Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 449, 2016 г.

В. Г. Журавлев

СИМПЛЕКС-МОДУЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РАЗЛОЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ В МНОГОМЕРНЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

Введение

0.1. Полные точки. Точка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ и соответствующий набор алгебраических действительных чисел чисел $\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ называются полными, если выполненяетя соотношение

$$\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}(\alpha). \tag{0.1}$$

Здесь $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}[1, \alpha_1, \dots, \alpha_d]$ обозначает модуль с базисом $\{1, \alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}(\alpha)$ – поле, полученное расширением поля $\mathbb{Q}$ добавлением к нему чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_d$. Из определения, в частности, следует иррациональность точки α, т.е. линейная независимость $1, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ над кольцом целых рациональных чисел $\mathbb{Z}$.

Определим степень $\deg \alpha = \deg\, \mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q} = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ точки α над полем $\mathbb{Q}$. Если α – полная точка, то выполняется равенство

$$\deg \alpha = d + 1. \tag{0.2}$$

0.2. Матрицы Пизо. В работе строятся унимодулярные матрицы P_α порядка $d+1$, обладающие свойством

$$\mathrm{P}_\alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{0.3}$$

где $\lambda > 1$ – некоторая единица Пизо поля $\mathbb{Q}(\alpha)$. Это означает, что все ее сопряженные $\lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(d+1)}$, кроме $\lambda^{(1)} = \lambda$, удовлетворяют неравенствам $|\lambda^{(2)}| < 1, \dots, |\lambda^{(d+1)}| < 1$. Такие матрицы P_α называются матрицами Пизо.

Ключевые слова: многомерные цепные дроби, наилучшие приближения, многомерное обобщение теоремы Лагранжа.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант № 14-11-00433.

0.3. Подходящие дроби и рекуррентные соотношения. Пусть матрица Пизо P_α из (0.3) имеет характеристический многочлен

$$ch_{P_\alpha}(x) = \det(xE - \mathrm{P}_\alpha) = x^{d+1} - b_d x^d - \cdots - b_1 x - b_0.$$

Зададим бесконечную последовательность из рациональных точек

$$\frac{P_a}{Q_a} = \left(\frac{P_{a,1}}{Q_a}, \ldots, \frac{P_{a,d}}{Q_a}\right) \tag{0.4}$$

для $a = 0, 1, 2, \ldots$, координаты каждой из которых имеют один и тот же знаменатель Q_a, с помощью рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} P_{a+d+1,i} &= b_d P_{a+d,i} + \cdots + b_1 P_{a+1,i} + b_0 P_{a,i}, \\ Q_{a+d+1} &= b_d Q_{a+d} + \cdots + b_1 Q_{a+1} + b_0 Q_a \end{aligned} \tag{0.5}$$

для $i = 1, \ldots, d$ и $a = 0, 1, 2, \ldots$

0.4. Основной результат. В теореме 7.2 доказано, что можно так выбрать начальные условия в (0.5), при которых будет иметь место следующее утверждение.

Пусть точка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ будет полной. Тогда для всех $a \geqslant l_\alpha$, где граница l_α зависит от α и начальных условий в (0.5), *выполняется неравенство*

$$\left|\alpha_1 - \frac{P_{a,1}}{Q_a}\right| + \cdots + \left|\alpha_d - \frac{P_{a,d}}{Q_a}\right| \leqslant \frac{c}{Q_a^{1+\varepsilon}} \tag{0.6}$$

с показателем

$$\varepsilon = \frac{\ln \lambda_{2,\max}}{\ln \lambda} > 0, \tag{0.7}$$

где

$$\lambda_{2,\max} = \max_{2 \leqslant j \leqslant d+1} |\lambda^{(j)}|,$$

и константантой c, не зависящей от a.

0.5. Алгоритм разложения в многомерные цепные дроби. Основу предлагаемого симплекс-модулярного алгоритма ($\mathcal{SM}$-алгоритма)

$$\mathcal{SM}: \quad \tfrac{P_a}{Q_a} = \left(\tfrac{P_{a,1}}{Q_a}, \ldots, \tfrac{P_{a,d}}{Q_a}\right) \quad \longrightarrow \quad \alpha \quad \text{при} \quad a \to +\infty \tag{0.8}$$

построения многомерных подходящих дробей $\frac{P_a}{Q_a}$ из (0.4) составляют:

1) *d-мерные минимальные рациональные симплексы $\mathbf{s}$, содержащие точку α;*

и

2) *матрицы Пизо* P_α, *обладающие свойством* (0.3).
Каждый такой симплекс $\mathbf{s}$ имеет рациональные вершины

$$\frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i} = \Big(\frac{\mathbf{P}_{i1}}{\mathbf{Q}_i}, \dots, \frac{\mathbf{P}_{id}}{\mathbf{Q}_i}\Big)$$

, где $i = 0, 1, ldots, d$, со знаменателями $\mathbf{Q}_i > 0$, удовлетворяющими условиям

$$\text{НОД}\,(\mathbf{P}_{i1}, \dots, \mathbf{P}_{id}, \mathbf{Q}_i) = 1,$$

и обладает свойством минимальности: симплекс $\mathbf{s}$ не содержит

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} \notin \mathbf{s} \tag{0.9}$$

никакой точки $\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} = \Big(\frac{\mathbf{P}_1}{\mathbf{Q}}, \dots, \frac{\mathbf{P}_d}{\mathbf{Q}}\Big)$, координаты которой имеют общий знаменатель $1 \leqslant \mathbf{Q} < \mathbf{Q}_{\max}$, где $\mathbf{Q}_{\max} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 + \dots + \mathbf{Q}_d$.

Минимальные симплексы $\mathbf{s}$ являются многомерным обобщением отрезков Фарея (см., например, [1]). Аналогично отрезкам Фарея симплексы $\mathbf{s}$ имеют объем

$$\operatorname{vol} \mathbf{s} = \frac{1}{d!}\Big(\prod_{0 \leqslant i \leqslant d} \mathbf{Q}_i\Big)^{-1}.$$

Используя свойство минимальности (0.9) в теореме 7.1 доказывается, что при специальном выборе начальных условий в (0.5) подходящие дроби $\frac{P_a}{Q_a}$ становятся многомерными дробями Фарея, дающими наилучшие приближения (0.6).

Что касается второй составляющей $\mathcal{SM}$-алгоритма (0.8) – матриц Пизо P_α из (0.3), то для их нахождения требуются некоторые факты из элементарной теории алгебраических числовых полей и в ситуации произвольной точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ необходимо уметь вычислять полные системы основных единиц соответствующего поля $\mathbb{Q}(\alpha)$ из (0.1).

0.6. Многомерные обобщения теоремы Лагранжа. В [2] был построен *алгоритм* $\mathcal{D}$ разложения алгебраических иррациональностей $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ в многомерные цепные дроби. Указанный алгоритм использует полугруппу d-мерных *возвратных отображений* $\mathcal{D}$. Отображения из $\mathcal{D}$ представляют собою обобщение одномерного возвратного отображения $\delta : [0, 1) \to [0, 1)$, определяемого условиями

$$\delta(x) = \tfrac{x}{1-x} \quad \text{или} \quad \tfrac{2x-1}{x}$$

для $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$ или $\frac{1}{2} \leqslant x < 1$ соответственно. С помощью отображения δ осуществляется разложение вещественных чисел в обычные цепные дроби.

В [2] было доказано следующее утверждение.

Теорема 0.1. *Если точка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ будет иррациональной и если при этом она является неподвижной точкой некоторого отображения δ из полугруппы d-мерных возвратных отображений $\mathcal{D}$, то ее степень равна*

$$\deg(\alpha) = d + 1. \tag{0.10}$$

Приведенная выше теорема представляет собою обобщение первой части теоремы Лагранжа для алгебраических иррациональностей произвольной степени $d+1$, т.к. в данном случае неподвижность точки x влечет за собою периодичность разложения ее в d-мерную цепную дробь.

Теорема Лагранжа утверждает [3]:

вещественная иррациональность допускает периодическое разложение в цепную дробь тогда и только тогда, когда она является квадратичной.

Пусть

$$\mathrm{L}_d = \overrightarrow{\mathrm{L}}_d \wedge \overleftarrow{\mathrm{L}}_d \tag{0.11}$$

обозначает некоторое d-мерное обобщение теоремы Лагранжа, где $\overrightarrow{\mathrm{L}}_d$ – достаточное условие:

если точка α допускает периодическое разложение в d-мерную цепную дробь, то она имеет степень (0.10);

а $\overleftarrow{\mathrm{L}}_d$ – соответственно необходимое условие в L_d.

