Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 449, 2016 г.

В. Г. Журавлев

ЯДЕРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ЧИСЕЛ ПИЗО В МНОГОМЕРНЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

Введение

0.1. Общая теорема о приближениях чисел Пизо. Рассматривается вопрос о многомерных приближения алгебраических иррациональностей $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, где $\alpha_1 = \theta^d$, $\alpha_2 = \theta^{d-1}$, $\dots$, $\alpha_d = \theta^1$ и $\theta > 0$ – вещественный корень многочлена

$$f_a(x) = x^{d+1} + a_d x^d + \dots + a_1 x - 1 \tag{0.1}$$

степени $d+1 \geqslant 3$ с натуральными коэффициентами $a_i = 1, 2, 3, \dots$

С вектором α связывается с периодом $p = a_1 + \dots + a_d$ периодическая последовательность вкладывающихся

$$T^{(i)} \quad \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \quad \mathbb{T}^d \tag{0.2}$$

в тор $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ многогранников $T^{(i)}$ для $i = 0, 1, 2, \dots$ Данные многогранники порождают ядерные разбиения тора $\mathbb{T}^d$, для которых $T^{(i)}$ являются *ядрами*. Кроме этого задаются рекуррентные последовательности натуральных чисел Q_a, $R_{1,a}, \dots, R_{d,a}$ от параметра $a = 0, 1, 2, \dots$ с рекуррентным уравнением, имеющим такие же коэффициенты, как и многочлен $f_a(x)$ из (0.1).

В теореме 5.1 доказано следующе утверждение.

Теорема 0.1. 1. *Для любого $i = ap$, где $a = 1, 2, 3, \dots$, вектор*

$$v_{\min}^{(i)} = (-Q_a\alpha_1 + R_{a,1}, \dots, -Q_a\alpha_d + R_{a,d}) \tag{0.3}$$

обладает минимальным свойством:

$$v_{\min}^{(i)} \in T^{(i)} \quad \text{с минимальным целым} \quad Q_a \geqslant 1. \tag{0.4}$$

Свойство (0.4) *означает, что ни одна из точек орбиты*

$$x_j \equiv -j\alpha \bmod \mathbb{Z}^d$$

Ключевые слова: ядерные разбиения тора, наилучшие многомерные приближения, теорема Лагранжа, числа Пизо.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 14-01-00360.

не попадает

$$x_j \notin T^{(i)} \quad \textit{для всех} \quad 1 \leqslant j < Q_a \tag{0.5}$$

в ядро $T^{(i)}$ *– многогранник* (0.2).

2. *В случае, если* θ^{-1} *является числом Пизо, имеют место неравенства*:

$$|Q_a\alpha_1 - R_{a,1}| + \cdots + |Q_a\alpha_d - R_{a,d}| \quad \leqslant c\varrho^a, \tag{0.6}$$

где $\varrho < 1$ *и константа* c *не зависит от* a.

Замечание 0.1. Минимальное свойство (0.4), (0.5) указывает на *наилучшее ядерное приближение* (karyon approximation). Это означает, что точки $v_{\min}^{(i)}$ из (0.3) наилучшим образом приближаются к $0 \bmod \mathbb{Z}^d$ относительно $T^{(i)}$-норм (ядерных норм), в качестве выпуклых тел для которой выбраны выпуклые многогранники $T^{(i)}$ – ядра индуцированных разбиений d-мерного тора $\mathbb{T}^d$.

0.2. Кубические числа Пизо. В некоторых случаях удается получить явную верхнюю границу для множителя ϱ в неравенствах (0.6) в терминах коэффициентов соответствующих многочленов (0.1). Так, для кубических иррациональностей в теоремах 7.1 и 7.2 доказаны следующе неравенства.

Теорема 0.2. *Пусть многочлен* $f_a(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x - 1$ *имеет коэффициенты* $a_1, a_2 = 1, 2, 3, \ldots$, $0 < \theta < 1$ *– вещественный корень многочлена* $f_a(x)$, *и* $\alpha_1 = \theta^2$, $\alpha_2 = \theta$. *Пусть, кроме того, последовательность* f_a *для* $a = 0, 1, 2, \ldots$ *задана рекуррентным уравнением*

$$f_{a+3} = a_1f_{a+2} + a_2f_{a+1} + f_a \tag{0.7}$$

с начальными условиями $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_2 = 3$, *и пусть* $R_{1,a} = f_a$, $R_{2,a} = f_{a+1}$, $Q_a = f_{a+2}$.

1. *Если выполняется условие* $4a_1 \geqslant a_2^2$, *то для всех* $a = 1, 2, 3, \ldots$ *справедливы неравенства*

$$|Q_a\alpha_1 - R_{1,a}| + |Q_a\alpha_2 - R_{2,a}| \leqslant 10 \cdot \varrho^{(a-1)/2}, \tag{0.8}$$

где $\varrho < a_1^{-1/2}$.

2. *При выполнении же условия* $a_2 \leqslant a_1 \leqslant 2a_2 - 5$ *будут имеют место неравенства*

$$|Q_a\alpha_1 - R_{1,a}| + |Q_a\alpha_2 - R_{2,a}| \leqslant 10 \cdot \varrho^{a-1} \tag{0.9}$$

и в этом случае $\varrho < 1 - \frac{1}{a_2+1}$.

Замечание 0.2. В теореме 7.1 показано, как неравенства (0.8) можно переписать более привычно в виде однородного приближения

$$\left|\alpha_1 - \frac{R_{1,a}}{Q_a}\right| + \left|\alpha_2 - \frac{R_{2,a}}{Q_a}\right| \leqslant \frac{c}{Q_a^{1+1/2}}, \tag{0.10}$$

вектора (α_1, α_2) *двумерными цепными дробями* $\left(\frac{R_{1,a}}{Q_a}, \frac{R_{2,a}}{Q_a}\right)$ с числителями и знаменателями, определяемыми одним и тем же рекуррентным соотношением (0.7). В неравенствах (0.10) константа $c > 0$ не зависит от $a = 1, 2, 3, \ldots$

0.3. Числа Литтлвуда–Пизо. Среди многочленов (0.1) содержатся многочлены Литтлвуда

$$f_a(x) = x^{d+1} + x^d + \cdots + x - 1. \tag{0.11}$$

Если $\theta > 0$ – вещественный корень многочлена (0.11), то известно, что θ^{-1} будет числом Пизо. При фиксированном $d = 1, 2, 3, \ldots$ зададим последовательность f_a рекуррентным уравнением

$$f_{a+d+1} = f_{a+d} + \ldots + f_{a+1} + f_a \tag{0.12}$$

для $a = 0, 1, 2, \ldots$ с начальными условиями

$$f_0 = 1, \quad \ldots, \quad f_{d-1} = 1, \quad f_d = d + 1. \tag{0.13}$$

Так определенные числа f_a являются многомерным обобщением чисел Фибоначчи $1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$, получающихся из (0.12), (0.13), если выбрать $d = 1$.

В теореме 8.1 доказаны следующие свойства аппроксимации для чисел Литтлвуда–Пизо.

Теорема 0.3. *Пусть $\theta > 0$ – вещественный корень многочлена Литтлвуда* (0.11) *степени $d+1 \geqslant 3$, $\alpha_1 = \theta^d, \ldots, \alpha_d = \theta$, и пусть рекуррентные последовательности $R_{1,a}, \ldots, R_{d,a}, Q_a$ для $a = 0, 1, 2, \ldots$ заданы равенствами*

$$R_{1,a} = f_a, \quad \ldots, \quad R_{d,a} = f_{a+d-1}, \quad Q_a = f_{a+d}, \tag{0.14}$$

где последовательность f_a была определена в (0.12), (0.13). *Тогда для всех $a = 1, 2, 3, \ldots$ имеют место приближения*

$$|Q_a\alpha_1 - R_{1,a}| + \cdots + |Q_a\alpha_d - R_{d,a}| \quad \leqslant d(2d+1)\varrho_d^{a-1} \tag{0.15}$$

с множителями $\varrho_d < 1$, зависящими только от d. Значения множителей ϱ_d для $2 \leqslant d \leqslant 20$ приведены в таблице (8.13).

Замечание 0.3. Общая теорема 0.1 о приближениях алгебраических чисел вместе с приведенной теоремой 0.3 интересны тем, что содержат в явном виде оценки наилучших многомерных приближений (0.4), (0.5) для чисел Пизо произвольной степени $d+1$.

0.4. История и методы. Доказательство того, что приближения (0.4), (0.5) являются наилучшими относительно $T^{(i)}$-норм, опирается на метод дифференцирования индуцированных разбиений многомерных торов [1–3].

