Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 449, 2016 г.

С. И. Калмыков, Е. Г. Прилепкина

О p-ГАРМОНИЧЕСКОМ РАДИУСЕ РОБЕНА В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§1. Введение

История задач об экстремальном разбиении восходит к неравенству Лаврентьева
$$r(D_1,a_1)\cdot r(D_2,a_2)\leqslant |a_1-a_2|^2, \tag{1}$$
где $r(D_1,a_1)$ и $r(D_2,a_2)$ – конформные (внутренние) радиусы плоских неналегающих областей, $a_i\in D_i$, $i=1,2$. Равенство достигается для двух полуплоскостей с общей границей, причем точки a_1 и a_2 симметричны относительно этой границы. Указанная конфигурация и образует "экстремальное разбиение" комплексной плоскости. Большой интерес к задачам об экстремальном разбиении на плоскости вызван многочисленными приложениями в геометрической теории функций.

Существуют несколько методов решения задач об экстремальном разбиении. Широкое распространение получили емкостной (функциональный) метод и метод экстремальных метрик. Оба подхода обогащают и дополняют друг друга. В исследованиях Дж. Дженкинса, Г. В. Кузьминой, А. Ю. Солынина, Е. Г. Емельянова, А. Ю. Васильева, Х. Поммеренке использовался в основном метод экстремальных метрик (см., например, [1–8]), в то время как развитию емкостного подхода посвящена серия работ В. Н. Дубинина и его учеников.

В дальнейшем неравенство (1) обобщалось в различных направлениях. В работе [9] было введено понятие радиуса Робена (внутренний радиус является частным случаем радиуса Робена)

Ключевые слова: p-гармонические функции, гармонический радиус, радиус Робена, емкость конденсатора, модуль семейства кривых, экстремальные разбиения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант 14-11-00022.

и доказаны некоторые неравенства типа (1). Например, для непересекающихся плоских подобластей D_1, D_2 единичного круга U и точек $a_1 \in D_1$, $a_2 \in D_2$, множеств $\Gamma_i \subset \partial D_i$ таких, что $((\partial D_i) \cap U) \subset \Gamma_i$, $i = 1{,}2$, справедливо неравенство

$$r(D_1,\Gamma_1,a_1)r(D_2,\Gamma_2,a_2) \leqslant \frac{|a_1 - a_2|^2|1 - \overline{a_1}a_2|^2}{(1 - |a_1|^2)(1 - |a_2|^2)}. \tag{2}$$

Здесь $r(D,\Gamma,a)$ означает вычисленный в точке $a \in D$ радиус Робена области D относительно множества $\Gamma \subset \partial D$ [9].

Для областей размерности $n \geqslant 2$ и $p > 1$ Б. Е. Левицкий ввел понятие p-гармонического радиуса, которое в случае плоской области и $p = 2$ совпадает с внутренним радиусом [10]. В [11] В. Ванг рассмотрел n-гармонический радиус (n – размерность пространства), расширил метод гармонической трансплантации и привел некоторые приложения этого понятия в теории уравнений с частными производными. Гармонический радиус ($p = 2$) и его свойства изучались в [12].

В данной работе мы вводим p-гармонический радиус Робена в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $p > 1$, который обобщает p-гармонический радиус Левицкого [10] и доказываем несколько неравенств типа (2). При вырождении соответствующего участка границы рассматривается радиус Робена–Неймана. Отметим, что пионерские исследования в этом направлении были сделаны вторым автором совместно с Дубининым в работе [13]. Преимущественно используя технику емкостей обобщенных кондесаторов, в [13] получены аналоги неравенств Лаврентьева и Куфарева для 2-гармонических радиусов областей в евклидовом пространстве. Тот же подход применим и для получения результатов об экстремальном разбиении для 2-гармонических радиусов Робена [14]. Указанная техника существенно использует формулу Грина и тот факт, что линейная комбинация 2-гармонических функций является 2-гармонической функцией. Для исследования p-гармонических радиусов Робена необходимо развивать другие методы ввиду отсутствия линейности в общем случае. В качестве метода получения результатов мы выбираем технику модулей семейств кривых. Идеи использования техники семейств кривых для доказательства теорем об экстремальном разбиении в евклидовом пространстве предложены Дубининым (см. теорему 4 работы [13]) и развиты нами в [15]. В данной заметке доказана монотонность p-гармонического радиуса Робена при некоторых деформациях области (теорема 1). В евклидовом пространстве решены несколько задач об экстремальном разбиении (теоремы 2 и 3). Теорема 2 содержит классическое неравенство Лаврентьева, а теорема 3 обобщает соответсвующие результаты Дубинина и авторов данной статьи (см. [13] и [15, 19]).

Всюду ниже $\mathbb{R}^n$ обозначает n-мерное евклидово пространство, состоящее из точек

$$x = (x_1, \ldots, x_n),\ n \geqslant 2,\ y = (y_1, \ldots,\, y_n) \in \mathbb{R}^n,\ \langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

– скалярное произведение x и y, а $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ – модуль вектора $x \in \mathbb{R}^n$. Для шара и гиперсферы мы введем следующие обозначения: $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |a - x| < r\}$, $S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |a - x| = r\}$, $a \in \mathbb{R}^n$, соответственно. Как и выше, $U = B(0,1)$. Для $\tau \in \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, через $L(a,\tau) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x,a\rangle = \tau\}$ обозначим гиперплоскость, перпендикулярную вектору a. Также нам понадобятся сферические координаты $[\rho,\theta, x']$ точки $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, связанные с начальными координатами формулами: $x_1 = \rho\cos\theta$, $x_2 = \rho\sin\theta$, $x' = (x_3, x_4, \ldots, x_n)$.