Необходимое условие $\overleftarrow{\mathrm{L}}_2$ было доказано в [4] для некоторого трехпараметрического семейста кубических иррациональностей (9.6). Расширение (9.7) условия $\overleftarrow{\mathrm{L}}_d$ на произвольную размерность d осуществлено в работах [5,6].

Алгоритм $\mathcal{D}$ является универсальным. Он приложим к любой иррациональной точке $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ из $\mathbb{R}^d$. Напротив, $\mathcal{SM}$-алгоритм из (0.8) алгебраичный: он допускает лишь алгебраические иррациональности α. В данном случае периодичность подходящих дробей $\frac{P_a}{Q_a}$ в (0.8) означает, что их числители P_a и знаменатели Q_a вычисляются по рекуррентному уравнению (0.5) с постоянными коэффициентами.

В теореме 9.1 доказано:

если точка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ *полная и, значит, имеет степень* (0.2), *то по* $\mathcal{SM}$*-алгоритму она разлагается в периодическую цепную дробь.*

Приведенное утверждение можно считать многомерным обобщением теоремы Лагранжа (0.11) в случае $\mathcal{SM}$-алгоритма.

0.7. Два подхода: алгебраический и универсальный. Как уже отмечалось, предлагаемый $\mathcal{SM}$-алгоритм является алгебраичным. Он работает по следующей обобщенной схеме

$$\mathbf{v}_a = \mathrm{P}^a \mathbf{v}_0, \tag{0.12}$$

где $\mathrm{P} = \mathrm{P}_\alpha$ – матрица Пизо из равенства (0.3) и $\mathbf{v}_a$ – целочисленные столбцы высоты $d+1$ и $a = 0, 1, 2, \dots$ Инициированные Эйлером [7] универсальные алгоритмы [8–18], [2], действуют по иной схеме

$$\mathbf{v}_{a+1} = M_a \mathbf{v}_a. \tag{0.13}$$

Здесь M_a – целочисленные унимодулярные матрицы, выбор которых зависит от текущего столбца $\mathbf{v}_a$.

Матрица Пизо P в равенствах (0.12) также является унимодулярной. Ее выбор определяется аппроксимируемой точкой $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ из (0.1). Благодаря тому, что точка α предполагается алгебраической (0.2), появляется возможность построения единой матрицы P, обладающей свойством: последовательность столбцов $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ из (0.12) содержит в качестве своих элементов числители и знаменатели подходящих дробей $\frac{P_a}{Q_a} = \left(\frac{P_{a,1}}{Q_a}, \dots, \frac{P_{a,d}}{Q_a}\right)$ (0.4), сходящихся к α.

В универсальных алгоритмах (0.13) точка α может быть произвольной точкой с вещественными координатами. По этой причине в общем случае последовательность матриц $M_0, M_1, M_2, \dots$ (0.13) будет непериодической. Если же взять алгебраическую точку α, то в некоторых случаях удается получить периодическую последовательность таких матриц. Несколько упрощая ситуацию можно сказать, что в этом случае матрица Пизо P из равенства (0.3) есть ничто иное, как произведение матриц M_a, образующих полный период. В настоящей работе показано, как можно вычислить матрицу Пизо P, не используя ее явного разложения в произведение матриц M_a.

§1. Унимодулярный базисный симплекс

1.1. Линейные унимодулярные преобразования. Основной областью для нас будет замкнутый d-мерный *единичный симплекс* $\triangle_e =$

$\triangle_e^d$ с вершинами в точках

$$e_0 = (0, \ldots, 0), \quad e_1 = (1, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_d = (0, \ldots, 1)$$

из пространства $\mathbb{R}^d$.

Выделим в группе унимодулярных матриц $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ с определителем ± 1 *подгруппу* $G_0 = \mathrm{GL}_{d+1,0}(\mathbb{Z})$ из матриц

$$U = \begin{pmatrix} V & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где $V \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ и $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_d \end{pmatrix}$ – произвольный целочисленный столбец.

Группа G_0 действует на точки $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ из $\mathbb{R}^d$ по формуле

$$U\alpha = V\alpha + L, \tag{1.2}$$

где α рассматривается как столбец $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix}$. Таким образом, группа G_0 соответствует целочисленным унимодулярным преобразованиям пространства $\mathbb{R}^d$.

Точку α назовем *иррациональной*, если выполняется условие:

$$\text{*числа*} \quad 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d \quad \text{*линейно независимы над кольцом*} \quad \mathbb{Z}. \tag{1.3}$$

1.2. Унимодулярный симплекс.

Предложение 1.1. *Если α – иррациональная точка, то существует такая матрица $U \in G_0$, что выполняется включение*

$$\alpha \in \triangle_U^d, \tag{1.4}$$

где $\triangle_U^d = U \triangle_e^d$.

Доказательство. Выберем матрицу U' с блоком

$$V' = \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a'_{23} & \ldots & 0 & 0 \\ & & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a'_{d-1,d} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и столбцом L' с последним элементом $l'_d = 0$. Имеем

$$U'\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 + a'_{12}\alpha_2 + l'_1 \\ \alpha_2 + a'_{23}\alpha_3 + l'_2 \\ \dots \\ \alpha_{d-1} + a'_{d-1,2}\alpha_d + l'_{d-1} \\ \alpha_d \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Из иррациональности точки α следует, что пары чисел $\alpha_i, 1$ для всех $i = 2, \dots, d$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$. Поэтому в (1.5) найдутся такие целые числа a'_{ij} и l'_i, что у точки $\alpha' = U'\alpha = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_d \end{pmatrix}$ первые $d-1$ координат попадут в интервал $(0, 1/d)$. Далее выбираем матрицу U'' с блоком

$$V'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ a''_{d1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и столбцом L'' с элементами $l''_1 = 0, \dots, l''_{d-1} = 0$. Так как $\alpha'_d = \alpha_d$, то получаем

$$U''\alpha' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \dots \\ \alpha'_{d-1} \\ u''_{d1}\alpha'_1 + \alpha_d + l''_d \end{pmatrix},$$

где числа $\alpha'_1, 1$ снова линейно независимы над $\mathbb{Z}$. Поэтому можно подобрать целые числа u''_{d1} и l''_d с условием $u''_{d1}\alpha'_1 + \alpha_d + l''_d \in (0, 1/d)$ и, значит, точка $\alpha'' = U''\alpha'$ содержится

$$\alpha'' \in \triangle^d_e \tag{1.6}$$

в симплексе $\triangle^d_e$. Остается заметить, что матрица $U = (U''U')^{-1}$ принадлежит подгруппе G_0 и для нее в силу (1.6) будет выполняться включение (1.4). $\square$

Симплекс $\triangle^d_U$ из (1.4) назовем *базисным*. Его основное свойство состоит в том, что он является *унимодулярным*: векторы, выходящие из одной его вершины во все остальные вершины, образуют *унимодулярный базис*, т.е. некоторый базис кубической решетки $\mathbb{Z}^d$.

§2. Единицы алгебраических полей

2.1. Основные единицы. Рассмотрим вещественное алгебраическое поле

$$\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\theta) \subset \mathbb{R} \tag{2.1}$$

– алгебраическое расширение степени $d+1 = r+2c$ поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, где $r \geqslant 1$ и $2c$ обозначают число вещественных и комплексных сопряжений соответственно (подробности см., например, [19]). Выберем в $\mathbb{F}$ некоторую *полную систему основных единиц* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$, где $t = r + c - 1$. Они являются свободными образующими порождаемой ими *группы единиц* $\mathcal{E}$, имеющей максимально возможный *ранг* t. Зададим отображение

$$\varepsilon \quad \mapsto \quad x(\varepsilon) = (\ln|\varepsilon^{(1)}|, \ldots, \ln|\varepsilon^{(r)}|, 2\ln|\varepsilon^{(r+1)}|), \ldots, 2\ln|\varepsilon^{(r+c)}|) \tag{2.2}$$

множества единиц $\mathcal{E}$ в пространство $\mathbb{R}^{t+1}$, где $\varepsilon^{(1)}, \ldots, \varepsilon^{(r)}$ – вещественные сопряженные значения для ε и $\varepsilon^{(r+1)}, \ldots, \varepsilon^{(r+c)}$ – комплексные, при этом полагаем $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon$. Отображение (2.2) будет вложением $x : \mathcal{E} \hookrightarrow \mathbb{R}^{t+1}$ группы $\mathcal{E}$ в векторное пространство $\mathbb{R}^{t+1}$ с сохранением в них операций

$$x(\varepsilon \cdot \varepsilon') = x(\varepsilon) + x(\varepsilon'). \tag{2.3}$$

2.2. Единицы Пизо. Единицу $\zeta \in \mathcal{E}$ назовем *единицей Пизо*, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\zeta = \zeta^{(1)} > 1 \quad \text{и} \quad |\zeta^{(i)}| < 1 \quad \text{для остальных сопряжений} \quad i > 1. \tag{2.4}$$

Обозначим через $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$ подмножество всех единиц Пизо ζ из группы $\mathcal{E}$. Из определения (2.4) следует замкнутость множества $\mathcal{P}$ относительно умножения $\zeta \cdot \zeta' \in \mathcal{P}$ для любых $\zeta, \zeta' \in \mathcal{P}$. Поэтому множество $\mathcal{P}$ образует полугруппу без единицы, поскольку 1 не является единицей Пизо (2.4).