Для вывода же из приближений (0.4), (0.5) количественных оценок в теоремах 0.2 и 0.3 используются многомерные возвратные отображения [1,4]. Ранее одномерные возвратные отображения применялись в теории динамических систем [5,6], а двумерные возвратные отображения – для проверки периодичности разложений кубических корней [7] и для приближений кубических иррациональностей [4]. Исследования разложений в многомерные цепные дроби отдельных классов кубических иррациональностей содержатся в [8–14].

Так или иначе, развиваемая нами теория имеет своим стержнем многомерное обобщение теоремы Лагранжа [15] о том, что некая иррациональность допускает периодическое разложение в обычную цепную дробь тогда и только тогда, когда она является квадратичной.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_d)$ – произвольная точка с координатами из $\mathbb{R}$ и $F_x = \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_d)$ – расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, получающееся добавлением к нему чисел $x_1, \dots, x_d$. Определим *степень точки* x над $\mathbb{Q}$, полагая $\deg(x) = \deg F_x$, где справа указана степень $\deg F_x = [F_x : \mathbb{Q}]$ поля F_x, рассматриваемого как векторное пространство на полем $\mathbb{Q}$.

В [1] было доказано следующее утверждение.

Теорема 0.4. *Пусть точка $x = (x_1, \dots, x_d)$ будет иррациональной, т.е. числа $1, x_1, \dots, x_d$ линейно независимы над кольцом целых рациональных чисел $\mathbb{Z}$. Если она при этом является неподвижной точкой некоторого отображения δ из полугруппы d-мерных возвратных отображений $\mathcal{D}$, то ее степень*

$$\deg(x) = d + 1.$$

Приведенная выше теорема 0.4 представляет собою обобщение первой части теоремы Лагранжа для алгебраических иррациональностей произвольной степени $d+1$, т.к. в данном случае неподвижность точки

x влечет за собою периодичность разложения ее в d-мерную цепную дробь.

Вторая часть обобщения теоремы Лагранжа доказана в [4] для некоторых семейств кубических иррациональностей и в [16] – для произвольных иррациональностей, являющихся корнями многочленов (0.1) с натуральными коэффициентами.

Хорошо известна связь между обычными цепными дробями и рекуррентными соотношениями второго порядка. В настоящей работе для вычисления подходящих дробей также применяются рекуррентные соотношения, но уже произвольного порядка $d+1$ (см. теорему 5.1). В многомерном случае такая связь приближений с рекуррентными последовательностями была обнаружена в [17].

§1. Числа и многочлены Пизо

1.1. Единицы алгебраических полей. В настоящей работе будут рассматриваться многочлены

$$f_a(x) = x^{d+1} + a_d x^d + \cdots + a_1 x - 1 \tag{1.1}$$

степени $d+1 \geqslant 3$ с натуральными коэффициентами $a_i = 1, 2, 3, \ldots$ Такие $f_a(x)$ являются $\triangle$-*многочленами* [4]. Это означает, что многочлен $f_a(x)$ имеет вещественный корень $f_a(\theta) = 0$ в интервале $0 < \theta < 1$, удовлетворяющий условию

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \triangle^{\mathrm{int}}, \tag{1.2}$$

где $\alpha_1 = \theta^d$, $\alpha_2 = \theta^{d-1}$, $\ldots$, $\alpha_d = \theta^1$ и $\triangle$ — замкнутый d-мерный *симплекс* с вершинами в точках $(0, \ldots, 0)$, $(1, ldots, 0), \ldots$, $(0, \ldots, 1)$ из пространства $\mathbb{R}^d$.

Если при этом многочлен $f_a(x)$ окажется неприводимым над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, то скажем, что $f_a(x)$ – $\triangle_{\mathrm{irr}}$-*многочлен*. Следовательно, в данном случае его корень θ будет алгебраической иррациональностью степени $d+1$.

Из $\triangle_{\mathrm{irr}}$-условия и ограничения на свободный член $a_0 = -1$ многочлена (1.1) вытекает, что его корень θ является *единицей* нормы $N_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\theta) = (-1)^d$ вещественного алгебраического расширения $\mathbb{Q}(\theta)$ над полем $\mathbb{Q}$ степени $d+1$.

1.2. Числа Пизо–Виджаяраргхавана. По отношению к многочлену (1.1) определим *инверсный многочлен*

$$f_a^*(x) = x^{d+1} - a_1 x^d + \cdots - a_d x - 1, \tag{1.3}$$

связанный с $f_a(x)$ равенством

$$f_a^*(x) = -x^{d+1} f_a\Big(\frac{1}{x}\Big). \tag{1.4}$$

Из равенства (1.4) следует, что вещественное число $\theta^{-1} > 1$ будет корнем $f_a^*(\theta^{-1}) = 0$ инверсного многочлена (1.3).

Из определения (1.1) и (1.3) следует, что θ^{-1} является целым алгебраическим числом. Если при этом окажется, что у числа θ^{-1} все его сопряженные корни $\zeta_1^{-1}, \ldots, \zeta_d^{-1}$, отличные от него самого, лежат внутри единичного круга $|\zeta_i^{-1}| < 1$, то θ^{-1} называется *числом Пизо-Виджаяраргхавана* [18]. В литературе для таких чисел обычно встречается сокращенное название – *числа Пизо*. В этом случае сам инверсный многочлен $f_a^*(x)$ будем называть *многочленом Пизо*.

§2. Калибровочный и инверсный многочлены

2.1. Порядковая и калибровочная матрицы. Согласно теореме 9.1 из [16] многочлену $f_a(x)$ из (1.1) ставится в соответствие *порядковая матрица*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_1 - 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ a_1 + a_d - 2 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ \ldots & & \ldots & & & \\ a_1 + a_3 - 2 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 1 \\ a_1 + a_2 - 2 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Это целочисленная квадратная матрица порядка $d+1$. Условимся нумерацию строк и столбцов в матрице $\mathbf{M}$ начинать с 0.

Кроме матрицы $\mathbf{M}$ в теореме 9.2 из [16] была определена еще *калибровочная матрица* $\mathbf{A}$ – это квадратная матрица порядка d. Используя для порядковой матрицы $\mathbf{M}$ формулу (2.1), матрицу $\mathbf{A}$ можно записать в виде

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & & -\alpha_{d-1} & -\alpha_d \\ -a_d\alpha_1 + 1 & -a_d\alpha_2 & & -a_d\alpha_{d-1} & -a_d\alpha_d \\ -a_{d-1}\alpha_1 & -a_{d-1}\alpha_2 + 1 & \ldots & -a_{d-1}\alpha_{d-1} & -a_{d-1}\alpha_d \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\ -a_3\alpha_1 & -a_3\alpha_2 & & -a_3\alpha_{d-1} & -a_3\alpha_d \\ -a_2\alpha_1 & -a_2\alpha_2 & & -a_2\alpha_{d-1} + 1 & -a_2\alpha_d \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

2.2. Калибровочный многочлен. Характеристический многочлен

$$ch_{\mathbf{A}}(x) = \det(xE_d - \mathbf{A})$$

$$= \det \begin{pmatrix} x+\alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_{d-1} & \alpha_d \\ -1+a_d\alpha_1 & x+a_d\alpha_2 & & a_d\alpha_{d-1} & a_d\alpha_d \\ a_{d-1}\alpha_1 & -1+a_{d-1}\alpha_2 & \dots & a_{d-1}\alpha_{d-1} & a_{d-1}\alpha_d \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a_3\alpha_1 & a_3\alpha_2 & & x+a_3\alpha_{d-1} & a_3\alpha_d \\ a_2\alpha_1 & a_2\alpha_2 & & -1+a_2\alpha_{d-1} & x+a_2\alpha_d \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

калибровочной матрицы (2.2), где E_d – единичная матрица порядка d, называется *калибровочным многочленом.*

Лемма 2.1. *Определенный в* (2.3) *калибровочный многочлен*

$$ch_{\mathbf{A}}(x) = x^d + c_{d-1}x^{d-1} + \dots + c_1x^1 + c_0 \quad (2.4)$$

имеет коэффициенты

$$c_{d-k} \quad = \alpha_k + a_d\alpha_{k+1} + \dots + a_{k+1}\alpha_d \quad (2.5)$$

для $1 \leqslant k \leqslant d$. *Здесь* α_k *определены в* (1.2), *при этом дополнительно полагаем* $\alpha_k = 0$, *если* $k > d$.