Поворотом на угол β назовем преобразование

$$[\rho,\theta,x'] \mapsto [\rho, \theta + \beta,x'].$$

Будем называть кривой борелевское множество $l \in \mathbb{R}^n$ с $s(l) > 0$, где $s(l)$ означает одномерную меру Хаусдорфа. Нам понадобится позже использовать процедуру диссимметризации, которая в общем случае переводит непрерывную кривую в составную кривую, и поэтому мы не можем ограничиться классическим определением. Чтобы подчеркнуть, что кривая понимается в стандартном смысле, будем называть ее непрерывной кривой.

Фраза "кривая соединяет два множества A и B в G" означает, что кривая непрерывна и имеет представление $l : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ такое, что $l(a) \in A$, $l(b) \in B$, $l(t) \in G$ для $a < t < b$.

Пусть Λ – семейство кривых в $\mathbb{R}^n$. Тогда его *p-модулем*, $p > 1$, называется величина

$$M_p(\Lambda) = \inf \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p dx,$$

где инфимум берется по всем борелевским функциям $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ таким, что $\int_l \rho ds \geqslant 1$ имеет место для каждой кривой $l \in \Lambda$. Функция ρ, которая удовлетворяет упомянутым условиям, называется *допустимой* для семейства Λ, и множество всех таких функций обозначается через $\mathrm{Adm}\Lambda$. В случае непрерывных кривых понятие p-модуля совпадает с традиционным понятием p-модуля семейств кривых.

Перечислим некоторые основные свойства p-модуля (см., например, [16]):

1) Если $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, то $M_p(\Lambda_1) \leqslant M_p(\Lambda_2)$.

2) $M_p\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Lambda_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} M_p(\Lambda_i)$.

3) Если Λ_2 "длиннее", чем Λ_1 (то есть каждая кривая $l \in \Lambda_2$ содержит подкривую, принадлежащую Λ_1), то $M_p(\Lambda_1) \geqslant M_p(\Lambda_2)$.

4) Если $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ – разделенные семейства и Λ_i длиннее, чем Λ, $i = 1,2,\ldots$, то $M_p(\Lambda) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} M_p(\Lambda_i)$ (Семейства кривых Λ_1, $\Lambda_2, \ldots$ называются *разделенными*, если существуют непересекающиеся борелевские множества E_i в $\mathbb{R}^n$ такие, что $\int\limits_l \chi_i ds = 0$ для любой кривой $l \in \Lambda_i$, где χ_i – характеристическая функция $\mathbb{R}^n \setminus E_i$).

5) Если $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ – разделенные семейства и Λ длиннее, чем Λ_i, $i = 1,2,\ldots$, тогда $M_p(\Lambda)^{1/(1-p)} \geqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} M_p(\Lambda_i)^{1/(1-p)}$.

6) С учетом равенства p-емкости и p-модуля соответствующего семейства кривых (см. [17]) модуль семейства кривых $\Lambda(t,T)$, соединяющих гиперсферы $S(a,t)$ и $S(a,T)$, $t < T$, вычисляется по формуле ([18, стр. 97])

$$M_p(\Lambda(t,T)) = \lambda_n^{p-1}|\gamma|^{p-1}|T^{-\gamma} - t^{-\gamma}|^{1-p},\ p \neq n, \tag{3}$$

$$M_n(\Lambda(t,T)) = \lambda_n^{n-1}\left(\log\frac{T}{t}\right)^{1-n},\ p = n, \tag{4}$$

где $\gamma = \frac{n-p}{p-1}$, $\lambda_n = \lambda(n,p) = (n\omega_n)^{\frac{1}{p-1}}$, а ω_n – объем единичного шара U.

Введем обозначение

$$\mu_p(t) = \begin{cases} -\log(t), & p = n, \\ \frac{1}{\gamma}t^{-\gamma}, & p \neq n, \end{cases}$$

для $t > 0$. Используя стандартные рассуждения, получим следующую лемму.

Лемма 1. *Для любой области $D \subset \mathbb{R}^n$ и непустого множества $\Gamma \subset \partial D$ существует предел*

$$\lim_{t\to 0}\left(\lambda_n M_p(t,a,D,\Gamma)^{\frac{1}{1-p}} - \mu_p(t)\right), \tag{5}$$

где $M_p(t,a,D,\Gamma)$ – p-модуль семейства кривых $\Lambda(t,a,D,\Gamma)$, соединяющих гиперсферу $S(a,t)$ и Γ в D.