Предложение 2.1. 1. *Если ранг $t \geqslant 1$, то группа единиц $\mathcal{E}$ содержит единицу Пизо* (2.4) *и, значит, $\mathcal{P} \neq \emptyset$.*

2. *Любая единица Пизо $\zeta \in \mathcal{P}$ имеет степень*

$$\deg(\zeta) = d + 1. \tag{2.5}$$

Здесь степень $\deg(\zeta)$ числа ζ определяется равенством $\deg(\zeta) = \deg \mathbb{Q}(\zeta)$, где справа указана степень $\deg \mathbb{Q}(\zeta) = [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$ расширения $\mathbb{Q}(\zeta)$ над полем $\mathbb{Q}$.

Доказательство. 1. Из определения отображения (2.2) следует, что образ $x(\mathcal{E})$ группы единиц $\mathcal{E}$ содержится в гиперплоскости

$$P \quad = \{x \in \mathbb{R}^{t+1}; \quad \mathbf{n} \cdot x = 0\}, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{n} \cdot x$ – скалярное произведение x с вектором $\mathbf{n} = (1, \dots, 1)$ размерности $t+1$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot x(\varepsilon) \quad &= \ln|\varepsilon^{(1)}| + \dots + \ln|\varepsilon^{(r)}| + 2\ln|\varepsilon^{(r+1)}|) + \dots + 2\ln|\varepsilon^{(r+c)}| \\ &= \ln(|\varepsilon^{(1)} \cdots \varepsilon^{(r)}| \cdot |\varepsilon^{(r+1)}|^2 \cdots |\varepsilon^{(r+c)}|^2) = \ln|\mathrm{Norm}_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\varepsilon)|,\end{aligned}$$

где $\mathrm{Norm}_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\varepsilon) = \pm 1$ – норма единицы ε. Следовательно, выполняется условие

$$\mathbf{n} \cdot x(\varepsilon) = 0 \tag{2.7}$$

для всех единиц $\varepsilon \in \mathcal{E}$.

Поскольку $x : \mathcal{E} \hookrightarrow \mathbb{R}^{t+1}$ – вложение, то в силу свойства (2.7) множество единиц $\mathcal{E}$ также вкладывается $x : \mathcal{E} \hookrightarrow P$ в гиперплоскость (2.6) и образует на ней ввиду сохранения операций (2.3) *полную решетку* [19]

$$x(\mathcal{E}) \subset P \tag{2.8}$$

размерности t с базисом $x(\varepsilon_1), \dots, x(\varepsilon_t)$ над кольцом $\mathbb{Z}$, также являющимся, но уже над полем $\mathbb{R}$, базисом t-мерного подпространства $P \subset \mathbb{R}^{t+1}$.

Выделим на гиперплоскости P бесконечный *конус* $\angle P \subset P$ с ребрами, имеющими направления $(1, -1, 0, \dots, 0), \dots,$ $(1, 0, 0, \dots, -1)$. Данный конус является открытым выпуклым и имеет размерность $\dim \angle P = t$. Следовательно, в силу полноты (2.8) решетки $x(\mathcal{E})$ будем иметь

$$x(\mathcal{E}) \cap \angle P \neq \emptyset. \tag{2.9}$$

Используя (2.9) можем найти такую единицу $\varepsilon \in \mathcal{E}$, чей образ $x(\varepsilon)$ принадлежит конусу $\angle P$. Тогда из определения конуса $\angle P$ и (2.4) следует, что данная ε будет единицей Пизо $\varepsilon = \zeta \in \mathcal{P}$. Таким образом, доказано $\mathcal{P} \neq \emptyset$.

2. Если некоторая единица Пизо $\zeta \in \mathcal{P}$ имеет степень $\deg(\zeta) < d+1$, то она будет равна

$$\zeta = \zeta^{(i)} \tag{2.10}$$

одной из своих сопряженных $\zeta^{(i)}$ для $i > 1$. Но по определению (2.4) единиц Пизо равенство (2.10) не возможно, что доказывет второе утверждение (2.5). $\square$

§3. Модульные матрицы Пизо

3.1. Модули. Пусть $\zeta \in \mathcal{P}$ – единица Пизо (2.4). По предложению 2.1 ее степени $1, \zeta, \ldots, \zeta^d$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Поэтому алгебраическое поле $\mathbb{Q}(\zeta)$ совпадает

$$\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{F} \tag{3.1}$$

с полем (2.1) и *модуль*

$$\mathcal{M}_\zeta = \mathbb{Z}[1, \zeta, \ldots, \zeta^d] \tag{3.2}$$

над кольцом $\mathbb{Z}$ будет полным, т.е. числа $1, \zeta, \ldots, \zeta^d$ образуют базис поля $\mathbb{F}$ над $\mathbb{Q}$.

Рассмотрим линейное отображение

$$\mathcal{M}_\zeta \xrightarrow{\zeta} \mathcal{M}_\zeta : \quad x \mapsto \zeta \cdot x. \tag{3.3}$$

Из определения (3.2) вытекает, что отображение (3.3) задает автоморфизм модуля $\mathcal{M}_\zeta$. Поскольку $1, \zeta, \ldots, \zeta^d$ – базис модуля $\mathcal{M}_\zeta$, то найдется квадратная целочисленная матрица U_ζ размера $d+1$, удовлетворяющая условию

$$U_\zeta \widehat{\zeta} = \zeta \cdot \widehat{\zeta}, \tag{3.4}$$

где слева записано произведение матрицы U_ζ и столбца

$$\widehat{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta^d \\ \vdots \\ \zeta \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

высоты $d+1$. Матрица U_ζ называется *матрицей предствления* элемента ζ в базисе $1, \zeta, \ldots, \zeta^d$.

3.2. Матрицы Фробениуса. Выпишем для единицы ζ ее *минимальный многочлен*

$$f_\zeta(x) = x^{d+1} + a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{3.6}$$

имеющий целые коэффициенты a_i. Его свободный член $a_0 = \pm 1$, так как он равен $a_0 = (-1)^{d+1}\mathrm{Norm}_{\mathbb{F}/\mathbb{Q}}(\zeta)$, где норма единицы $\mathrm{Norm}_{\mathbb{F}/\mathbb{Q}}(\zeta) = \pm 1$. Многочлен $f_\zeta(x)$ имеет разложение

$$f_\zeta(x) = (x - \zeta^{(1)})(x - \zeta^{(2)}) \cdots (x - \zeta^{(d+1)}), \tag{3.7}$$

где корни $\zeta = \zeta^{(1)}$ и $\zeta^{(i)}$ для $i > 1$ все различные и удовлетворяют условиям (2.4). Принимая во внимание (3.6), можем матрицу предствления U_ζ из (3.4) записать в явном виде

$$U_\zeta = \begin{pmatrix} -a_d & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Матрица U_ζ принадлежит *группе унимодулярных матриц* $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ – целочисленных квадратных матриц порядка $d+1$ с определителем ± 1. Построенная по многочлену $f_\zeta(x)$ из (3.6) матрица (3.8) называется *матрицей Фробениуса*. Такая матрица имеет характеристический многочлен

$$\mathrm{ch}_\zeta(x) = f_\zeta(x). \tag{3.9}$$

3.3. Матрица перехода T. Пусть

$$\mathcal{M}_\alpha = \mathbb{Z}[1, \alpha_1, \dots, \alpha_d] \tag{3.10}$$

– произвольный полный модуль над кольцом $\mathbb{Z}$ в поле $\mathbb{F}$. Точку $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ и соответствующий набор чисел $\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$, обладающие свойством (3.10), будем называть *полными*. Для полной точки α характерно выполнение соотношения

$$\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}(\alpha) \tag{3.11}$$

между $\mathbb{Q}[\alpha]$ – модулем (3.10) и $\mathbb{Q}(\alpha)$ – расширением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ добавлением к нему чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_d$. Из (3.1) и (3.10), в частности, следует иррациональность (1.3) точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, а из (3.11) – равенство $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{F}$. Определим для точки α ее *степень*

$$\deg \alpha = \deg \mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q} = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \tag{3.12}$$

над полем $\mathbb{Q}$. Если α – полная точка, то из (3.1) и (3.10) следует $\deg \alpha = d + 1$.