Доказательство. Обозначим через $A(i_1, \dots, i_k)$ диагональные миноры матрицы $-\mathbf{A}$, стоящие на пересечении $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant d$ строк и столбцов. Из (2.2) следуют равенства

$$A(i_1, \dots, i_k) = 0, \quad (2.6)$$

если среди номеров $i_1, \dots, i_k$ найдутся хотя бы два не рядом стоящих номера $i_{s+1} - i_s > 1$. Поэтому используя (2.3) можем записать

$$c_{d-k} = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant d} A(i_1, \dots, i_k) \quad (2.7)$$

с суммированием по *цепочкам* $(i_1, \dots, i_k)$, когда $i_{s+1} - i_s = 1$ для всех s в силу (2.6). Если ввести дополнительный коэффициент $a_{d+1} = 1$, то для диагональных миноров $A(i_1, \dots, i_k)$ из суммы (2.7) можно выписать единообразную формулу

$$A(i_1, \dots, i_k) = a_{d+k+1-i_k}\alpha_{i_k}. \quad (2.8)$$

Теперь из формул (2.7) и (2.8) вытекают нужные равенства (2.5). □

Предложение 2.1. *Калибровочный многочлен* $ch_{\mathbf{A}}(x)$ *из* (2.3) *и инверсный многочлен* $f_a^*(x)$ *из* (1.3) *связаны между собою соотношением*

$$f_a^*(x) = ch_{\mathbf{A}}(x)\Big(x - \frac{1}{\theta}\Big), \tag{2.9}$$

где $0 < \theta < 1$ *– корень исходного многочлена* $f_a(x)$, *определенного в* (1.1).

Доказательство. Согласно (1.2) имеем $\alpha_1 = \theta^d$, $\alpha_2 = \theta^{d-1}$, $\dots$, $\alpha_d = \theta$. Так как $\alpha_d = \theta$ — корень многочлена $f_a(x)$, то

$$\frac{1}{\alpha_d} = \alpha_1 + a_d\alpha_2 + \ldots + a_2\alpha_d + a_1. \tag{2.10}$$

Подставляя $\frac{1}{\theta} = \frac{1}{\alpha_d}$ из (2.10) в правую часть (2.9) и используя формулы (2.5) для коэффициентов c_k характеристического многочлена $ch_{\mathbf{A}}(x)$, получаем соотношение (2.9). □

§3. Характеристический многочлен порядковой матрицы

3.1. Характеристический многочлен. Используя явный вид порядковой матрицы $\mathbf{M}$, определнной в (2.1), можем выписать ее характеристический многочлен

$$ch_{\mathbf{M}}(x) = \det(xE_{d+1} - \mathbf{M})$$

$$= \det \begin{pmatrix} x - a_1 + 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -a_1 & x & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -a_d - a_1 + 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ \dots & & \dots & & & \\ -a_3 - a_1 + 2 & 0 & \dots & -1 & x & -1 \\ -a_2 - a_1 + 2 & 0 & \dots & 0 & -1 & x - 1 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

3.2. Связь с инверсным многочленом. Далее мы покажем, что в наше случае характеристический многочлен порядковой матрицы (3.1) непосредственно связан с исходным многочленом $f_a(x)$.

Предложение 3.1. *Характеристический многочлен* (3.1) *равен*

$$ch_{\mathbf{M}}(x) = f_a^*(x) \tag{3.2}$$

– инверсному многочлену (1.3).

Доказательство. Ввиду (1.3) для доказательства тождества (3.2) нужно проверить выполнение равенства

$$ch_{\mathbf{M}}(x) = x^{d+1} - a_1 x^d + \ldots - a_d x - 1. \tag{3.3}$$

Разлагая определитель (3.1) по последнему столбцу, записываем

$$ch_{\mathbf{M}}(x) = A_0 + A_1 + \cdots + A_d. \tag{3.4}$$

Если для A_k доказать следующие равенства:

$$\begin{aligned} A_0 &= (-a_2 - a_1 + 2)x^{d-1} + (-a_3 - a_1 + 2)x^{d-2} \\ &+ \cdots + (-a_d - a_1 + 2)x - a_1, \\ A_1 &= (-x + a_1 - 1)x^0, \\ &\ldots \\ A_{d-1} &= (-x + a_1 - 1)x^{d-2}, \\ A_d &= x^{d+1} - (a_1 - 1)x^d + (-x + a_1 - 1)x^{d-1}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

то из них будет следовать равенство (3.3).

Обозначим через M_k^d дополнительный минор в матрице из (3.1) для элемента последнего столбца с номером $k = 0, 1, \ldots, d$. Минор

$$M_0^d = \det \begin{pmatrix} -a_1 & x & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -a_d - a_1 + 2 & -1 & x & \ldots & 0 & 0 \\ -a_{d-1} - a_1 + 2 & 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & & \ldots & & & \\ -a_3 - a_1 + 2 & 0 & 0 & \ldots & -1 & x \\ -a_2 - a_1 + 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

разлагаем по последнему столбцу и тогда получаем переход

$$M_0^d = -(-a_2 - a_1 + 2)x^{d-1} + M_0^{d-1} \tag{3.7}$$

к аналогичному минору M_0^{d-1} порядка $d-2$. Для начального $d = 2$ непосредственно имеем формулу

$$M_0^2 = -[(-a_2 - a_1 + 2)x - a_1]. \tag{3.8}$$

Используя переход (3.7) и (3.8), по индукции получаем общую формулу

$$\begin{aligned} M_0^d = (-1)^{d-1}[(-a_2 - a_1 + 2)x^{d-1} + (-a_3 - a_1 + 2)x^{d-2} \\ + \cdots + (-a_d - a_1 + 2)x - a_1]. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Для миноров M_i^d с номерами $i = 1, \ldots, d-1$ формула (3.9) упрощается и принимает вид

$$M_i^d = (-1)^{d-1}(-x + a_1 - 1). \tag{3.10}$$

Действительно, например для минора M_1^d имеем

$$M_1^d = \det\begin{pmatrix} x-a_1+1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_d-a_1+2 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & \dots & & & \\ -a_3-a_1+2 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \\ -a_2-a_1+2 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= (-1)^{d-1}(-x+a_1-1). \qquad (3.11)$$

В случае минора M_d^d формула (3.10) несколько видоизменяется

$$M_d^d = \det\begin{pmatrix} x-a_1+1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_d-a_1+2 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & \dots & & & \\ -a_3-a_1+2 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{pmatrix}$$
$$= (-x+a_1-1)x^{d-1}. \qquad (3.12)$$

Наконец, собирая вместе формулы (3.9), (3.10) и (3.12), получаем требуемые равенства (3.5) для алгебраических дополнений A_k, из которых вместе с разложением (3.4) следует равенство (3.3) для характеристического многочлена $ch_{\mathbf{M}}(x)$. □

§4. Дифференцирования звезд и торические ядерные разбиения

Более подробное изложение приводимых ниже конструкций см. в [1].

4.1. Перекладывающиеся развертки тора. Пусть

$$L = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_d] \qquad (4.1)$$

– полная решетка в пространстве $\mathbb{R}^d$ с базисом $l_1, \dots, l_d$ и T – некоторое подмножество из $\mathbb{R}^d$. Будем говорить, что T является *разверткой тора* $\mathbb{T}_L^d = \mathbb{R}^d/L$, если отображение

$$T \overset{\sim}{\longrightarrow} \mathbb{T}_L^d : \quad x \mapsto x \bmod L$$

– биекция. Развертка T называется *перекладывающейся*, если задано ее разбиение

$$T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_d \qquad (4.2)$$

и перекладывание

$$T \xrightarrow{S'} T : \quad S'(x) = x + v_{\mathrm{col}(x)} \qquad (4.3)$$

на векторы $v_0, v_1, \ldots, v_d$, связанные с базисом (4.1) решетки L равенствами

$$l_k = v_k - v_0 \quad \text{для} \quad k = 1, \ldots, d. \tag{4.4}$$

В формуле (4.3) использовано обозначение $\mathrm{col}(x) = k$ для *цвета* точек x, принадлежащих подмножеству T_k из разбиения (4.2), где $k = 0, 1, \ldots, d$.

Примерами перекладывающихся разверток тора для $d = 2$ являются выпуклые шестиугольники с попарно равными и параллельными сторонами, для $D = 3$ – ромбододекаэдры Федорова [19], а для $D = 4$ – параллелоэдры Вороного [20]. Общие конструкции перекладывающихся разверток тора приведены в [21, 22].

Если обозначить

$$v_0 = \alpha', \tag{4.5}$$

то из равенств (4.4) и (4.5) вытекают сравнения

$$v_k \equiv \alpha' \bmod L$$

для всех $k = 0, 1, \ldots, d$. Поэтому перекладывание (4.3) эквивалентно сдвигу тора $S' = S'_{\alpha'}$:

$$T \xrightarrow{S'} T: \quad S'(x) \equiv x + \alpha' \bmod L \tag{4.6}$$

на вектор $\alpha' \bmod L$.

