpha^*) = 1,$$

и очевидно, что система (17) имеет единственное решение

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1/n.$$

Пусть $n = 2$. Система (17) может иметь решение α_1, α_2 с $\alpha_1 < \alpha_1$ только при $\alpha_1 \in [\alpha^*, \alpha_-), \alpha_2 \in [\alpha_-, 1]$, но при $\alpha_2 \geqslant \alpha_- = 0,662$ имеем $\alpha_1 \leqslant 0,338$ и потому $\alpha_1 < \alpha^*$, что противоречит условию $\alpha_1 \geqslant \alpha^*$. В случае $0 < \alpha < 1$ при исследовании системы (17) пользуемся теми же или более простыми соображениями. Следовательно, в случае $0 < \alpha \leqslant 1$ при всех $n \geqslant 2$ система (17) имеет единственное решение $\alpha_k = 1/n, \quad k = 1, \dots, n$. Легко видеть, что при этом функция $G(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ достигает максимума. Отсюда следуют равенство (5) и выражение (4) для ассоциированного квадратичного дифференциала.

Пусть теперь $\alpha = \alpha_0 > 1$. Тогда решением системы (17)являются числа

$$\alpha_k = \frac{\alpha_0}{n} \leqslant \alpha^*(\alpha_0), \quad k = 1, \dots, n,$$

где $\alpha^* = \alpha^*(\alpha_0)$ – решение уравнения $g(\alpha^*) = g(\alpha_0)$ на интервале $(0, \alpha_-)$. В этом случае $n \geqslant N(\alpha_0)$, где $N(\alpha_0)$ определено в формулировке теоремы 5. Ясно, что при этом функционал (3) достигает максимума (5) и для ассоциированного квадратичного дифференциала по-прежнему имеет место выражение (4).

В связи с теоремой 5 возникает вопрос, насколько точно неравенство $n \geqslant N(\alpha_0)$, где $\alpha_0 > 1$, описывает случаи, в которых максимум рассматриваемого функционала реализуется в случае равномерного распределения точек $a_1, \dots, a_n$ на окружности $|z| = 1$.

В случае $n = 2$ имеем следующее замечание. Как и выше, через $\mathcal{M}(0, a_1, \dots, a_n)$ обозначаем максимум функционала (3) в семействе $\mathcal{D}(\mathbf{a})$.

Замечание 1. Пусть $\alpha > 0$. При $0 < \beta \leqslant \pi$ справедливо равенство

$$2\pi\mathcal{M}(0, 1, e^{i\beta}; \alpha, 1, 1) = 2\pi\mathcal{M}(0, 1, -1; \alpha, 1, 1) + (\alpha^2 - 2)\log\frac{1}{\sin\beta/2}. \quad (18)$$

Действительно, пусть D_0, D_1, D_2 – система областей, содержащих соответственно точки $0, 1, e^{i\beta}$ и реализующих максимум

$$\mathcal{M}(0, 1, e^{i\beta}; \alpha, 1, 1).$$

Отображение

$$w = f(z) = \frac{(1 + i\operatorname{tg}\frac{\beta}{2})z}{z + i\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}, \quad 0 < \beta \leqslant \pi,$$

переводит точки $z = -1, 1, 0$ соответственно в $w = e^{i\beta}, 1, 0$, а величину $\mathcal{M}(0, 1, -1; \alpha, 1, 1)$ – в $\mathcal{M}(0, 1, e^{i\beta}; \alpha, 1, 1)$. Используя формулы преобразования конформных радиусов областей D_0, D_1, D_2 при отображении (15), приходим к равенству (18).

Литература

1. В. Н. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **168** (1988), 48–66.
2. Е. Г. Емельянов, *О связи двух задач об экстремальном разбиении.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **160** (1987), 91–98.

3. Е. Г. Емельянов, *К задачам об экстремальном разбиении.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **154** (1986), 76–89.
4. А. Ю. Солынин, *Модули и экстремально-метрические проблемы.* — Алгебра и анализ **11** (1999), вып.1, 3–86.
5. Г. В. Кузьмина, *К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **100** (1980), 131–145.
6. С. И. Федоров, *О максимуме одного конформного инварианта в задаче о неналегающих областях.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **112** (1981), 172–183.
7. Г. В. Кузьмина, *К вопросу об экстремальном разбиении римановой сферы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **185** (1990), 72–95.
8. Г. В. Кузьмина, *Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы.* I, II, III. — Зап. научн. семин. ПОМИ **276** (2001), 253–275; **286** (2002), 126–147; **314** (2004), 126–141.
9. В. Н. Дубинин, *Симметризация в теории функций комплексного переменного.* — Успехи мат. наук **49**, вып.1 (1994), 3–76.
10. В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплекного переменного*, Владивосток, 2009.
11. В. Н. Дубинин, *О максимуме одного конформного инварианта*, Препринт ДВО АН СССР. Ин-т приклад. мат., Владивосток, 1990.
12. Г. В. Кузьмина, *Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **302** (2003), 52–67.
13. Л. И. Колбина, *Некотрые экстремальные задачи в конформном отображении.* — Докл. АН СССР **84** (1952), 865–868.

Kuz'mina G. V. On an extremal metric approach to extremal decomposition problems.

Some applications of the module method to extremal decomposition problems are considered. For these problems, associated quadratic differentials have large number of free poles.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191023, Санкт-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27
Россия
E-mail: kuzmina@pdmi.ras.ru

Поступило 7 ноября 2016 г.