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что при $t < T$ семейство кривых $\Lambda_1 = \Lambda(t,a,D,\Gamma)$ длиннее семейства $\Lambda_2 = \Lambda(T,a,D,\Gamma)$ и длиннее семейства $\Lambda(t,T)$ кривых, соединяющих гиперсферы $S(a,t)$ и $S(a,T)$, а семейства Λ_2 и $\Lambda(t,T)$ разделены. По свойствам 5 и 6 получаем, что

$$M_p(\Lambda_1)^{\frac{1}{1-p}} \geqslant M_p(\Lambda_2)^{\frac{1}{1-p}} + \lambda_n^{-1}\gamma^{-1}|T^{-\gamma} - t^{-\gamma}|,\ p \neq n,$$

и

$$M_p(\Lambda_1)^{\frac{1}{1-p}} \geqslant M_p(\Lambda_2)^{\frac{1}{1-p}} + \lambda_n^{-1}(\log T - \log t),\ p = n.$$

Отсюда

$$\lambda_n M_p(\Lambda_1)^{\frac{1}{1-p}} - \mu_p(t) \geqslant \lambda_n M_p(\Lambda_2)^{\frac{1}{1-p}} - \mu_p(T),$$

что гарантирует существование предела (5). $\square$

Согласно лемме 1, определим p-гармонический радиус Робена $R_p(D,\Gamma,a)$ области D относительно множества Γ в точке a с помощью равенства

$$-\mu_p(R_p(D,\Gamma,a)) = \lim_{t\to 0}\left(\lambda_n M_p(t,a,D,\Gamma)^{\frac{1}{1-p}} - \mu_p(t)\right). \qquad (6)$$

В случае $\Gamma = \partial D$ мы получим p-гармонический радиус Левицкого [10, Теорема 1].

Применяя свойство 6, легко видеть, что p-гармонический радиус шара $B(0,R)$ в центре данного шара совпадает с его радиусом, то есть

$$R_p(B(0,R),\partial B(0,R),0) = R.$$

Для пустого множества Γ аналогом функции Робена является так называемая двухполюсная функция Неймана [19]. В случае $\Gamma = \varnothing$ определим радиус Робена-Неймана $R_p(D,\varnothing,a_1,a_2)$ области D в точках a_1, a_2 равенством

$$-\mu_p(R_p(D,\varnothing,a_1,a_2)) = \lim_{t\to 0}\left(\lambda_n M_p(t,a_1,a_2,D,\varnothing)^{\frac{1}{1-p}} - 2\mu_p(t)\right), \quad (7)$$

где $M_p(t,a_1,a_2,D,\varnothing)$ – p-модуль семейства кривых, соединяющих в области D гиперсферы $S(a_1,t)$ и $S(a_2,t)$. Доказательство существования предела (7) практически дословно повторяет доказательство леммы 1, поэтому мы его опускаем.

Отметим, что в случае $p = 2$ введенное нами понятие совпадает с понятием радиуса Робена, введенным ранее для замкнутых множеств Γ на плоскости в работах [9,20] и в пространстве большего числа измерений в [14]. В [21] радиусом Неймана на плоскости называлась величина $R_2(D,\varnothing,a_1,a_2)^{-1}$. Остановимся подробнее на этих фактах.

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и существует гармоническая ($p = 2$, $n \geqslant 2$) функция Робена области D и замкнутого множества $\Gamma \subset \partial D$ с полюсом в точке a, то есть функция, непрерывная в $\overline{D} \setminus \{a\}$, гармоническая в $D \setminus \{a\}$, равная нулю на Γ, имеющая нулевую нормальную производную на $(\partial D) \setminus \Gamma$ и разложение в окрестности точки a

$$g_D(x,a,\Gamma) = \frac{1}{n\omega_n}\left\{\mu_2(|x-a|) - \mu_2(R'(D,\Gamma,a)\right\} + o(1),\ x \to a,$$

где $R'(D,\Gamma,a)$ – величина, не зависящая от x. При этом мы предполагаем существование нормали на $(\partial D)\setminus\Gamma$. В случае $\Gamma = \varnothing$ мы требуем, чтобы нормальная производная на границе была постоянной, а не равнялась нулю. Таким образом, при $\Gamma = \varnothing$ функция $g_D(x,a,\varnothing)$ определена с точностью до произвольной константы.

Рассмотрим в случае $\Gamma \neq \varnothing$ в области D конденсатор $C(r)$ [19] с пластинами $\overline{B(a,r)}$, Γ и уровнями потенциала 0, 1. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$|C(r)| = \frac{1}{n\omega_n}\mu_2(r) - \frac{1}{n\omega_n}\mu_2(R'(D,\Gamma,a)) + o(1),\ r \to 0.$$

На плоскости эта формула получена Дубининым [19, формула 2.20], и при $n \neq 2$ доказательство по сути дословно повторяет доказательство теоремы 1 работы [13] с заменой функции Грина на функцию Робена. Учитывая совпадение емкости конденсатора и модуля семейства кривых [17], заключаем, что величина $R'(D,\Gamma,a)$, определяемая из асимптотического разложения функции Робена, совпадает с введенной нами величиной $R_2(D,\Gamma,a)$.

В случае $\Gamma = \varnothing$ в области D необходимо рассмотреть конденсатор $C_1(r)$ с пластинами $\overline{B(a_1,r)}$, $\overline{B(a_2,r)}$, и уровнями потенциала -1, 1. В этом случае асимптотическая формула имеет вид

$$\begin{aligned}|C_1(r)| = {}& \frac{1}{2n\omega_n}\mu_2(r) - \frac{1}{4n\omega_n}\mu_2(R'(D,\varnothing,a_1)) \\ & - \frac{1}{4n\omega_n}\mu_2(R'(D,\varnothing,a_1)) - \frac{1}{2}g_D(a_1,a_2,\varnothing) + o(1), \quad r \to 0.\end{aligned}$$