Кроме тора $\mathbb{T}^d_L$, нам потребуется еще один тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} = \mathbb{R}^d/\mathcal{L}$ для другой полной решетки $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^d$. Зададим сдвиг $S = S_\alpha$ тора $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ на вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$, полагая

$$\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \xrightarrow{S} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}: \quad x \mapsto S(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathcal{L}. \tag{4.7}$$

Далее торы $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ будут использоваться, как вмещающие пространства для вложений различных торов $\mathbb{T}^d_L$ с изменяющимися решетками L.

4.2. Вкладывающиеся в тор развертки.

Определение 4.1. *Перекладывающаяся развертка T из* (4.2) *вкладывается*

$$T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{4.8}$$

в тор $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$ относительно сдвига $S = S_\alpha$, если выполняются следующие условия.

1. *Подмножество* $T \subset \mathbb{R}^d$ *является* $\mathcal{L}$-различимым, *т.е. для любых элементов* x, y *из* T, *связанных сравнением* $x \equiv y \bmod \mathcal{L}$, *следует их равенство* $x = y$. *Значит, отображение*

$$T \overrightarrow{\sim} T \bmod \mathcal{L}: \quad x \mapsto x \bmod \mathcal{L} \tag{4.9}$$

будет взаимно однозначным; и поэтому используя отображение (4.9) *можем считать развертку* T *вложенной как множество*

$$T \subset \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{4.10}$$

в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$.

2. *Векторы перекладывания* (4.3) *имеют вид*

$$v_k \equiv m_k \alpha \bmod \mathcal{L} \tag{4.11}$$

для всех $k = 0, 1, \dots, d$ *с некоторыми коэффициентами* $m_k = 1, 2, 3, \dots$

3. *Пусть*

$$\mathrm{Orb}^+(T_k) = \quad \{S^j(T_k); \quad j = 1, \dots, m_k - 1\} \tag{4.12}$$

обозначает орбиту *подмножества* $T_k \subset T$. *В силу включения (4.10) будем полагать* $\mathrm{Orb}^+_k \subseteq \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$. *Тогда по определению считается, что орбиты (4.12) удовлетворяют условию*

$$\mathrm{Orb}^+(T_k) \cap T = \varnothing \tag{4.13}$$

для $k = 0, 1, \dots, d$.

Чтобы сформулировать следующий результат, нам потребуется в дополнение к (4.12) определить еще *полные орбиты*

$$\mathrm{Orb}(T_k) = \quad \{S^j(T_k); \quad j = 0, 1, \dots, m_k - 1\}. \tag{4.14}$$

Кроме того, будем предполагать вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ из (4.7) *иррациональным*, когда выполняется условие:

$$\text{\textit{числа}} \quad 1, \alpha_1, \dots, \alpha_d \quad \text{\textit{линейно независимы над кольцом}} \quad \mathbb{Z}. \tag{4.15}$$

Здесь α_k – координаты вектора α в некотором базисе полной решетки $\mathcal{L}$.

Теорема 4.1. *Пусть развертка* T *вкладывается* (4.8) *в тор* $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$, *развертка* T *имеет внутреннюю точку, и пусть вектор* α *для сдвига* $S = S_\alpha$ *из* (4.7) *будет иррациональным* (4.15). *Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Множества из полных орбит* $\mathrm{Orb}(T_k)$ *не пересекаются, т.е.*

$$S^{j_1}(T_{k_1}) \cap S^{j_2}(T_{k_2}) \neq \emptyset \tag{4.16}$$

только при условии $j_1 = j_2$ *и* $k_1 = k_2$.

2. *Имеет место разбиение тора* $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{T}_d, \tag{4.17}$$

где

$$\mathcal{T}_k = T_k \sqcup S^1(T_k) \sqcup \dots \sqcup S^{m_k - 1}(T_k)$$

– орбитное разбиение, составленное из множеств, входящих в полную орбиту $\mathrm{Orb}(T_k)$ *из* (4.14).

Доказательство приведено в [1]. □

4.3. Торические ядерные разбиения. Из теоремы 4.1 следует, что сдвиг тора $S' : T \longrightarrow T$ из (4.6) является *индуцированным отображением* или иначе – отображением первого возвращения, отображением Пуанкаре – для сдвига тора $S : \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ из (4.7), что символически будем обозначать в виде равенства

$$S' = S|_T. \tag{4.18}$$

Множество T по отношению ко всему разбиению тора $\mathcal{T}$ называется (ср. [25]) *ядром (karyon)* разбиения $\mathcal{T}$. Чтобы указывать на такую связь между T и $\mathcal{T}$ будем использовать обозначения

$$T = \mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}(\mathcal{T}). \tag{4.19}$$

Обозначим

$$T = T(v), \quad \mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{T}_d \tag{4.20}$$

соответственно развертку T из (4.2) и *ядерное разбиение* (4.17) тора $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$, индуцированное вкладывающейся в тор $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ разверткой T.

4.4. Звезды и их производные. Множество векторов

$$v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$$

называется *звездой* развертки $T = T(v)$ тора $\mathbb{T}^d_L$ с векторами перекладывания $v_0, v_1, \dots, v_d$. Если данная развертка T вкладывается $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ относительно некоторого сдвига $S = S_\alpha$, то в этом случае будем говорить, что такая звезда v *вкладывается*

$$v \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{4.21}$$

в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ относительно сдвига S.

Предположим, что для некоторого сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из

$$\{0, 1, \dots, d\}$$

сумма векторов $v_\sigma = v_{k_1} + v_{k_2}$ звезды v не принадлежит гиперплоскости $H_{\sigma'}$, проходящей через оставшиеся векторы зведы $v_k \in v$ с номерами k из дополнительного сочетания $\sigma' = \{0, 1, \dots, d\} \setminus \sigma$. Если выполнены данные условия, то звезду $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ назовем *невывожденной*. Для невывожденной звезды v определена *σ-производная звезда*

$$v \quad \xrightarrow{\sigma} \quad v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \dots, v_d^\sigma\}, \tag{4.22}$$

где

$$v_{k_1}^\sigma = v_{k_1}, \quad v_{k_2}^\sigma = v_\sigma$$

или

$$v_{k_1}^\sigma = v_\sigma, \quad v_{k_2}^\sigma = v_{k_2}$$

в зависимости от того, какие из пар векторов v_{k_1}, v_σ или v_{k_2}, v_σ принадлежат разным полупространствам $H^\pm_{\sigma'}$, и

$$v_{k'}^\sigma = v_{k'} \quad \text{для всех} \quad k' \in \sigma'.$$

В [1] доказана следующая теорема о дифференцировании вкладывающихся звезд.

Теорема 4.2. *Пусть невырожденная звезда $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ вкладывается* (4.21) *в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ относительно сдвига $S = S_\alpha$ с иррациональным* (4.15) *вектором α. Тогда любая ее σ-производная $v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \dots, v_d^\sigma\}$ для $\sigma \in \Sigma$ также вкладывается*

$$v^\sigma \overset{\text{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{4.23}$$

в тот же тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ относительно сдвига S.

4.5. Периодические звезды. Выберем в качестве начальной звезду $v^{(0)} = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$, состоящую из векторов

$$v_0 = -\alpha, \quad v_1 = e_1 - \alpha, \quad \dots, \quad v_d = e_d - \alpha, \tag{4.24}$$

где α – вектор (1.2) и $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, …, $e_d = (0, 0, \dots, 1)$ – единичные векторы из пространства $\mathbb{R}^d$.

В [16] со звездой (4.24) ассоциируется бесконечная последовательность дифференцирований $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ с *периодом*

$$p = a_1 + \dots + a_d, \tag{4.25}$$

где a_k – коэффициенты многочлена $f_a(x)$ из (1.1), а также соответствующая последовательность звезд

$$v^{(i)} = (((v^{(0)})^{\sigma_1})^{\sigma_2} \ldots)^{\sigma_i} \tag{4.26}$$

с номерами $i = 0, 1, 2, \ldots$ Согласно теореме 7.1 из [16] последовательность звезд (4.26) обладает следующим свойством.

Теорема 4.3. *Если $i = ap + b$, где $a = 0, 1, 2, \ldots$, $b = 0, \ldots, p-1$ и p – период* (4.25)*, то для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$ справедлива формула*

$$v^{(i)} = \mathbf{A}^a v^{(b)}. \tag{4.27}$$

Здесь $\mathbf{A}$ *– калибровочная матрица, определеная в* (2.2).

4.6. Ядерные разбиения. По правилу (4.20) звездам $v^{(i)}$ из (4.27) поставим в соответствие *ядра* – развертки тора

$$T^{(i)} = T(v^{(i)}), \tag{4.28}$$

в силу (4.23) вкладывающиеся

$$T^{(i)} \quad \overset{\text{em}}{\hookrightarrow} \quad \mathbb{T}^d \tag{4.29}$$

в тор $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, где $\mathbb{Z}^d$ – кубическая d-мерная решетка.