Далее, пусть T – *матрица перехода*

$$\widehat{\alpha} = T\widehat{\zeta} \tag{3.13}$$

от базиса полного модуля $\mathcal{M}_\zeta$ к базису модуля $\mathcal{M}_\alpha$. Здесь столбец $\widehat{\alpha}$ определяется по модулю $\mathcal{M}_\alpha$ добавлением единицы

$$\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Матрица перехода T имеет рациональные коэффициенты. Кроме того, поскольку модуль $\mathcal{M}_\alpha$ также полный, то матрица T обратима и, значит, $T \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Q})$.

3.4. Модульные матрицы. Воспользуемся (3.13) и подставим $\widehat{\zeta} = T^{-1}\widehat{\alpha}$ в равенство (3.4). Имеем

$$U_\zeta T^{-1}\widehat{\alpha} = \zeta \cdot T^{-1},$$

откуда для столбца $\widehat{\alpha}$ выводим равенство

$$M_\alpha \widehat{\alpha} = \zeta \cdot \widehat{\alpha} \tag{3.15}$$

с рациональной матрицей

$$M_\alpha = T U_\zeta T^{-1}, \tag{3.16}$$

сопряженной унимодулярной матрице U_ζ. Для модуля $\mathcal{M}_\alpha$ из (3.10) матрицу, обладающую свойством (3.15), назовем *модульной матрицей.*

3.5. Унимодулярные модульные матрицы. *Уровень*

$$l(T) = t \tag{3.17}$$

невырожденной рациональной матрицы T определяется как наименьшее натуральное число t с условием, что $T^* = t \cdot T^{-1}$ – целочисленная матрица.

Нам потребуется еще *показатель* $\nu_a(U_\zeta) = \nu$ унимодулярной матрицы U_ζ по модулю t – это такое наименьшее натуральное число ν, для которого выполняется сравнение

$$U_\zeta^\nu \equiv E \bmod t, \tag{3.18}$$

где $E = E_{d+1}$ – единичная матрица размера $d+1$. Указанное число ν существует и не превышает порядка конечной группы $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})$ матриц над кольцом вычетов $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ с определителем $\det \equiv \pm 1 \bmod t$.

Проведем следующие вычисления с матрицей M_α из (3.16). В силу (3.18) последовательно находим

$$aM_\alpha^\nu \quad \equiv \quad TU_\zeta^\nu T^* \quad \equiv \quad TT^* = tE \quad \equiv \quad 0 \mod t,$$

т.е. $tM_\alpha^\nu = tM$, где M – целочисленная матрица. Поэтому матрица $M_\alpha^\nu = M$ целая и ее определитель по (3.16) равен

$$\det M_\alpha^\nu = \det(TU_\zeta^\nu T^{-1}) = \det(U_\zeta)^\nu = \pm 1.$$

Отсюда следует, что при такой степени ν матрица $U_\alpha = M_\alpha^\nu$ будет унимодулярной. Для нее будем использовать обозначение

$$\mathrm{P}_\alpha = M_\alpha^\nu. \tag{3.19}$$

Предложение 3.1. *Пусть* $\mathcal{M}_\alpha$ *– произвольный полный модуль* (3.10) *из поля* $\mathbb{F}$ *и* P_α *– унимодулярная матрица* (3.19). *Тогда имеет место равенство*

$$\mathrm{P}_\alpha \widehat{\alpha} = \lambda \cdot \widehat{\alpha}, \tag{3.20}$$

где $\widehat{\alpha}$ *– столбец* (3.14) *и* $\lambda = \zeta^\nu > 1$ *– единица Пизо* (2.4).

Доказательство вытекает из (3.19), равенства (3.15) и условия, что $\zeta > 1$ – единица Пизо (2.4). □

Матрицу P_α из (3.20) назовем *модульной матрицей Пизо* или кратко – *матрицей Пизо*.

§4. Аппроксимация

4.1. Разложение модульной матрицы Пизо. Для столбцов $\widehat{\alpha}$ из (3.14) и $\widehat{\zeta}$ из (3.5) определим квадратные матрицы

$$A = (\widehat{\alpha}^{(1)} \dots \widehat{\alpha}^{(d+1)}), \quad Z = (\widehat{\zeta}^{(1)} \dots \widehat{\zeta}^{(d+1)}) \tag{4.1}$$

– порядка $d+1$. Матрица Z невырождена и в силу равенства (3.13) можем записать

$$A = TZ. \tag{4.2}$$

Поэтому матрица A также невырождена и, следовательно, ее столбцы образуют базис (A-базис) в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$.

Пусть P_α – модульная матрица Пизо. Из (3.20) получаем

$$\mathrm{P}_\alpha A \quad = (\lambda^{(1)} \widehat{\alpha}^{(1)} \dots \lambda^{(d+1)} \widehat{\alpha}^{(d+1)}) \quad = A\Lambda,$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & \lambda^{(d+1)} \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Отсюда для матрицы P_α выводим разложение

$$\mathrm{P}_\alpha = A\Lambda A^{-1}. \tag{4.4}$$

4.2. Линейные отображения модульной матрицей Пизо. Для произвольного вектора $x \in \mathbb{R}^d$ соответствующий ему столбец $\widehat{x}$ разложим

$$\widehat{x} = Ax' \tag{4.5}$$

по A-базису, где $x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_{d+1} \end{pmatrix}$. Используя разложения (4.4) и (4.5), имеем

$$\mathrm{P}^a_\alpha \widehat{x} \quad = A\Lambda^a A^{-1}\widehat{x} \quad = A\Lambda^a x' \quad = A \begin{pmatrix} \lambda^a_1 x'_1 \\ \vdots \\ \lambda^a_{d+1} x'_{d+1} \end{pmatrix},$$

где обозначили $\lambda_j = \lambda^{(j)}$. Теперь умножая на матрицу A, окончательно получаем формулу

$$P^a_\alpha \widehat{x} \quad = \begin{pmatrix} \Lambda^a_1 \\ \vdots \\ \Lambda^a_d \\ \Lambda^a_{d+1} \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\lambda^a_1 x'_1 + \dots + \alpha_{1,d+1}\lambda^a_{d+1} x'_{d+1} \\ \dots \\ \alpha_{d1}\lambda^a_1 x'_1 + \dots + \alpha_{d,d+1}\lambda^a_{d+1} x'_{d+1} \\ \lambda^a_1 x'_1 + \dots + \lambda^a_{d+1} x'_{d+1} \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

где Λ^a_i – линейные формы от $\lambda^a_1, \dots, \lambda^a_{d+1}$ и α_{ij} – коэффициенты матрицы $A = (\alpha_{ij})$. Из определения (4.1) следует

$$\alpha_{11} = \alpha_1, \quad \dots, \quad \alpha_{d1} = \alpha_d \tag{4.7}$$

равны коэффициентам столбца $\widehat{\alpha}$ из (3.14); и у матрицы A коэффициенты последней строки $\alpha_{d+1,j} = 1$ для всех $j = 1, \dots, d+1$. Из последних равенств вытекает вид формы Λ^a_{d+1}.

4.3. Дробно-линейные преобразования. Определим дробно-линейные преобразования в пространстве $\mathbb{R}^d$. Если $M = (a_{ij})$ – вещественная квадратная матрица порядка $d+1$ и $x \in \mathbb{R}^d$, то полагаем

$$M\langle x\rangle = \left(\frac{\lambda_1(M,x)}{\lambda_{d+1}(M,x)}, \dots, \frac{\lambda_d(M,x)}{\lambda_{d+1}(M,x)}\right), \tag{4.8}$$

где

$$\lambda_i(M,x) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{id}x_d + a_{i,d+1}$$

– линейные неоднородные формы для $i = 1, \dots, d+1$. Преобразования (4.8) обладают свойством ассоциативности

$$M_1\langle M_2\langle x\rangle\rangle = (M_1 \cdot M_2)\langle x\rangle, \tag{4.9}$$

где через $M_1 \cdot M_2$ обозначено произведение матриц M_1 и M_2. Поскольку $E_{d+1}\langle x\rangle = x$ для единичной матрицы E_{d+1} порядка $d+1$, то из свойства (4.9) следует, что для $x \mapsto x' = M\langle x\rangle$ обратным отображением будет

$$x' \mapsto x = M^{-1}\langle x'\rangle. \tag{4.10}$$

Используя формулу (4.6) и определение (4.8), приходим к формуле

$$\mathrm{P}^a_\alpha\langle x\rangle = \left(\frac{\Lambda^a_1}{\Lambda^a_{d+1}}, \dots, \frac{\Lambda^a_d}{\Lambda^a_{d+1}}\right). \tag{4.11}$$