Переходя к конденсатору $C_2(r)$ с пластинами $\overline{B(a_1,r)}$, $\overline{B(a_2,r)}$, но уровнями потенциала 0, 1, получим

$$|C_2(r)| = 4|C_1(r)| = \frac{2}{n\omega_n}\mu_2(r) - \frac{1}{n\omega_n}\mu_2(R'(D,\varnothing,a_1)) \\ - \frac{1}{n\omega_n}\mu_2(R'(D,\varnothing,a_2)) - 2g_D(a_1,a_2,\varnothing) + o(1), \quad r \to 0.$$

Таким образом, формула вычисления гармонического радиуса Робена-Неймана через функцию Неймана (функцию Грина второго рода) приобретает вид

$$- \mu_2(R_2(D,\varnothing,a_1,a_2) \\ = -\mu_2(R'(D,\varnothing,a_1)) - \mu_2(R'(D,\varnothing,a_2)) - 2nw_n g_D(a_1,a_2,\varnothing).$$

Несмотря на то, что функция Неймана определена с точностью до константы, радиус Робена-Неймана определен однозначно.

Радиус Робена-Неймана единичного круга U на плоскости вычислен в [21]:

$$R_2(U,\varnothing,a_1,a_2) = \frac{|(a_1-a_2)(1-\overline{a_1}a_2)|^2}{(1-|a_1|^2)(1-|a_2|^2)}, \ \ n=2. \tag{8}$$

Для того, чтобы вычислить гармонический ($p = 2$) радиус Робена-Неймана единичного шара в пространстве большего числа измерений, нам необходимо знать функцию Неймана единичного шара U. Заметим, что нахождение явного вида этой функции является достаточно сложной проблемой в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Эта задача была решена в [22]. В частности, для $n = 3$

$$g_U(x,y,\varnothing) = \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{1}{|x-y|} + \frac{|y|}{|x|y|^2-y|} - \log\Big|1 - \langle x,y\rangle + \frac{|x|y|^2-y|}{|y|}\Big|\Big),$$

$$R_2(U,\varnothing,a_1,a_2) = \Big(\frac{2}{|a_1-a_2|} + \frac{2|a_2|}{|a_1|a_2|^2-a_2|} - 2\log\Big|1-\langle a_1,a_2\rangle + \frac{|a_1|a_2|^2-a_2|}{|a_2|}\Big| - \frac{1}{1-|a_1|^2} - \frac{1}{1-|a_2|^2} + \log(4(1-|a_1|^2)(1-|a_2|^2))\Big)^{-1}.$$

Преимущество определения радиуса Робена в терминах модуля семейства кривых заключается в том, что отпадают вопросы существования данного понятия для областей с негладкой границей. Вместе с тем, функциональная интерпретация необходима для численного вычисления радиуса Робена. Нахождение подходящей функциональной интерпретации в негармоническом случае ($p \neq 2$) остается открытой задачей.

§2. Основные результаты

Говорят, что область $\tilde{D}$ получена при расширении области D за счет части границы $\Gamma \subset \partial D$, если $\left(\tilde{D} \cap \partial D\right) \subset \Gamma$ [19].

Теорема 1. *Если область $\tilde{D}$ получена при расширении области D за счет части границы $\Gamma \subset \partial D$ и $\tilde{\Gamma} \subset (\Gamma \cup (\mathbb{R}^n \setminus \overline{D}))$, $\tilde{\Gamma} \subset \partial\tilde{D}$, то*

$$R_p(D,\Gamma,a) \leqslant R_p(\tilde{D},\tilde{\Gamma},a).$$

Если $\tilde{D}$ получена при расширении области D за счет части границы $(\partial D)\setminus\Gamma$ и $\Gamma \subset \tilde{\Gamma}$, то справедливо неравенство в другую сторону:

$$R_p(D,\Gamma,a) \geqslant R_p(\tilde{D},\tilde{\Gamma},a).$$

Доказательство. В первом случае семейство кривых $\Lambda(t,a,\tilde{D},\tilde{\Gamma})$, участвующее в определении радиуса Робена, длиннее семейства $\Lambda(t,a,D,\Gamma)$. Во втором случае наоборот. Остается при сравнении пределов (6) воспользоваться свойством 3 и вспомнить, что $p > 1$. $\square$

В следующей теореме докажем аналог неравенства (2).

Теорема 2. *Для любых непересекающихся областей D_i, $i = 1{,}2$, лежащих в области D, точек $a_i \in D_i$ и множеств $\Gamma_i \subset \partial D_i$ таких, что $(D \cap \partial D_i) \subset \Gamma_i$, справедливо неравенство*

$$-\mu_p(R_p(D_1, \Gamma_1, a_1)) - \mu_p(R_p(D_2, \Gamma_2, a_2) \leqslant -\mu_p(R_p(D,\varnothing,a_1,a_2)).$$

Доказательство. Семейство кривых $\Lambda(a_1,a_2,D)$, соединяющих в области D гиперсферы $S(a_1,t)$ и $S(a_2,t)$, длиннее разделенных семейств кривых $\Lambda(t,a_1,D_1,\Gamma_1)$ и $\Lambda(t,a_2,D_2,\Gamma_2)$ из определения (5). По свойству 5 получаем

$$\lambda_n M_p(t,a_1,a_2,\varnothing)^{\frac{1}{1-p}} \geqslant \lambda_n M_p(t,a_1,D_1,\Gamma_1)^{\frac{1}{1-p}} + \lambda_n M_p(t,a_2,D_2,\Gamma_2)^{\frac{1}{1-p}}.$$

Вычитая $-2\mu_p(t)$ и переходя к пределу, получаем требуемое утверждение. Теорема доказана. $\square$

В частности, воспользовавшись формулой (8) для единичного круга в плоском случае, при $p = 2$ получаем неравенство (2).