В свою очередь, так определнные развертки тора (4.28) порождают *ядерные разбиения*

$$\mathcal{T}^{(i)} = \mathcal{T}(v^{(i)}) = \mathcal{T}_0^{(i)} \sqcup \mathcal{T}_1^{(i)} \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{T}_d^{(i)} \tag{4.30}$$

тора $\mathbb{T}^d$.

Замечание 4.1. Именно вложения (4.29) и ядерные разбиения (4.30) являются основой для доказательства свойства (0.4)–(0.5) векторов $v_{\min}^{(i)}$ из (0.3) быть наилучшими приближениями нуля относительно $T^{(i)}$-норм (ядерных норм).

§5. Основная теорема для алгебраических единиц

5.1. Рекуррентные последовательности. Зададим последовательности Q_a, $R_{1,a}, \ldots, R_{d,a}$ от параметра $a = 0, 1, 2, \ldots$ *рекуррентным соотношением*

$$\begin{aligned} Q_{a+d+1} &= a_1 Q_{a+d} + \cdots + a_d Q_{a+1} + Q_a, \\ R_{k,a+d+1} &= a_1 R_{k,a+d} + \cdots + a_d R_{k,a+1} + R_{k,a} \end{aligned} \tag{5.1}$$

для $k = 1, \ldots, d$ и начальными условиями

$$\begin{array}{lll} Q_0 = d+1, & Q_1 = \sum\limits_{k,l} m_{kl}, \ldots, & Q_d = \sum\limits_{k,l} m_{kl}^d, \\ R_{1,0} = 1, & R_{1,1} = \sum\limits_{k} m_{k1}, \ldots, & R_{1,d} = \sum\limits_{k} m_{k1}^d, \\ & \ldots\ldots\ldots & \\ R_{d,0} = 1, & R_{d,1} = \sum\limits_{k} m_{kd}, \ldots, & R_{d,d} = \sum\limits_{k} m_{kd}^d, \end{array} \tag{5.2}$$

где $\mathbf{M} = (m_{kl})_{(d+1)\times(d+1)}$ – порядковая матрица из (2.1), имеющая нумерацию строк и столбцов $0, 1, \ldots, d$, и $\mathbf{M}^i = (m_{kl}^i)_{(d+1)\times(d+1)}$ обозначает i-ую степень матрицы $\mathbf{M}$.

5.2. Основная теорема. Общая теорема 11.2 о ядерной аппроксимации из [16] в применении к алгебраическим единицам Пизо допускает следующую конкретизацию.

Теорема 5.1. *Пусть $T^{(i)}$ – вкладывающиеся в тор ядра* (4.28) *с номерами $i = ap$, где p – период* (4.25), *и пусть Q_a, $R_{1,a}, \ldots, R_{d,a}$ – рекуррентные последовательности от параметра $a = 0, 1, 2, \ldots$ с уравнением* (5.1) *и начальными условиями* (5.2). *Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *Для любого $i = ap$ вектор*

$$v_{\min}^{(i)} = (-Q_a\alpha_1 + R_{a,1}, \ldots, -Q_a\alpha_d + R_{a,d}) \tag{5.3}$$

обладает минимальным свойством:

$$v_{\min}^{(i)} \in T^{(i)} \quad \text{с минимальным целым} \quad Q_a \geqslant 1. \tag{5.4}$$

Свойство (5.4) *означает, что ни одна из точек орбиты $x_j \equiv -j\alpha \bmod \mathbb{Z}^d$ не попадает*

$$x_j \notin T^{(i)} \quad \text{для всех} \quad 1 \leqslant j < Q_a \tag{5.5}$$

в ядро $T^{(i)}$ – многогранник (4.28).

2. *Объем $s(T^{(i)})$ ядра $T^{(i)}$ находится по формуле*

$$s(T^{(i)}) = |\det\mathbf{A}|^a s(T^{(0)}), \tag{5.6}$$

где $\det\mathbf{A}$ *обозначает определитель калибровочной матрицы* $\mathbf{A}$ *из* (2.2), *удовлетворяющий неравенствам* $0 < |\det\mathbf{A}| < 1$.

3. *В случае, если многочлен $f_a(x)$ из* (1.1) *является $\triangle_{\rm irr}$-многочленом, а инверсный ему многочлен $f_a^*(x)$ из* (1.3) *будем многочленом*

Пизо, имеют место неравенства:

$$|Q_a\alpha_1 - R_{a,1}| + \dots + |Q_a\alpha_d - R_{a,d}| \quad \leqslant c_s^{(0)}\,\varrho(\mathbf{A})^a, \tag{5.7}$$

где спектральный радиус $\varrho(\mathbf{A}) < 1$, *константа* $c_s^{(0)} = c_s(\mathbf{A})r_s(v_{\min}^{(0)})$ *не зависит от* a. *Здесь* $c_s(\mathbf{A})$ – *константа, определенная в (6.5), и* $r_s(v_{\min}^{(0)})$ – *длина минимального вектора* (5.3) *в метрике* $|x|_s = |x_1| + \ldots + |x_d|$, *равная*

$$r_s(v_{\min}^{(0)}) = |(d+1)\alpha_1 - 1| + \dots + |(d+1)\alpha_d - 1|. \tag{5.8}$$

Доказательство. Новым, по сравнению с теоремой 11.2 из [16], является появление неравенства $\varrho(\mathbf{A}) < 1$ для *спектрального радиуса*

$$\varrho(A) = \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_d|\} \tag{5.9}$$

калибровочной матрицы $\mathbf{A}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ – собственные значения матрицы $\mathbf{A}$. Для доказательства неравенства (5.7) требуется выполнение условия простоты спектра $\lambda_i \neq \lambda_{i'}$ для любых $i \neq i'$, что обеспечивается условием на $\triangle_{\mathrm{irr}}$-многочлен $f_a(x)$ и равенством (2.9). Из равенства (2.9) также вытекает и неравенство $\varrho(\mathbf{A}) < 1$, поскольку в данном случае инверсный многочлен $f_a^*(x)$ является многочленом Пизо. $\square$

Относительно свойств (5.4)-(5.5) см. замечание 0.1.

§6. Константы

В этом параграфе будут вычислены константы $c_s(\mathbf{A})$ и

$$c_s^{(0)} = c_s(\mathbf{A})r_s(v_{\min}^{(0)}),$$

встречающиеся в неравенстве (5.7).

6.1. Константа $c_s(\mathbf{A})$. Константа $c_s(\mathbf{A})$ определяется из неравенства

$$|\mathbf{A}x|_s \leqslant c_s(\mathbf{A})\varrho(\mathbf{A})|x|_s, \tag{6.1}$$

выполняющегося для всех $x \in \mathbb{R}^d$ с минимально возможным значением $c_s(\mathbf{A})$. Здесь $|x|_s = |x_1| + \dots + |x_d|$ обозначает многогранную *s-метрику*. В силу однородности метрики $|x|_s$ для константы $c_s(\mathbf{A})$ получаем равенство

$$c_s(\mathbf{A}) = \frac{1}{\varrho(\mathbf{A})} \max_{|x|_s=1} |\mathbf{A}x|_s. \tag{6.2}$$

Множество $|x|_s = 1$ представляет собою поверхность выпуклого центрально симметричного многогранника $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$, состоящего из точек $|x|_s \leqslant 1$ и имеющего центр в 0. Отсюда и аффинности отображения $x \mapsto \mathbf{A}x$ следует, что

$$\max_{|x|_s=1} |\mathbf{A}x|_s = \max_{x\in V(\mathcal{P})} |\mathbf{A}x|_s, \tag{6.3}$$

где $V(\mathcal{P})$ обозначает множество вершин многогранника $\mathcal{P}$. Теперь воспользуемся явным видом (2.2) калибровочной матрицы $\mathbf{A}$. Поскольку вершинами $V(\mathcal{P})$ являются точки

$$\pm v_k = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

с единицей на месте $k = 1, \ldots, d$, то можем записать

$$\max_{x\in V(\mathcal{P})} |\mathbf{A}x|_s = \max\{1 + (d-2)\theta^2, d\theta\}, \tag{6.4}$$

так как $\alpha_1 = \theta^d$, $\alpha_2 = \theta^{d-1}$, $\ldots$, $\alpha_d = \theta$ и $0 < \theta < 1$.

Лемма 6.1. *Константа $c_s(\mathbf{A})$ в неравенстве (6.1) вычисляется по формуле*

$$c_s(\mathbf{A}) = \frac{1}{\varrho(\mathbf{A})} \max\{1 + (d-2)\theta^2, d\theta\}, \tag{6.5}$$

где $\varrho(\mathbf{A})$ – спектральный радиус калибровочной матрицы $\mathbf{A}$ и $0 < \theta < 1$ – корень многочлена $f_a(x)$ из (1.1).