4.4. Оценка расстояния. Нас будет интересовать расстояние

$$|\alpha - \mathrm{P}^a_\alpha\langle x\rangle|_s = \left|\alpha_1 - \frac{\Lambda^a_1}{\Lambda^a_{d+1}}\right| + \dots + \left|\alpha_d - \frac{\Lambda^a_d}{\Lambda^a_{d+1}}\right| \tag{4.12}$$

между точкой

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \tag{4.13}$$

и точкой $\mathrm{P}^a_\alpha\langle x\rangle$ из (4.11). Принимая во внимание (4.6) и (4.7), имеем

$$\begin{aligned} \left|\alpha_i - \tfrac{\Lambda^a_i}{\Lambda^a_{d+1}}\right| &= \left|\alpha_i - \tfrac{\alpha_i\lambda^a_1 x'_1 + \dots + \alpha_{i,d+1}\lambda^a_{d+1}x'_{d+1}}{\lambda^a_1 x'_1 + \dots + \lambda^a_{d+1}x'_{d+1}}\right| \\ &= \left|\tfrac{(\alpha_i - \alpha_{i2})\lambda^a_2 x'_2 + \dots + (\alpha_i - \alpha_{i,d+1})\lambda^a_{d+1}x'_{d+1}}{\lambda^a_1 x'_1 + \dots + \lambda^a_{d+1}x'_{d+1}}\right| \\ &= \left(\tfrac{|\lambda_2|}{\lambda_1}\right)^a c_{\alpha,x,i}(a). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Здесь использовали сокращение

$$c_{\alpha,x,i}(a)$$
$$= \left|\frac{(\alpha_i-\alpha_{i2})x'_2+(\alpha_i-\alpha_{i,3})\lambda_3^{''a}x'_3+\cdots+(\alpha_i-\alpha_{i,d+1})\lambda_{d+1}^{''a}x'_{d+1}}{x'_1+\lambda_2^{'a}x'_2+\cdots+\lambda_{d+1}^{'a}x'_{d+1}}\right|, \tag{4.15}$$

где обозначили $\lambda_j^{'}=\lambda_j/\lambda_1$ для $j=2,\ldots,d+1$ и $\lambda_j^{''}=\lambda_j/\lambda_2$ для $j=3,\ldots,d+1$.

Не уменьшая общности, будем предполагать $|\lambda_2|=\lambda_{2,\max}$, где

$$\lambda_{2,\max}=\max_{2\leqslant j\leqslant d+1}|\lambda_j|=\max_{2\leqslant j\leqslant d+1}|\lambda^{(j)}|. \tag{4.16}$$

При таком предположении выполняются неравенства $|\lambda_j^{''}|\leqslant 1$.

Оценим сверху числитель y_i и снизу знаменатель z_i у дроби в (4.15). Для всех $i=1,\ldots,d+1$ имеет место общее неравенство

$$|y_i| \quad\leqslant\quad 2\,|A|_{\max}|x'|_s, \tag{4.17}$$

где

$$|A|_{\max}=\max_{1\leqslant i,j\leqslant d+1}|\alpha_{ij}| \tag{4.18}$$

– max-*норма* матрицы A. При оценке знаменателя z_i учтем, что

$$|\lambda_j^{'}|\leqslant\lambda_{2,\max}/\lambda_1<1.$$

Поэтому

$$|\lambda_2^{'a}x'_2+\cdots+\lambda_{d+1}^{'a}x'_{d+1}|\leqslant\Big(\frac{\lambda_{2,\max}}{\lambda_1}\Big)^a|x'|_s. \tag{4.19}$$

Начиная с этого места, будем предполагать выполненным условие

$$x'_1\neq 0. \tag{4.20}$$

Если степень a выбрать так, чтобы имело место неравенство

$$\Big(\frac{\lambda_{2,\max}}{\lambda_1}\Big)^a|x'|_s\leqslant\frac{1}{2}|x'_1|,$$

равносильное

$$a\geqslant\ln\frac{2|x'|_s}{|x'_1|}\Big/\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_{2,\max}}, \tag{4.21}$$

то знаменатель z_i дроби в (4.15) будет удовлетворять неравенству

$$|z_i|\geqslant\frac{1}{2}|x'_1|. \tag{4.22}$$

Собирая вместе (4.15), (4.17) и (4.22) получаем оценку

$$c_{\alpha,x,i}(a) \leqslant 4\,|A|_{\max}\frac{|x'|_s}{|x'_1|} \tag{4.23}$$

при выполнении условия (4.21).

Предложение 4.1. *Пусть точка $x \in \mathbb{R}^d$ имеет первую координату $x'_1 \neq 0$ в A-базисе* (4.5) *и степень a удовлетворяет неравенству*

$$a \geqslant l_\alpha(x), \tag{4.24}$$

где через $l_\alpha(x)$ обозначена правая часть неравенства (4.21). *Тогда расстояние между точкой α из* (4.13) *и образом $\mathrm{P}^a_\alpha\langle x\rangle$ точки x из* (4.11) *относительно дробно-линейного преобразования с модульной матрицей Пизо P_α из* (3.20) *оценивается как*

$$|\alpha - \mathrm{P}^a_\alpha\langle x\rangle|_s \leqslant c_{\alpha,x}\Big(\frac{\lambda_{2,\max}}{\lambda_1}\Big)^a. \tag{4.25}$$

Здесь константа

$$c_{\alpha,x} = 4d\,|A|_{\max}\frac{|x'|_s}{|x'_1|} \tag{4.26}$$

не зависит от степени a и $\lambda_{2,\max}$ определено в (4.16).

Доказательство следует из формул (4.12), (4.14) и неравенства (4.23). □

§5. Минимальные симплексы

5.1. Минимальные рациональные симплексы. Пусть открытый d-мерный симплекс $\mathbf{s}$ имеет рациональные вершины

$$\frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i} = \Big(\frac{\mathbf{P}_{i1}}{\mathbf{Q}_i}, \dots, \frac{\mathbf{P}_{id}}{\mathbf{Q}_i}\Big) \tag{5.1}$$

для $i = 0, 1, \dots, d$ с условием

$$\mathbf{Q}_i > 0, \quad \text{НОД}\,(\mathbf{P}_{i1}, \dots, \mathbf{P}_{id}, \mathbf{Q}_i) = 1. \tag{5.2}$$

Назовем $\mathbf{s}$ *минимальным симплексом*, если он не содержит

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} \notin \mathbf{s} \tag{5.3}$$

никакой точки

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} = \Big(\frac{\mathbf{P}_1}{\mathbf{Q}}, \dots, \frac{\mathbf{P}_d}{\mathbf{Q}}\Big), \tag{5.4}$$

координаты которой имеют общий знаменатель $1 \leqslant \mathbf{Q} < \mathbf{Q}_{\max}$, где использовали обозначение

$$\mathbf{Q}_{\max} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 + \cdots + \mathbf{Q}_d. \tag{5.5}$$

Предложение 5.1. *Следующие утверждения равносильны:*

1) *симплекс* $\mathbf{s}$ *минимальный;*

2) *матрица*

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{11} & \ldots & \mathbf{P}_{d1} \\ & & \ldots & \\ \mathbf{P}_{0d} & \mathbf{P}_{1d} & \ldots & \mathbf{P}_{dd} \\ \mathbf{Q}_0 & \mathbf{Q}_1 & \ldots & \mathbf{Q}_d \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

унимодулярна;

3) *симплекс* $\mathbf{s}$ *имеет объем*

$$\operatorname{vol} \mathbf{s} = \frac{1}{d!}\Big(\prod_{0 \leqslant i \leqslant d} \mathbf{Q}_i\Big)^{-1}. \tag{5.7}$$

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Множество

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\} \tag{5.8}$$

из векторов $\mathbf{v}_i$ с координатами из столбцов матрицы (5.6) образует целочисленный базис пространства $\mathbb{R}^{d+1}$ и порождает некоторую полную подрешетку $\mathbf{L} \subset \mathbb{Z}^{d+1}$. Кроме того, базис $\mathbf{V}$ определяет бесконечный открытый конус $\angle\mathbf{V}$, состоящий из точек вида

$$x = x_0\mathbf{v}_0 + x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_d\mathbf{v}_d, \tag{5.9}$$

где $x_i > 0$ – вещественные коэффициенты. Если базис (5.8) неунимодулярный, то индекс $[\mathbb{Z}^{d+1} : \mathbf{L}] \geqslant 2$ и замыкание $\mathbf{F}^c$ фундаментальной области $\mathbf{F} \subset \angle\mathbf{V}$ решетки $\mathbf{L}$ содержит целочисленную точку $\mathbf{x} = (\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_d, \mathbf{Q})$ с координатами $0 < x_i \leqslant 1$, хотя бы одна из которых $x_j < 1$. Поэтому

$$\mathbf{x} \in \angle\mathbf{V} \quad \text{и} \quad 0 < \mathbf{Q} < \mathbf{Q}_{\max}. \tag{5.10}$$