Для $n = 3$, $p = 2$ неравенство в теореме 2 принимает следующую форму:

$$\begin{aligned} &- R_2\left(D_1,\Gamma_1,a_1\right)^{-1} - R_2\left(D_2,\Gamma_2,a_2\right)^{-1} \\ &\leqslant -\frac{2}{|a_1 - a_2|} - \frac{2|a_2|}{|a_1|a_2|^2 - a_2|} + 2\log\left|1 - \langle a_1,a_2\rangle + \frac{|a_1|a_2|^2 - a_2|}{|a_2|}\right| \\ &\qquad + \frac{1}{1-|a_1|^2} + \frac{1}{1-|a_2|^2} - \log(4(1-|a_1|^2)(1-|a_2|^2)). \quad (9) \end{aligned}$$

Для гладких областей неравенство (9) установлено нами в [14]. Равенство в (9) для любых точек a_1, $a_2 \in U$ достигается, например, в случае, когда единичный шар разбит на две области D_1, D_2 поверхностью, на которой $g_U(x,a_1,\varnothing) = g_U(x,a_2,\varnothing)$ и $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \overline{U \cap \partial D_1} = \overline{U \cap \partial D_2}$.

Для $p = n$, привлекая подходящее мёбиусово преобразование и формулу (4), получаем обобщение неравенства Лаврентьева (см. также [15])

$$R_n(a_1,D_1) \cdot R_n(a_2,D_2) \leqslant |a_1 - a_2|^2,$$

где $R_n(a_i,D_i) = R_n(a_i,D_i,\partial D_i)$, $i = 1{,}2$.

Теорема 3. *Пусть G – либо кольцо $K(\rho_1,\rho_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho_1 < |x| < \rho_2\}$, либо цилиндр $Z(\rho_1,\rho_2) = \{[\rho,\theta,x'] \in \mathbb{R}^n : \rho_1 < \rho < \rho_2\}$, $0 \leqslant \rho_1 < \rho_2 \leqslant \infty$, и $m > 1$. Тогда для любых точек a_k на окружности $O(\rho_0) = \{[\rho,\theta,x'] : \rho = \rho_0, x' = 0\}$, $\rho_1 < \rho_0 < \rho_2$, любых попарно неналегающих областей D_k, $D_k \subset G$, $a_k \in D_k$, и множеств Γ_k, $\Gamma_k \subset \partial D_k$, таких, что $((\partial D_k) \cap G) \subset \Gamma_k$, $k = 0,\dots,m-1$, справедливо неравенство*

$$\sum_{k=0}^{m-1} \mu_p(R_p(D_k,\Gamma_k,a_k)) \geqslant \sum_{k=0}^{m-1} \mu_p(R_p(D_k^*,\Gamma_k^*,a_k^*)) = m\mu_p(R_p(D_0^*,\Gamma_0^*,a_0^*)),$$

где

$$a_k^* = \left[\rho_0,\frac{2\pi k}{m},0\right],\ D_k^* = G \cap \left\{[\rho,\theta,x'] : \frac{\pi(2k-1)}{m} < \theta < \frac{\pi(2k+1)}{m}\right\}$$

и

$$\Gamma_k^* = G \cap \left(\left\{[\rho,\theta,x'] : \theta = \frac{\pi(2k-1)}{m}\right\} \cup \left\{[\rho,\theta,x'] : \theta = \frac{\pi(2k+1)}{m}\right\}\right).$$

Для доказательства теоремы 3 нам понадобится несколько лемм (для деталей см. [13,15] и [19, лемма 4.2]).

Лемма 2. *Пусть L – произвольная гиперплоскость и семейство Λ состоит из кривых l таких, что пересечение $l \cap L$ имеет положительную меру Хаусдорфа размерности 1, $s(l \cap L) > 0$. Тогда*

$$M_p(\Lambda) = 0.$$

Для $m \geqslant 1$ введем обозначения

$$N_k^* = \left\{[\rho,\theta,x'] \in \mathbb{R}^n,\ \frac{\pi k}{m} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi(k+1)}{m}\right\},\ k = 0,1,\dots,2m-1,$$

и

$$L_k^* = \left\{[\rho,\theta,x'] \in \mathbb{R}^n : \theta = \frac{\pi k}{m}\right\},\quad k = 0,\dots,2m-1.$$

Через Φ обозначим группу симметрий в $\mathbb{R}^n$, состоящую из суперпозиций отражений относительно гиперплоскостей, проходящих через полуплоскости L_k^*, $k = 0,\dots,2m-1$.

Лемма 3. *Пусть* $m \geqslant 1$, Λ_0^* *– семейство кривых* l_0^*, *лежащих в* N_0^*, *и пусть* $\varphi_k(x)$ *означает отражение относительно гиперплоскости, содержащей* L_k^*. *Также пусть* $l_k^* = \varphi_k(l_{k-1}^*)$, $k = 1,\dots,2m-1$, *и* $l^* = \cup_{k=0}^{2m-1} l_k^*$ *– кривая, симметричная по отношению к группе* Φ *и состоящая из* $2m$ *последовательных отображений* l_0^*, Λ^* *– семейство таких кривых* l^*. *Тогда*

$$M_p(\Lambda^*) = (2m)^{1-p} M_p(\Lambda_0^*).$$

В пространстве $\mathbb{R}^n$ введем симметричную структуру $\{P_k\}_{k=1}^N$ как совокупность замкнутых углов $P_k = \{(\rho,\theta,x') : \theta_{k,1} \leqslant \theta \leqslant \theta_{k,2}\}$, $k = 1,\dots,N$, удовлетворяющих условиям:

aP) $\displaystyle\bigcup_{k=1}^N P_k = \mathbb{R}^n, \ \sum_{k=1}^N (\theta_{k,2} - \theta_{k,1}) = 2\pi,$

bP) $\{\varphi(P_k)\}_{k=1}^N = \{P_k\}_{k=1}^N$ для любой изометрии $\varphi \in \Phi$.