Доказательство вытекает из равенств (6.2)–(6.4). □

6.2. Константа $c_s^{(0)}$.

Лемма 6.2. *Для константы*

$$c_s^{(0)} = c_s(\mathbf{A}) r_s(v^{(0)}_{\min}), \tag{6.6}$$

где $r_s(v^{(0)}_{\min})$ – радиус (5.8) нулевой звезды $v^{(0)}$, имеет место равенство

$$c_s^{(0)} = \frac{r_s(v^{(0)}_{\min})}{\varrho(\mathbf{A})} \max\{1 + (d-2)\theta^2, d\theta\}. \tag{6.7}$$

Кроме того, для $c_s^{(0)}$ *выполняется следующая грубая оценка*

$$c_s^{(0)} \leqslant \frac{d(2d+1)}{\varrho(\mathbf{A})}. \tag{6.8}$$

Доказательство. Равенство (6.7) следует из (6.5), а оценка (6.8) – из неравенств

$$\max\{1+(d-2)\theta^2, d\theta\} < d, \quad r_s(v_{\min}^{(0)}) \leqslant 2d+1. \tag{6.9}$$

Первое неравенство в (6.9) получается из неравенства $\theta < 1$. Для доказательства второго разобъем сумму

$$r_s(v_{\min}^{(0)}) = |(d+1)\alpha_1 - 1| + \cdots + |(d+1)\alpha_d - 1| = r_- + r_+$$

на две части r_- и r_+, состоящие из слагаемых с $\alpha_i < \frac{1}{d+1}$ и $\alpha_i \geqslant \frac{1}{d+1}$ соответственно. Если учесть что $\alpha_i > 0$ и $\alpha_1 + \cdots + \alpha_d < 1$, то будем иметь $r_- < d$ и $r_+ < d+1$, откуда и вытекает второе неравенство из (6.9). $\square$

§7. Кубические числа Пизо

7.1. Комплексный случай. При $d = 2$ многочлен $f_a(x)$ из (1.1) с вещественным корнем $0 < \theta < 1$ может иметь еще два комплексно сопряженных корня $\zeta, \overline{\zeta}$ – *комплексный случай*, или два вещественных корня $\zeta_2 \leqslant \zeta_1 < 0$ – *вещественный случай.*

Найдем условия на коэффициенты $a_1, a_2 = 1, 2, 3, \ldots$ многочлена $f_a(x)$, обеспечивающие существование двух комплексно сопряженных корней. Для этого достаточно потребовать выполнение неравенства $x^3 + a_2x^2 + a_1x \leqslant 0$ при всех $x \leqslant 0$, что равносильно неравенству $x^2 - a_2x + a_1 \geqslant 0$ при всех $x \geqslant 0$ или условию $a_2^2 - 4a_1 \leqslant 0$ на дискриминант последнего трехчлена. Таким образом, будем иметь комплексный случай, если выполнено условие

$$4a_1 \geqslant a_2^2. \tag{7.1}$$

Лемма 7.1. *Пусть у многочлена* $f_a(x)$ *степени* $d = 2$ *из* (1.1) *коэффициенты удовлетворяют условию* $4a_1 \geqslant a_2^2$, $0 < \theta < 1$ *– вещественный корень многочлена* $f_a(x)$, *и пусть* $\varrho(\mathbf{A})$ *– спектральный радиус калибровочной матрицы* $\mathbf{A}$ *из* (2.2). *Тогда спектральный радиус* $\varrho(\mathbf{A})$ *вычисляется по формуле*

$$\varrho(\mathbf{A}) = \theta^{1/2}, \tag{7.2}$$

где

$$\theta < \frac{1}{a_1}. \tag{7.3}$$

Следовательно, спектральный радиус $\varrho(\mathbf{A})$ удовлетворяет неравенству

$$\varrho(\mathbf{A}) < \frac{1}{a_1^{1/2}}. \tag{7.4}$$

Доказательство. Воспользуемся предложением 2.1. Согласно (2.9) характеристический многочлен калибровочной матрицы $ch_{\mathbf{A}}(x)$ делит инверсный многочлен $f_a^*(x)$ из (1.3), в силу равенства (1.4) и условия (7.1) имеющий корни ζ^{-1}, $\overline{\zeta}^{-1}$, θ^{-1}. Поэтому у характеристического многочлена $ch_{\mathbf{A}}(x)$ будут комплексные корни $\zeta^{-1}, \overline{\zeta}^{-1}$ и, значит,

$$\varrho(\mathbf{A}) = \frac{1}{|\zeta|} \tag{7.5}$$

по определению спектрального радиуса (5.9). Снова используя равенство (1.4), можем записать $|\zeta^{-1}|^2\theta^{-1} = 1$. Тогда получаем

$$\frac{1}{|\zeta|} = \theta^{1/2}. \tag{7.6}$$

Из равенств (7.5) и (7.6) вытекает формула (7.2). Далее, поскольку $0 < \theta < 1$ – корень многочлена $f_a(x)$, то из (1.1) следует неравенство $a_1\theta - 1 < 0$ или $\theta < \frac{1}{a_1}$. Отсюда и (7.6) получаем неравенство (7.4). $\square$

Теорема 7.1. *Пусть многочлен $f_a(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x - 1$ имеет коэффициенты $a_1, a_2 = 1, 2, 3, \ldots$ с условием (7.1), $0 < \theta < 1$ – корень многочлена $f_a(x)$, и $\alpha_1 = \theta^2$, $\alpha_2 = \theta$. Пусть, кроме того, последовательность f_a для $a = 0, 1, 2, \ldots$ задана рекуррентным уравнением*

$$f_{a+3} = a_1 f_{a+2} + a_2 f_{a+1} + f_a \tag{7.7}$$

с начальными условиями $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_2 = 3$, и пусть $R_{1,a} = f_a$, $R_{2,a} = f_{a+1}$, $Q_a = f_{a+2}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Для всех $a = 1, 2, 3, \ldots$ выполняются неравенства*

$$|Q_a\alpha_1 - R_{1,a}| + |Q_a\alpha_2 - R_{2,a}| \leqslant 10 \cdot \theta^{(a-1)/2}, \tag{7.8}$$

где корень θ многочлена $f_a(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\theta < a_1^{-1/2}. \tag{7.9}$$

2. *Кроме того, также выполняются неравенства*

$$\left|\alpha_1 - \frac{R_{1,a}}{Q_a}\right| + \left|\alpha_2 - \frac{R_{2,a}}{Q_a}\right| \leqslant \frac{c}{Q_a^{1+1/2}}, \tag{7.10}$$

где $c > 0$ *– независящая от* a *константа.*

Доказательство. По теореме 5.1 имеем неравенства

$$|Q_a\alpha_1 - R_{1,a}| + |Q_a\alpha_2 - R_{2,a}| \leqslant c_s^{(0)}\varrho(\mathbf{A})^a \tag{7.11}$$

с константой $c_s^{(0)}$, в силу (6.8) удовлетворяющей неравенству

$$c_s^{(0)} \leqslant \frac{10}{\varrho(\mathbf{A})}, \tag{7.12}$$

где спектральный радиус $\varrho(\mathbf{A})$ вычисляется по формуле $\varrho(\mathbf{A}) = \theta^{1/2}$ и при этом $\theta < \frac{1}{a_1}$ согласно (7.2) и (7.3). Отсюда, (7.11) и (7.12) получаем первое утверждение теоремы (7.8), (7.9).

Согласно предложению 3.1 рекуррсивная последовательность f_a из (7.7) имеет характеристическое уравнение $ch_{\mathbf{M}}(x) = f_a^*(x)$ с вещественным корнем $\theta^{-1} > 1$ и двумя комплексно сопряженными нулями $\zeta^{-1} \neq \overline{\zeta}^{-1}$ с модулем $|\zeta^{-1}| < 1$. Отсюда и (7.7) для последовательности f_a следует представление

$$f_a = \gamma\theta^{-a} + \varepsilon\zeta^{-a} + \overline{\varepsilon}\overline{\zeta}^{-a} \tag{7.13}$$

для всех $a = 1, 2, 3, \ldots$, где вещественный коэффициент $\gamma > 0$. По условию теоремы $Q_a = f_{a+2}$. Поэтому из (7.8) и (7.13) вытекает неравенство (7.10). $\square$

7.2. Вещественный случай. У многочлена $f_a(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x - 1$ подберем коэффициенты $a_1, a_2 = 1, 2, 3, \ldots$ так, чтобы он имел вещественные корни ζ_1 и ζ_2, удовлетворяющие неравенствам

$$\zeta_2 \quad < \quad \zeta_1 < \quad -1 - \Delta \quad < \quad 0 \quad < \quad \theta \quad < 1. \tag{7.14}$$

Для этого достаточно наложить на многочлен $f_a(x)$ условия

$$f_a(-2) > 0, \quad f_a(-1-\Delta) < 0, \tag{7.15}$$

где $0 < \Delta < 1$. Если ограничиться выбором $\Delta = 1/a_2$, то из неравенств

$$a_2 \quad \leqslant a_1 \quad \leqslant 2a_2 - 5 \tag{7.16}$$

будут следовать (7.15) и, значит, – неравенства (7.14).