Зададим следующие проекции

$$\mathrm{pr}_1 : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \\ x_{d+1} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1/x_{d+1} \\ \vdots \\ x_d/x_{d+1} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

и

$$\mathrm{pr}:\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \\ x_{d+1} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1/x_{d+1} \\ \vdots \\ x_d/x_{d+1} \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

множества векторов $\mathbb{R}_*^{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ с координатой $x_{d+1} \neq 0$ соответственно на гиперплоскость $\mathbb{R}_1^{d+1}$ и пространство $\mathbb{R}^d$. Имеем

$$\mathrm{pr}_1 \angle \mathbf{V} = \mathbf{s}_1, \tag{5.13}$$

где $\mathbf{s}_1$ – симплекс на гиперплоскости $\mathbb{R}_1^{d+1}$ с проекцией

$$\mathrm{pr}\,\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}. \tag{5.14}$$

Из включения в (5.10) и равенств (5.13), (5.14) следует

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} \in \mathbf{s}. \tag{5.15}$$

Включение (5.15) вместе с неравенством из (5.10) противоречит условию (5.3) минимальности симплекса $\mathbf{s}$.

2) $\Rightarrow$ 1). Обратно, пусть

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} \in \mathbf{s} \tag{5.16}$$

удовлетворяет условиям (5.2). Тогда $\mathbf{x} = (\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_d, \mathbf{Q})$ – целочисленная (примитивная) точка из конуса $\angle \mathbf{V}$. Унимодулярность матрицы $\mathbf{S}$ из (5.6) означает унимодулярнсть базиса $\mathbf{V}$ из (5.8). Из этого следует, что $\mathbf{x}$ имеет разложение

$$\mathbf{x} = x_0 \mathbf{v}_0 + x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_d \mathbf{v}_d \tag{5.17}$$

относительно базиса $\mathbf{V}$ с целыми коэффициентами $x_i \geqslant 1$. Отсюда получаем неравенство

$$\mathbf{Q} \geqslant \mathbf{Q}_{\max}. \tag{5.18}$$

Заметим – это пригодится нам в дальнейшем –, что равенство в (5.18) возможно только в случае

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1, \dots, \quad x_d = 1. \tag{5.19}$$

Из (5.16) и (5.18) следует 1).

2) $\Rightarrow$ 3). Рассмотрим базис $\mathbf{V}$ как симплекс, имеющий ребра из $\mathbf{V}$. Подействуем на этот симплекс проекцией (5.11). Получим

$$\mathrm{pr}_1 \mathbf{V} = \mathbf{s}_1 \tag{5.20}$$

– симплекс (5.13) с объемом

$$\operatorname{vol}\mathbf{s}_1 = \frac{1}{d!}\Big(\prod_{0\leqslant i\leqslant d}\mathbf{Q}_i\Big)^{-1}. \tag{5.21}$$

Симплекс $\mathbf{s}_1$ имеет своим основанием симплекс $\mathbf{s}$ и единичную высоту. Поэтому у данных симплексов равны их объемы

$$\operatorname{vol}\mathbf{s}_1 = \operatorname{vol}\mathbf{s}. \tag{5.22}$$

Из (5.21) и (5.22) выводим равенство (5.7).

3) $\Rightarrow$ 2). Обращая рассуждения (5.20)-(5.22) убеждаемся, что параллелепипед с ребрами из $\mathbf{V}$ имеет единичный объем, откуда вытекает унимодулярность матрицы $\mathbf{S}$ из (5.6).

Эквивалентность утверждений 1), 2) и 3) доказана. □

5.2. Точка Фарея. Рассматриваемый здесь минимальный симплекс $\mathbf{s}$ имеет рациональные вершины (5.1). Следуя аналогии с отрезками Фарея [1], симметризуем данные вершины, используя операцию сложения Фарея для дробей. В результате получим точку Фарея, содержащуюся в симплексе $\mathbf{s}$.

Следствие 5.1. *Минимальный симплекс* $\mathbf{s}$ *содержит*

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} \in \mathbf{s} \tag{5.23}$$

единственную точку $\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{P}_{\max}}{\mathbf{Q}_{\max}}$ *со знаменателем* $1 \leqslant \mathbf{Q} \leqslant \mathbf{Q}_{\max}$ *и, значит, – единственную точку со знаменателем* $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{\max}$*, где значение* $\mathbf{Q}_{\max}$ *было определено в* (5.5).

Доказательство. Пусть симплекс $\mathbf{s}$ имеет вершины $\frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i}$, где $i = 0, 1, \dots, d$, вида (5.1), (5.2). Определим сумму вершин

$$\frac{\mathbf{P}_0}{\mathbf{Q}_0}\widehat{+}\frac{\mathbf{P}_1}{\mathbf{Q}_1}\widehat{+}\dots\widehat{+}\frac{\mathbf{P}_d}{\mathbf{Q}_d} \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{P}_0+\mathbf{P}_1+\dots+\mathbf{P}_d}{\mathbf{Q}_0+\mathbf{Q}_1+\dots+\mathbf{Q}_d}, \tag{5.24}$$

используя операцию *сложения Фарея* дробей

$$\frac{a}{b}\widehat{+}\frac{c}{d} = \frac{a+b}{c+d}. \tag{5.25}$$

Точка $\frac{\mathbf{P}_{\max}}{\mathbf{Q}_{\max}}$, о которой идет речь в доказываемом следствии, определяется как сумма Фарея

$$\frac{\mathbf{P}_{\max}}{\mathbf{Q}_{\max}} = \frac{\mathbf{P}_0}{\mathbf{Q}_0}\widehat{+}\frac{\mathbf{P}_1}{\mathbf{Q}_1}\widehat{+}\dots\widehat{+}\frac{\mathbf{P}_d}{\mathbf{Q}_d}. \tag{5.26}$$

Поэтому $\frac{\mathbf{P}_{\max}}{\mathbf{Q}_{\max}}$ назовем *точкой Фарея.* Из (5.17) и (5.19) следует, что это единственная точка $\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}}$ со знаменателем $1 \leqslant \mathbf{Q} \leqslant \mathbf{Q}_{\max}$, содержащаяся в минимальном симплексе $\mathbf{s}$. $\square$

5.3. Унимодулярные преобразования симплексов. Пусть $U \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ – унимодулярная матрица. Подействуем дробно-линейным преобразованием (4.8) с матрицей U на вершины $\frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i}$ для $i = 0, 1, \ldots, d$ минимального симплекса $\mathbf{s}$. Для вычислений воспользуемся формулой коммутирования

$$U\left\langle \frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i} \right\rangle = \mathrm{pr}\, U\mathbf{v}_i, \tag{5.27}$$

где pr – проекция (5.12) и $\mathbf{v}_i$ – целочисленные векторы с координатами из столбцов матрицы (5.6), при этом проекции векторов $\mathrm{pr}\, U\mathbf{v}_i$ справа в (5.27) отождествляются с точками – концами этих векторов. Еще отождествим симплекс $\mathbf{s}$ с его вершинами $\frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i}$. Тогда перенося равенство (5.27) на весь симплекс $\mathbf{s}$, можем записать

$$U\langle \mathbf{s} \rangle = \mathrm{pr}\, U\mathbf{V}. \tag{5.28}$$

Здесь $\mathbf{V}$ обозначает целочисленный базис (5.8).

Предложение 5.2. *Пусть* $\mathbf{s}$ *– минимальный симплекс* (5.1)–(5.3)*, имеющий вершины* $\frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i}$ *для* $i = 0, 1, \ldots, d$ *и* $U \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ *– унимодулярная матрица. Далее, пусть для всех вершин выполняются условия*

$$\lambda_{d+1}\Big(U, \frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i}\Big) \neq 0, \tag{5.29}$$

где $\lambda_{d+1}(U, x)$ *– линейная форма из* (4.8)*. Тогда при указанных условиях симплекс* $U\langle \mathbf{s} \rangle$ *снова будет минимальным.*

Доказательство. Поскольку $\mathbf{s}$ является минимальным симплексом, то по условию 2) предложения 5.1 базис $\mathbf{V}$ унимодулярный. Но тогда преобразованный базис $U\mathbf{V}$ также будет унимодулярным или, что равносильно, связанная с ним матрица $U\mathbf{S}$ из (5.6) унимодулярна. Поэтому элементы во всех ее столбцах являются взаимно простыми числами.

Пусть $(U\mathbf{V})_\pm$ – матрица, получающаяся из матрицы $U\mathbf{V}$ умножением ее столбцов на -1, в которых нижние элементы отрицательны.