Совокупность поворотов $\{\alpha_k\}_{k=1}^N$ назовем диссимметризацией симметричной структуры $\{P_k\}_{k=1}^N$, если для образов $S_k = \alpha_k(P_k)$ выполняются следующие условия:

aS) $\displaystyle\bigcup_{k=1}^N S_k = \mathbb{R}^n,$

bS) для любого непустого пересечения $S_k \cap S_p, k,p = 1,\dots,N$, существует изометрия $\varphi \in \Phi$, такая, что $\varphi(\alpha_k^{-1}(S_k \cap S_p)) = \alpha_p^{-1}(S_k \cap S_p)$.

Для произвольного множества A из $\mathbb{R}^n$ введем обозначение

$$\mathrm{Dis} A = \bigcup_{k=1}^N \alpha_k(A \cap P_k).$$

Лемма 4. *Пусть* $m \geqslant 1$, $0 \leqslant \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{m-1} < 2\pi, \theta_m = \theta_0 + 2\pi$, $\mathcal{L}_k = \{[\rho,\theta,x'] \in \mathbb{R}^n : \theta = \theta_k\}$ *и*

$$\mathcal{L}_k^* = \{[\rho,\theta,x'] \in \mathbb{R}^n : \theta = 2\pi k/m\}, \quad k = 0,\dots,m-1.$$

Тогда существует симметричная структура $\{P_p\}_{p=1}^N$, $N \geqslant m$, *и диссимметризация* $\{\alpha_p\}_{p=1}^N$ *такая, что* $\mathrm{Dis}\mathcal{L}_k^* = \mathcal{L}_k$, $k = 0, \ldots, m-1$.

Лемма 5. *Если* Λ – *семейство кривых в* $\mathbb{R}^n$ *и*

$$\mathrm{Dis}\Lambda = \{\mathrm{Dis}l : l \in \Lambda\}$$

– *результат диссимметризации семейства* Λ, *тогда*

$$M_p(\Lambda) = M_p(\mathrm{Dis}\Lambda).$$

Доказательство теоремы 3. Введем следующие обозначения

$$a_k = [\rho_0, \theta_k, 0],\ 0 \leqslant \theta_k < 2\pi,\ \mathcal{L}_k = \{[\rho, \theta, x'] : \theta = \theta_k\},\ k = 0, \ldots, m-1.$$

Не теряя общности, мы можем считать, что $\theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{m-1}$. Пусть

$$T_k^+ = \{[\rho, \theta, x'] : \theta_k \leqslant \theta \leqslant \theta_{k+1}\},\ T_k^- = \{[\rho, \theta, x'] : \theta_{k-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_k\}$$

для $k = 1, \ldots, m-1$, и

$$T_0^+ = \{[\rho, \theta, x'] : \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1\},$$
$$T_0^- = \{[\rho, \theta, x'] : \theta_{m-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_0 + 2\pi\}.$$
$$S^+(a_k, t) = S(a_k, t) \cap T_k^+, \quad S^-(a_k, t) = S(a_k, t) \cap T_k^-,$$

$k = 0, \ldots, m-1$.

Кроме того, пусть

$$\mathcal{L}_k^* = \{[\rho, \theta, x'] \in \mathbb{R}^n : \theta = 2\pi k/m\},\ k = 0, ..., m-1,$$
$$L_k^* = \left\{[\rho, \theta, x'] \in \mathbb{R}^n : \theta = \frac{\pi k}{m}\right\}, \quad k = 0, \ldots, 2m-1,$$

и

$$N_k^* = \left\{[\rho, \theta, x'] \in \mathbb{R}^n : \ \frac{\pi k}{m} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi(k+1)}{m}\right\},\ k = 0, 1, \ldots, 2m-1.$$

Обозначим через Λ_0^* семейство всех непрерывных кривых l_0^* из $\Lambda(t, a_0^*, D_0^*, \Gamma_0^*)$, которые соединяют $S(a_0^*, t) \cap N_0^*$ и Γ_0^* по множеству N_0^* и, кроме того, $s(\gamma_0^* \cap L_0^*) = 0$. Пусть Λ_k^+ (Λ_k^-) – семейство всех непрерывных кривых l_k^+ (l_k^-) из $\Lambda(t, a_k, D_k, \Gamma_k)$, соединяющих $S^+(a_k, t)$ ($S^-(a_k, t)$) с Γ_k по множеству T_k^+ (T_k^-) и таких, что

$s(l_k^+ \cap \mathcal{L}_k) = 0$, $(s(l_k^- \cap \mathcal{L}_k) = 0)$. По лемме 4, если t достаточно мало, то существует диссимметризация, переводящая $\mathcal{L}_k^*$ $(a_k^* \in \mathcal{L}_k^*)$ в $\mathcal{L}_k$ такая, что $\operatorname{Dis} S(a_k^*,t) = S(a_k,t)$, $k = 0,\dots m-1$.