Лемма 7.2. *Пусть у многочлена* $f_a(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x - 1$ *коэффициенты удовлетворяют условию* (7.16), *и пусть* $\varrho(\mathbf{A})$ – *спектральный радиус* (5.9) *калибровочной матрицы* $\mathbf{A}$ *из* (2.2). *Тогда спектральный радиус* $\varrho(\mathbf{A})$ *удовлетворяет неравенству*

$$\varrho(\mathbf{A}) < 1 - \frac{1}{a_2 + 1}. \tag{7.17}$$

Доказательство. Из (7.14) и (7.15) следует

$$\varrho(\mathbf{A}) = |\zeta_1^{-1}| < (1 + 1/a_2)^{-1},$$

что доказывет неравенство (7.17). □

Теорема 7.2. *Пусть многочлен* $f_a(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x - 1$ *имеет коэффициенты* $a_1, a_2 = 1, 2, 3, \ldots$ *с условием* (7.16), *и пусть последовательности* $R_{1,a} = f_a$, $R_{2,a} = f_{a+1}$, $Q_a = f_{a+2}$ *определены через рекуррентную последовательность* (7.7). *Тогда для всех* $a = 1, 2, 3, \ldots$ *выполняются неравенства*

$$|Q_a\alpha_1 - R_{1,a}| + |Q_a\alpha_2 - R_{2,a}| \leqslant 10 \cdot \varrho(\mathbf{A})^{a-1}, \tag{7.18}$$

где спектральный радиус $\varrho(\mathbf{A})$ *удовлетворяет неравенству*

$$\varrho(\mathbf{A}) < 1 - \frac{1}{a_2 + 1}. \tag{7.19}$$

Доказательство вытекает из теоремы 5.1, неравенства (6.8) и леммы 7.2. □

Замечание 7.1. Если сравнить оценки (7.8), (7.9) с новыми оценками (7.18), (7.19), то видим, что в вещественном случае наблюдается ослабление аппроксимационных свойств вкладывающихся в тор $\mathbb{T}^d$ ядер $T^{(i)}$ из (4.28). Причина тому – гиперболическое вытягивание ядер-многогранников $T^{(i)}$ при бесконечном дифференцировании.

§8. Числа Литтлвуда-Пизо

8.1. Многочлены Литтлвуда. Среди многочленов (1.1) содержатся *многочлены Литтлвуда*, имеющие коэффициенты $a_i = \pm 1$. Мы будем рассматривать многочлены частного вида

$$f_a(x) = x^{d+1} + x^d + \cdots + x - 1. \tag{8.1}$$

Известно, что инверсный (1.3) для $f_a(x)$ многочлен

$$f_a^*(x) = x^{d+1} - x^d - \cdots - x - 1 \tag{8.2}$$

является многочленом Пизо (см., например, [23]). Он имеет вещественный корень $1 < \theta^{-1} < 2$, а остальные корни $\zeta_1^{-1}, \dots, \zeta_d^{-1}$ содержатся внутри единичного круга

$$|\zeta_i^{-1}| < 1. \tag{8.3}$$

Вещественные корни $\theta^{-1} > 1$ многочленов (8.2) называются *числами Литтлвуда-Пизо.* Они включают в себя для $d = 1$ золотое сечение $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$ и для $d = 2$ кубическую иррациональность $\zeta = 1.839\dots$, на основе которой строятся разбиения Рози [24, 25].

8.2. Числа Фибоначчи и их многомерные обобщения. При фиксированном $d = 1, 2, 3, \dots$ зададим последовательность f_a рекуррентным уравнением

$$f_{a+d+1} = f_{a+d} + \dots + f_{a+1} + f_a \tag{8.4}$$

для $a = 0, 1, 2, \dots$ с начальными условиями

$$f_0 = 1, \quad \dots, \quad f_{d-1} = 1, \quad f_d = d + 1. \tag{8.5}$$

Так, если $d = 1$, то получаем *числа Фибоначчи* $1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$, а для $d = 2$ – *числа Трибоначчи* $1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, \dots$ Мы оставляем за ними прежнее название [24], [25], хотя ранее начальные условия выбирались другими $f_0 = 1$, $f_1 = 2$, $f_2 = 4$.

Лемма 8.1. *Выберем в качестве* (1.1) *многочлен Литтлвуда* $f_a(x)$ *из* (8.1) *степени* $d \geqslant 2$. *Пусть рекуррентные последовательности* Q_a, $R_{1,a}, \dots, R_{d,a}$ *порождаются рекуррентным уравнением* (5.1) *и имеют начальные условия* (5.2). *Тогда эти последовательности связаны с рекуррентной последовательностью* f_a *из* (8.4), (8.5) *равенствами*

$$R_{1,a} = f_a, \quad \dots, \quad R_{d,a} = f_{a+d-1}, \quad Q_a = f_{a+d} \tag{8.6}$$

для всех $a = 0, 1, 2, \dots$

Доказательство. Для многочлена Литтлвуда (8.1) порядковая матрица $\mathbf{M}$, определенная в (2.1), имеет вид

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \dots & & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.7}$$

Напомним, что это квадратная матрица порядка $d+1$ с нумерацией строк и столбцов, начинающихся с 0. Если матрица $M=(\mathbf{m}_0\mathbf{m}_1\ldots\mathbf{m}_d)$ имеет столбцы $\mathbf{m}_k$ длины $d+1$, то умножение ее на порядковую матрицу (8.7) сводится

$$M\mathbf{M}=(\mathbf{m}_1\ldots\mathbf{m}_d\mathbf{m}_{d+1}) \tag{8.8}$$

к сдвигу столбцов матрицы M влево и замене последнего столбца $\mathbf{m}_d$ суммой всех столбцов $\mathbf{m}_{d+1}=\mathbf{m}_0+\mathbf{m}_1+\cdots+\mathbf{m}_d$ исходной матрицы M.

Введем обозначения: $\mathbf{M}_k^a$ – сумма элементов столбца с номером $k=0,1,\ldots,d$ в матрице $\mathbf{M}^a$, возведенной в степень $a=0,1,2,\ldots$; $\mathbf{M}_{d+1}^a$ – сумма всех элементов матрицы $\mathbf{M}^a$. По определению будеть иметь

$$\mathbf{M}_{d+1}^a=\mathbf{M}_0^a+\mathbf{M}_1^a+\cdots+\mathbf{M}_d^a \tag{8.9}$$

и, кроме того, из (8.8) и (8.9) следует формула

$$\mathbf{M}_k^{a+1}=\mathbf{M}_{k+1}^a \quad \text{для} \quad k=0,1,\ldots,d. \tag{8.10}$$

Далее нам потребуется равенство

$$\mathbf{M}^{d+1}=\mathbf{M}^d+\cdots+\mathbf{M}+E, \tag{8.11}$$

вытекающее из теоремы Гамильтона–Кэли и предложения 3.1. Здесь E обозначает единичную матрицу порядка $d+1$.

Обозначим $Q_a=R_{d+1,a}$. Используя равенства (8.9)–(8.11), можем переписать определение (5.1)–(5.2) последовательностей $R_{k,a}$ в виде

$$R_{k,a}=\mathbf{M}_0^{a+k} \tag{8.12}$$

для $k=1,\ldots,d,d+1$ и $a=0,1,\ldots,d$. Применяя еще раз равенство (8.11), по индукции убеждаемся в справедливости формулы (8.12) для всех $a=0,1,2,\ldots$ Согласно (5.2) и (8.5) последовательности $R_{1,a}$ и f_a имеют одиноковые начальные условия. Отсюда и формулы (8.12) выводим равенства (8.6). □

8.3. Спектральный радиус для чисел Литтлвуда–Пизо. Приведем некоторые числовые данные относительно многочленов Литтлвуда $f_a(x)$, определенных в (8.1). В таблице (8.13) использованы следующие обозначения:

$d+1$ – степень многочлена Литтлвуда $f_a(x)$;

$0<\theta<1$ – вещественный корень многочлена $f_a(x)$;

$0<\varrho(\mathbf{A})<1$ – спектральный радиус (5.9) калибровочной матрицы $\mathbf{A}$;

$\varepsilon=\ln\varrho(\mathbf{A})/\ln\theta$ – степенной показатель, характеризующая порядок приближения;

$\nu = 1/\varepsilon$, если $1/\varepsilon$ — целое число, в противном случае полагаем

$\nu = [1/\varepsilon] + 1$, где $[x]$ обозначает целую часть числа x.