Измененная указанным образом матрица $(U\mathbf{V})_\pm$ останется унимодулярной, но в силу неравенств (5.29) будет иметь положительную нижнюю строку. При этом формула связи (5.28) сохранится

$$U\langle \mathbf{s}\rangle = \mathrm{pr}\ (U\mathbf{V})_\pm. \tag{5.30}$$

Из формулы (5.30) следует выполнимость условий (5.2), и тогда по предложению 5.1 симплекс $U\langle \mathbf{s}\rangle$ является минимальным. □

Унимодулярные матрицы $U \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$, для которых выполняются условия (5.29) для всех вершин $\frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i}$ симплекса $\mathbf{s}$ назовем *допустимыми*.

§6. Симплексы Пизо

6.1. Базисный симплекс. Выберем в качестве $\mathbf{s}$ *базисный симплекс*

$$\triangle = \triangle_U^d \tag{6.1}$$

из предложения 1.1. Он имеет целочисленные вершины

$$v_i = Ue_i = \frac{P_i}{Q_i}, \tag{6.2}$$

где полагаем $Q_i = 1$ для всех $i = 0, 1, \ldots, d$. Векторы

$$v_i' = v_i - v_0 = Ve_i \tag{6.3}$$

для $i = 1, \ldots, d$ с матрицей $V \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ образуют унимодулярный базис. Поэтому симплекс (6.1) имеет объем

$$\mathrm{vol}\,\triangle = \frac{1}{d!}. \tag{6.4}$$

Из этого равенства и предложения 5.1 следует, что симплекс $\triangle$ будет минимальным.

6.2. Симплексы Пизо. Подействуем на симплекс $\triangle$ дробно-линейным преобразованием $\mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle$, где $a = 1, 2, 3, \ldots$, с матрицей Пизо P_α из (3.20). Чтобы исследовать новый симплекс, воспользуемся формулой связи

$$\mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle = \mathrm{pr}\ \mathrm{P}_\alpha^a V \tag{6.5}$$

из (5.28). Здесь $V = \{\widehat{v}_0, \widehat{v}_1, \ldots, \widehat{v}_d\}$ обозначает целочисленный базис (5.8). Согласно (6.2) координаты векторов данного базиса образуют унимодулярную матрицу

$$S = \begin{pmatrix} P_{01} & P_{11} & \dots & P_{d1} \\ & & \dots & \\ P_{0d} & P_{1d} & \dots & P_{dd} \\ Q_0 & Q_1 & \dots & Q_d \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

Поскольку матрица Пизо P_α унимодулярная, то матрица

$$\mathrm{P}_\alpha^a S = \begin{pmatrix} P_{a,01} & P_{a,11} & \dots & P_{a,d1} \\ & & \dots & \\ P_{a,0d} & P_{a,1d} & \dots & P_{a,dd} \\ Q_{a,0} & Q_{a,1} & \dots & Q_{a,d} \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

также унимодулярная. Принимая во внимание формулу (4.6) и условие $Q_i = 1$, можем записать значения элементов нижней строки $Q_{a,i}$ матрицы $\mathrm{P}_\alpha^a S$ в явном виде

$$Q_{a,i} = \lambda_1^a v'_{i1} + \dots + \lambda_{d+1}^a v'_{i,d+1}, \tag{6.8}$$

где v'_{ij} – координаты вектора $\widehat{v}'_i$ из разложения

$$\widehat{v}_i = A\widehat{v}'_i \tag{6.9}$$

вектора $\widehat{v}_i$ по A-базису из (4.1).

Покажем, что

$$Q_{a,i} \neq 0 \tag{6.10}$$

для всех $i = 0, 1, \dots, d$ и достаточно больших значений степени a. С этой целью докажем, что координаты

$$v'_{i1} \neq 0. \tag{6.11}$$

Предположим противное $v'_{i1} = 0$. Тогда из формулы (4.6) следует, что $\mathrm{P}_\alpha^a \widehat{v}_i$ сходится

$$\mathrm{P}_\alpha^a \widehat{v}_i \to 0 \tag{6.12}$$

к нулевому вектору при $a \to +\infty$. Поскольку векторы $\mathrm{P}_\alpha^a \widehat{v}_i$ имеют целые координаты при любом a, то отсюда и (6.12) выводим $\mathrm{P}_\alpha^a \widehat{v}_i = 0$ для некоторой степени a. Но матрица P_α невырождена, поэтому вектор $\widehat{v}_i$ должен быть нулевым, что противоречит условию $\widehat{v}_i \neq 0$. Тем самым, неравенство (6.11) доказано.

Пусть степень a удовлетворяет неравенству

$$a \geqslant l_\alpha(v_i), \tag{6.13}$$

где

$$l_\alpha(v_i) = \ln \frac{2|v_i'|_s}{|v_{i1}'|} \Big/ \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_{2,\max}}.$$

Тогда в силу (6.8) и (6.11) (ср. (4.24)) для таких a будет иметь место неравенство (6.10) при фиксированном i. Если же степень a выбирать из условия

$$a \geqslant l_\alpha(\triangle), \tag{6.14}$$

где ввели новое обозначение

$$l_\alpha(\triangle) = \max_{0 \leqslant i \leqslant d} l_\alpha(v_i),$$

то неравенство (6.10) будет выполняться для всех $i = 0, 1, \ldots, d$.

Предложение 6.1. *Для степеней a, удовлетворяющих неравенству* (6.14), *симплексы* $\mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle$ *являются минимальными* (5.3)-(5.5).

Доказательство. В нашем случае неравенства (6.10) эквивалентны неравенствам (5.29). Поэтому применение предложения 5.2 показывет, что симплекс $\mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle$ будет минимальным. □

Назовем степени a, для которых выполняется условие (6.10), *допустимыми*, а отвечающие им $\mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle$ *симплексами Пизо.* Из предложения 6.1 следует, что если степень a удовлетворяет неравенству (6.14), то она является допустимой.

6.3. Рекуррентные последовательности. Пусть

$$v_a = \frac{P_a}{Q_a} = \Big(\frac{P_{a,1}}{Q_a}, \ldots, \frac{P_{a,d}}{Q_a}\Big) \tag{6.15}$$

– одна из вершин $v_{ai} = \frac{P_{a,i}}{Q_{a,i}}$ для $i = 0, 1, \ldots, d$ симплекса $P_\alpha^a\langle\triangle\rangle$. Вершине (6.15) поставим в соответствие целочисленный столбец

$$\mathbf{v}_a = \begin{pmatrix} P_{a1} \\ \vdots \\ P_{ad} \\ Q_a \end{pmatrix}. \tag{6.16}$$

Из формулы связи (5.30) следует равенство

$$\mathbf{v}_a = \mathrm{P}_\alpha^a \mathbf{v}_0 \tag{6.17}$$

для $a = 0, 1, 2, \ldots$, где v_0 – вершина базисного симплекса $\triangle$, определенного в (6.1).

Предложение 6.2. *Пусть матрица Пизо* P_α *имеет характеристический многочлен*

$$ch_{P_\alpha}(x) = \det(xE - \mathrm{P}_\alpha) = x^{d+1} - b_d x^d - \cdots - b_1 x - b_0. \qquad (6.18)$$

Тогда столбцы $\mathbf{v}_a$ *из* (6.17) *удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$\mathbf{v}_{a+d+1} = b_d \mathbf{v}_{a+d} + \cdots + b_1 \mathbf{v}_{a+1} + b_0 \mathbf{v}_a \qquad (6.19)$$

для $a = 0, 1, 2, \ldots$ *Начальные условия*

$$\mathbf{v}_d = \mathrm{P}_\alpha^d \mathbf{v}_0, \ldots, \quad \mathbf{v}_1 = \mathrm{P}_\alpha \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}_0 \qquad (6.20)$$

задаются матрицей Пизо P_α *из* (3.19) *и столбцом* $\mathbf{v}_0$ *из* (6.16).