Как и в лемме 3, построим семейство Λ^*, отразив последовательно $2m$ раз каждую кривую $l_0^* \in \Lambda_0^*$. Докажем, что семейство $\mathrm{Dis}\Lambda^*$ длиннее, чем Λ_0^+.

Пусть $l^* \in \Lambda^*$ – кривая, порожденная кривой $l_0^* \in \Lambda_0^*$. Дополним кривую l_0^* некоторой кривой $\hat{l}_0^* \subset S(a_0^*,t)$, которая соединяет точку $z \in l_0^* \cap S(a_0^*,t)$ и L_0^*. Снова по аналогии с леммой 3 получаем уже непрерывную кривую $\tilde{l}^*$. Непрерывная кривая $\tilde{l}^*$ содержит подкривые, которые соединяют последовательно гиперсферы $S(a_k^*,t)$, $k = 0,\dots,m-1$, так, что верхняя полусфера $S^+(a_k^*,t)$ соединена с нижней полусферой $S^-(a_{k+1}^*,t)$ $(a_m^* = a_0^*)$. Из симметрии кривой $\tilde{l}^*$, а также из свойства диссимметризации bS, мы получаем, что кривая $\mathrm{Dis}\tilde{l}^*$ содержит непрерывную кривую, соединяющую полусферы $S^+(a_0,t)$ и $S^-(a_1,t)$ по множеству T_0^+.

По условию теоремы, область D_0 содержит шар $B(a_0,t)$, а область D_1 содержит шар $B(a_1,t)$, кроме того, $D_0 \cap D_1 = \varnothing$. Таким образом, существует подкривая $l \subset \mathrm{Dis}\tilde{l}^*$, которая соединяет $S^+(a_0,t)$ и ∂D_0 по множеству T_0^+. Пусть $b_0 \in S^+(a_0,t) \cap l$ и $b_1 \in l \cap (\partial D_0)$ – ближайшая к b_0 точка множества $(\partial D_0) \cap l$. Тогда часть кривой l, лежащая между b_0 и b_1, содержит непрерывную кривую, соединяющую ∂D_0 и $S^+(a_0,t)$ по множеству $D_0 \setminus \overline{B(a_0,t)}$.

Эта кривая в свою очередь является подкривой для $\mathrm{Dis}l^*$ и принадлежит семейству Λ_0^+ в силу того, что $((\partial D_k) \cap G) \subset \Gamma_k$. Следовательно, семейство $\mathrm{Dis}\Lambda^*$ длиннее, чем Λ_0^+.

Аналогично, семейство $\mathrm{Dis}\Lambda^*$ длинее, чем Λ_k^+ и Λ_k^- для всех $k = 0,\dots,m-1$. Кроме того, нетрудно видеть, что семейства Λ_k^+ и Λ_k^- разделены.

Последовательно применяя леммы 3 и 5, а также свойство 5, получаем

$$\left((2m)^{1-p}M_p(\Lambda_0^*)\right)^{\frac{1}{1-p}} = M_p(\Lambda^*)^{\frac{1}{1-p}} = M_p(\mathrm{Dis}\Lambda^*)^{\frac{1}{1-p}} \geqslant \sum_{k=0}^{m-1}\left(M_p(\Lambda_k^+)^{\frac{1}{1-p}} + M_p(\Lambda_k^-)^{\frac{1}{1-p}}\right).$$

С другой стороны, и Λ_k^+, и Λ_k^- длинее $\Lambda(t,a_k,D_k,\Gamma_k)$. По свойству 4,

$$M_p(\Lambda(t,a_k,D_k,\Lambda_k)) \geqslant M_p(\Lambda_k^+) + M_p(\Lambda_k^-).$$

Если $d<0$, $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$, то имеет место следующее неравенство для средних

$$\left(\frac{u^d+v^d}{2}\right)^{\frac{1}{d}} \leqslant \frac{u+v}{2},$$

которое может быть записано в виде

$$u^d+v^d \geqslant 2^{1-d}(u+v)^d.$$

Применяя это неравенство при $d=\frac{1}{1-p}$, мы получаем

$$2mM_p(\Lambda_0^*)^{\frac{1}{1-p}} \geqslant \sum_{k=0}^{m-1}\left(M_p(\Lambda_k^+)+M_p(\Lambda_k^-)\right)^{\frac{1}{1-p}} 2^{1-\frac{1}{1-p}} \geqslant 2^{1-\frac{1}{1-p}}\sum_{k=0}^{m-1} M_p(\Lambda(t,a_k,D_k,\Gamma_k))^{\frac{1}{1-p}},$$

что можно переписать в виде

$$m(2M_p(\Lambda_0^*))^{\frac{1}{1-p}} \geqslant \sum_{k=0}^{m-1} M_p(\Lambda(t,a_k,D_k,\Gamma_k))^{\frac{1}{1-p}}.$$

Применяя принцип симметрии [23, Лемма 5.20, p. 55] и лемму 2, получаем

$$2M_p(\Lambda_0^*) = M_p(\Lambda(t,a_0^*,D_0^*,\Gamma_0^*)).$$

Следовательно,

$$mM_p(\Lambda(t,a_0^*,D_0^*,\Gamma_0^*))^{\frac{1}{1-p}} \geqslant \sum_{k=0}^{m-1} M_p(\Lambda(t,a_k,D_k,\Gamma_k))^{\frac{1}{1-p}}.$$