В столбцах, соответствующих спектральному радиусу $\varrho(\mathbf{A})$ и ε, приведены числовые значения для $\varrho(\mathbf{A})$ и ε с округлением в бóльшую и мéньшую сторону соответсвенно.

Таблица.

d	θ	$\varrho(\mathbf{A})$	ε	ν
2	0.54368901	0.73738	0.5	2
3	0.51879006	0.81830	0.30555	4
4	0.50866039	0.87105	0.20422	5
5	0.50413829	0.90622	0.14377	7
6	0.50201706	0.93028	0.10485	10
7	0.50099418	0.94718	0.07850	13
8	0.50049312	0.95932	0.06000	17
9	0.50024546	0.96817	0.04670	22
10	0.50012243	0.97473	0.03693	28
11	0.50006113	0.97969	0.02960	34
12	0.50003054	0.98349	0.02401	42
13	0.50001527	0.98643	0.01971	51
14	0.50000763	0.98874	0.01633	62
15	0.50000382	0.99057	0.01366	74
16	0050000191	0.99203	0.01154	87
17	0.50000095	0.99322	0.00981	102
18	0.50000048	0.99418	0.00842	119
19	0.50000024	0.99497	0.00727	138
20	0.50000012	0.99563	0.00631	159

(8.13)

8.4. Аппроксимация чисел Литтлвуда–Пизо.

Теорема 8.1. *Пусть $\theta > 0$ – вещественный корень многочлена Литтлвуда $f_a(x)$ из* (8.1) *степени $d+1 \geqslant 3$, $\alpha_1 = \theta^d$, …, $\alpha_d = \theta$, и пусть рекуррентные последовательности $R_{1,a}$, …, $R_{d,a}$, Q_a заданы равенствами* (8.6). *Тогда для всех $a = 1,2,3,\ldots$ имеют место следующие неравенства*:

$$|Q_a\alpha_1 - R_{1,a}| + \ldots + |Q_a\alpha_d - R_{d,a}| \quad \leqslant d(2d+1)\varrho(\mathbf{A})^{a-1}, \tag{8.14}$$

где спектральный радиус $\varrho(\mathbf{A}) < 1$; *и*

$$\left|\alpha_1 - \frac{R_{1,a}}{Q_a}\right| + \dots + \left|\alpha_d - \frac{R_{d,a}}{Q_a}\right| \leqslant \frac{c}{Q_a^{1+\varepsilon}} \tag{8.15}$$

с некоторыми степенным показателем $\varepsilon > 0$ *и константой* $c > 0$, *зависящими только от* d.

Значения спектрального радиуса $\varrho(\mathbf{A})$ *и степенных показателей* ε *для* $2 \leqslant d \leqslant 20$ *приведены в таблице* (8.13).

Доказательство. Как уже было сказано (8.2), θ^{-1} является числом Пизо. Поэтому неравенство (8.14) будет вытекать из теоремы 5.1, неравенства (6.8) и леммы 8.1. Повторяя те же рассуждения, что и в теореме 7.1, неравенство (8.15) сводим к неравенству (8.14). □

Замечание 8.1. В таблице 1 содержатся еще значения для $\nu = [1/\varepsilon] + 1$. По определению они удовлетворяют неравенству $1/\nu \leqslant \varepsilon$. Поэтому неравенство (8.15) можно переписать в виде

$$\left|\alpha_1 - \frac{R_{1,a}}{Q_a}\right| + \dots + \left|\alpha_d - \frac{R_{d,a}}{Q_a}\right| \leqslant \frac{c}{Q_a^{1+1/\nu}} \tag{8.16}$$

с той же константой c, что и в (8.15). Для $2 \leqslant d \leqslant 20$ только в одном случае $d = 2$ оказалось $\nu = 1/\varepsilon$ – это частный случай (7.10), когда совпадают $d = \nu = 2$. Для показателя ν в неравенстве (8.16) разность $\nu - d$ увеличивается с ростом d, что является следствием увеличения разброса значений модулей $|\zeta_i^{-1}|$ в (8.3).

Литература

1. В. Г. Журавлев, *Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **445** (2016), 33–92.
2. В. Г. Журавлев, *Двумерные приближения методом делящихся торических разбиений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **440** (2015), 81–98.
3. В. Г. Журавлев, *Делящиеся разбиения тора и множества ограниченного остатка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **440** (2015), 99–122.
4. В. Г. Журавлев, *Периодические ядерные разложения кубических иррациональностей в цепные дроби.* — Математика и информатика, Совр. пробл. матем., МИ РАН, М., (2016), 1–30 (в печати).
5. Z. Coelho, A. Lopes, L. F. Da Rocha, *Absolutely Continuous Invariant Measures for a Class of Affine Interval Exchange Maps.* — Proc. Amer. Math. Soc. **123**, No. 11 (1995), 3533–3542.

6. V. G. Zhuravlev, A. V. Shutov, *Derivaties of circle rotations and similarity of orbits.* — Max Planck Institut für Math., Preprint Series **62** (2004), 1–11.
7. M. Furukado, Sh. Ito, A. Saito, J. Tamura, Sh. Yasutomi, *A new multidimensional slow continued fraction algorithm and stepped surface.* — Exper. Math. **23**, No. 4 (2014), 390–410.
8. M. Abrate, S. Barbero, U. Cerruti, N. Murru, *Periodic Representations for Cubic Irrationalities.* — Fibonacci Quart. **50**, No. 3 (2012), 252–264.
9. N. Murru, *On the periodic writing of cubic irrationals and a generalization of Rédei functions.* — Int. J. Number Theory **11** (2015), 779–799.
10. Sh. Ito, J. Fujii, H. Higashino, Sh. Yasutomi, *On simultaneous approximation to* (α, α^2) *with* $\alpha^3 + k\alpha - 1 = 0$. — J. Number Theory **99** (2003), 255–283.
11. Q. Wang, K. Wang, Z. Dai, *On optimal simultaneous rational approximation to* $(\omega, \omega^2)^\tau$ *with* ω *being some kind of cubic algebraic function.* — J. Approx. Theory **148** (2007), 194–210.
12. P. Hubert, A. Messaoudi, *Best simultaneous Diophantine approximations of Pisot numbers and Rauzy fractals.* — Acta Arith. **124**, No. 1 (2006), 1–5.
13. N. Chevallier, *Best simultaneous Diophantine approximations of some cubic numbers.* — Journal de Théories des Nombres de Bordeaux **14**, No. 2 (2002),403–414.
14. N. Chevallier, *Best Simultaneous Diophantine Approximations and Multidimensional Continued Fraction Expansions.* — Moscow J. Combinatorics and Number Theory **3**, No. 1 (2013), 3–56.
15. А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*, 4-ое изд. М. 1978.
16. В. Г. Журавлев, *Периодические ядерные разложения единиц алгебраических полей в цепные дроби.* — Зап. научн. семин. ПОМИ (2016) (см. наст. сборник).
17. J. Lagarias, *Best simultaneous Diophantine approximations.* I. *Groth rates of best approximation denomimators.* — Trans. Amer. Math. Soc. **272** (1982), 545–554.
18. Дж. Касселс, *Введение в теорию диофантовых приближений.* М. 1961.
19. Е. С. Федоров, *Начала учения о фигурах.* М. 1953.
20. Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений.* Том 2. Киев, 1952.
21. В. Г. Журавлев, *Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **392** (2011), 95–145.
22. В. Г. Журавлев, *Многогранники ограниченного остатка.* — Математика и информатика, 1, Совр. пробл. матем., **16**, МИ РАН, М., 2012, 82–102.
23. K. Mukunda, Littlewood Pisot numbers. J. Number Theory **117** (2006), 106–121.
24. G. Rauzy, *Nombres algébriques et substitutions.* — Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 147–178.
25. В. Г. Журавлев, *Разбиения Рози и множества ограниченного остатка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **322** (2005), 83–106.

Zhuravlev V. G. Karyon expansions of Pisot numbers in multidimensional continued fractions.

Best simultaneously diophantine a pproximations are obtained for Pisot numbers. For this purpose the karyon approximation method is used. Littlewood–Pisot numbers are investigated in detail.

Владимирский государственный университет
600024, Владимир, пр. Строителей, 11, Россия
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 1 августа 2016 г.