Умножая последнее неравенство на λ_n и вычитая $m\mu_p(t)$, имеем

$$m\left(\lambda_n M_p(\Lambda(t,a_0^*,D_0^*,\Gamma_0^*)^{\frac{1}{1-p}}) - \mu_p(t)\right)$$
$$\geqslant \sum_{k=0}^{m-1}\left(\lambda_n M_p(\Lambda(t,a_k,D_k,\Gamma_k))^{\frac{1}{1-p}} - \mu_p(t)\right).$$

Переходя к пределу при $t \to 0$, получаем

$$-m\mu_p(R_p(D_0^*,\Gamma_0^*,a_0^*)) \geqslant -\sum_{k=0}^{m-1}\mu_p(R_p(D_k,\Gamma_k,a_k)).$$

Теорема доказана. □

Заметим, что в теореме 3 в качестве G можно взять произвольное тело, инвариантное относительно любого поворота.

Литература

1. Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, ИЛ, М. (1962).
2. G. V. Kuz'mina, *Geometric function theory. Jenkins results. The method of modules of curve families.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **445** (2016), 181–249.
3. Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы.* — Тр. МИАН СССР **139** (1980), 3–241.
4. Г. В. Кузьмина, *Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **302** (2003), 52–67.
5. Е. Г. Емельянов, *К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **286** (2002), 103–114.
6. A. Vasil'ev, *Moduli of families of curves for conformal and quasiconformal mappings.* — Lect. Notes Math. **1788**, Springer-Verlag, Berlin–New York (2002).

7. Ch. Pommerenke, A. Vasil'ev, *Angular derivatives of bounded univalent functions and extremal partitions of the unit disk.* — Pacific J. Math. **206**, No. 2 (2002) 425–450.
8. А. Ю. Солынин, *Разбиения на неналегающие области и экстремальные свойства однолистных отображений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **212** (1994), 139–163.
9. В. Н. Дубинин, Д. А. Кириллова, *К задачам об экстремальном разбиении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **357** (2008), 54–74.
10. Б. Е. Левицкий, *Приведенный p-модуль и внутренний p-гармонический радиус.* — Докл. АН СССР **316**, No. 4 (1991), 812–815.
11. W. Wang, *N-Capacity, N-harmonic radius and N-harmonic transplantation.* — J. Math. Anal. Appl. **327**, No. 1 (2007), 155–174.
12. C. Bandle, M. Flucher, *Harmonic radius and concentration of energy, hyperbolic radius and Liouvilles equations* $\Delta U = 0$ *and* $\Delta U = U^{\frac{n+2}{n-2}}$. — SIAM Review. **38**, No. 2 (1996), 191–238.
13. В. Н. Дубинин, Е. Г. Прилепкина, *Об экстремальном разбиении пространственных областей.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 95–107.
14. K. A. Gulyaeva, S. I. Kalmykov, E. G. Prilepkina, *Extremal decomposition problems in the Euclidean space.* — Intern. J. Math. Analysis **9**, No. 56 (2015), 2763–2773.
15. S. Kalmykov, E. Prilepkina, *Extremal decomposition problems for p-harmonic radius.* Analysis Mathematica (в печати).
16. *Bent Fuglede. Extremal length and functional completion.* — Acta Math. **98**, No. 1 (1957), 171–219.
17. В. А. Шлык, *О равенстве p-емкости и p-модуля.* — Сиб. мат. ж. **34**, No. 6 (1993), 216–221.
18. В. Г. Мазья, *Пространства С. Л. Соболева.* Л. 1985.
19. V. N. Dubinin, *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory.* Birkhäuser, Basel, 2014.
20. В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов, обобщения лемм Грётша и симметризация,* — Зап. научн. семин. ПОМИ **337** (2006), 73–100.
21. Е. Г. Прилепкина, *Теоремы искажения для однолистных функций в многосвязных областях.* — Дальневост. мат. ж. **9**, Nos. 1–2, (2009), 140–149.
22. M. A. Sadybekov, B. T. Torebek, B. Kh. Turmetov, *Representation of Green's function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball.* — Complex Variables and Elliptic Equations, `http://dx.doi.org/10.1080/17476933.2015.1064402`.
23. M. Vuorinen, *Conformal geometry and quasiregular mappings.* — Lect. Notes Math., Springer-Verlag, 1988.

Kalmykov S. I., Prilepkina E. G. On the p-harmonic Robin radius in the Euclidean space.

For $p > 1$, the notion of the p-harmonic Robin radius is introduced in the space $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. If the corresponding part of the boundary degenerates the Robin–Neumann radius is considered. The monotonicity of the p-harmonic Robin radius under some deformations of a domain is proved. In the Euclidean space, some extremal decomposition problems are solved. The definitions and proofs are based on the technique of modules of curve families.

Department of Mathematics,
Shanghai Jiao Tong University,
800 Dongchuan RD, Shanghai,
200240, China

Поступило 19 августа 2016 г.

Институт
прикладной математики ДВО РАН, ул. Радио 7,
Владивосток, Россия

E-mail: sergeykalmykov@inbox.ru,
sergeykalmykov@inbox.ru

Дальневосточный федеральный университет,
ул. Суханова 8,
Владивосток, Россия

Владивостокский филиал
Российской таможенной академии,
ул. Стрелковая, 16В, Владивосток, Россия
E-mail: pril-elena@yandex.ru