Доказательство. По теореме Гамильтона-Кэли P_α удовлетворяет матричному уравнению

$$\mathrm{P}_\alpha^{d+1} - b_d \mathrm{P}_\alpha^d - \cdots - b_1 \mathrm{P}_\alpha - b_0 E = 0.$$

Перепишем его в виде

$$\mathrm{P}_\alpha^{d+1} = b_d \mathrm{P}_\alpha^d + \cdots + b_1 \mathrm{P}_\alpha + b_0 E.$$

Умножая данное равенство на столбец $\mathbf{v}_a$, получаем

$$\mathrm{P}_\alpha^{d+1} \mathbf{v}_a = b_d \mathrm{P}_\alpha^d \mathbf{v}_a + \cdots + b_1 \mathrm{P}_\alpha \mathbf{v}_a + b_0 \mathbf{v}_a. \qquad (6.21)$$

Теперь применяя к равенству (6.21) формулу (6.17), приходим к рекуррентной формуле (6.19), (6.20). $\square$

Если применить операцию сложения Фарея для дробей (5.25), то рекуррентное соотношение (6.19) можно применить

$$\frac{P_{a+d+1}}{Q_{a+d+1}} = \frac{b_d P_{a+d}}{b_d Q_{a+d}} \mathbin{\widehat{+}} \ldots \mathbin{\widehat{+}} \frac{b_1 P_{a+1}}{b_1 Q_{a+1}} \mathbin{\widehat{+}} \frac{b_0 P_a}{b_0 Q_a} \qquad (6.22)$$

непосредственно к рациональным вершинам $v_a = \frac{P_a}{Q_a}$ из (6.15). В этих терминах начальные условия (6.20) примут вид

$$v_d = \mathrm{pr}\, \mathrm{P}_\alpha^d \mathbf{v}_0, \quad \ldots, \quad v_1 = \mathrm{pr}\, \mathrm{P}_\alpha \mathbf{v}_0, \quad v_0 = \mathrm{pr}\, \mathbf{v}_0, \qquad (6.23)$$

где pr обозначает проекцию (5.12).

§7. Основные теоремы

Собранные вместе конструкции §§ 1-6 позволяют сформировать некоторый общий *алгоритм*

$$\mathcal{SM}: \quad \alpha \approx \tfrac{P_a}{Q_a} = \left(\tfrac{P_{a,1}}{Q_a}, \ldots, \tfrac{P_{a,d}}{Q_a}\right) \tag{7.1}$$

разложения в *многомерные цепные дроби* $\frac{P_a}{Q_a}$ из (6.15) полных точек $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ степени $\deg \alpha = d+1$, определенных в (3.10)–(3.12). Основными составляющими конструкции алгоритма (7.1) являются базовый симплекс $\triangle$ и модульные матрицы Пизо $\mathrm{P}_\alpha = M_\alpha^\nu$ из (3.19), в совокупности задающие геометрию приближений. Это побуждает назвать (7.1) *симплекс-модульным алгоритмом* или кратко – $\mathcal{SM}$-*алгоритмом.*

В этом разделе мы покажем, как применяя $\mathcal{SM}$-алгоритм можно получать приближения алгебраических иррациональностей α произвольной степени. Первый результат – чисто геометрический, касающийся наилучших приближений, второй – аналитический, содержащий оценки скорости данных приближений.

7.1. Геометрическая теорема. Симплекс Пизо $\mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle$ имеет рациональные вершины $v_{ai} = \frac{P_{a,i}}{Q_{a,i}}$ для $i = 0, 1, \ldots, d$. Согласно (5.26) данный симплекс содержит *точку Фарея*

$$\frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}} = \frac{P_{a,0}}{Q_{a,0}} \widehat{+} \frac{P_{a,1}}{Q_{a,1}} \widehat{+} \ldots \widehat{+} \frac{P_{a,d}}{Q_{a,d}}. \tag{7.2}$$

Из этого определения следует, что точки Фарея $\frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}$ для степеней $a = 0, 1, 2, \ldots$ также, как и вершины $\frac{P_{a,i}}{Q_{a,i}}$ симплекса Пизо $\mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle$, удовлетворяют

$$\frac{P_{a+d+1,\max}}{Q_{a+d+1,\max}} = \frac{b_d P_{a+d,\max}}{b_d Q_{a+d,\max}} \,\widehat{+} \ldots \,\widehat{+}\, \frac{b_1 P_{a+1,\max}}{b_1 Q_{a+1,\max}} \,\widehat{+}\, \frac{b_0 P_{a,\max}}{b_0 Q_{a,\max}} \tag{7.3}$$

– рекуррентному соотношению (6.22) с новыми *начальными условиями*

$$v_{d,\max} = \mathrm{pr}\mathrm{P}_\alpha^d \mathbf{v}_{\max}, \quad \ldots, \quad v_{1,\max} = \mathrm{pr}\mathrm{P}_\alpha \mathbf{v}_{\max}, \quad v_{0,\max} = \mathrm{pr}\mathbf{v}_{\max}, \tag{7.4}$$

где вектор $\mathbf{v}_{\max} = \mathbf{v}_{0,\max}$ определен равенством

$$\mathbf{v}_{\max} = \widehat{v}_0 + \widehat{v}_1 + \cdots + \widehat{v}_d. \tag{7.5}$$

Здесь v_i обозначают вершины (6.2) базисного симплекса $\triangle = \triangle_U^d$ из (6.1), а $\widehat{v}_i$ – соответствующие им векторы (3.14). В координатах вектор (7.5) запишется в виде

$$\mathbf{v}_{\max} = \begin{pmatrix} P_{01} \\ \vdots \\ P_{0d} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{11} \\ \vdots \\ P_{1d} \\ 1 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} P_{d1} \\ \vdots \\ P_{dd} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{7.6}$$

Теорема 7.1. *Если a – допустимая степень или, в частности, если $a \geqslant l_\alpha(\triangle)$, где $l_\alpha(\triangle)$ определено в* (6.14), *и $\mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle$ – отвечающий ей симплекс Пизо, то имеют место следующие утверждения.*

1. *Симплекс Пизо $\mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle$ обладает свойством минимальности (см. определение* (5.3)–(5.5)*):*

$$\frac{P}{Q} \notin \mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle, \tag{7.7}$$

если $1 \leqslant Q < Q_{a,\max}$; единственная точка

$$\frac{P}{Q} \in \mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle \tag{7.8}$$

со знаменателем $Q = Q_{a,\max}$ есть точка Фарея $\frac{P}{Q} = \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}$, определенная в (7.2).

2. *Выполняется неравенство*

$$\left|\alpha - \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}\right|_s \leqslant \max_{0\leqslant i\leqslant d} \left|\frac{P_{a,i}}{Q_{a,i}} - \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}\right|_s. \tag{7.9}$$

Доказательство. Свойства (7.7) и (7.8) вытекают из предложения 6.1 и следствия 5.1, а неравенство (7.9) – из свойств выпуклости и минимальности симплекса Пизо $\mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle$. □

7.2. Аналическая теорема. Теперь покажем, как используя результаты предложения 4.1 можно получать количественные оценки скорости приближений для $\left|\alpha - \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}\right|_s$ из (7.9).

Теорема 7.2. *Пусть степень a удовлетворяет неравенству*

$$a \geqslant l_{\alpha,\max}(\triangle). \tag{7.10}$$

Здесь

$$l_{\alpha,\max}(\triangle) = \max\{l_\alpha(v_{\max}), l_\alpha(\triangle)\}$$

в обозначениях (6.13) *и* (6.14); *и*

$$v'_{\max} = \begin{pmatrix} v'_{\max,1} \\ \vdots \\ v'_{\max,d+1} \end{pmatrix} \tag{7.11}$$

определяется из разложения $\widehat{v}_{\max} = Av'_{\max}$ *по* A*-базису* (4.1), *где* $v_{\max} = \mathrm{pr}\ \mathbf{v}_{\max}$ *– проекция вектора* (7.6); *кроме того,* $\lambda = \zeta^{\nu} > 1$, ζ *– единица Пизо* (2.4) *и* $0 < \lambda_{2,\max} < 1$ *определено в* (4.16). *Тогда при этом условии*:

1) *существует симплекс Пизо* $\mathrm{P}^{a}_{\alpha}\langle\triangle\rangle$; *и*
2) *имеет место неравенство*

$$\left|\alpha - \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}\right|_s \leqslant c_{\alpha,\max}\ \varrho^{a}, \tag{7.12}$$

где

$$\varrho = \frac{\lambda_{2,\max}}{\lambda} < 1 \tag{7.13}$$

и константа

$$c_{\alpha,\max} = 4d\,|A|_{\max}\ \frac{|v'_{\max}|_s}{|v'_{\max,1}|} \tag{7.14}$$

не зависит от степени a. *Здесь* $|A|_{\max}$ *–* max*-норма* (4.18) *матрицы* A.

Замечание 7.1. По поводу того, как можно переписать неравенство (7.12) в терминах знаменателей $Q_{a,\max}$ подходящих дробей $\frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}$ см. п. 9.2.

Доказательство. Из предложения 6.1 и неравенства (7.10) вытекает существование симплекса Пизо $\mathrm{P}^{a}_{\alpha}\langle\triangle\rangle$. Если же учесть, что

$$\mathrm{P}\alpha^{a}\langle v_{\max}\rangle = \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}, \tag{7.15}$$

то из неравенства (7.10) и предложения 4.1 будет следовать неравенство (7.12).

Докажем (7.15). Используя (7.5) и (6.17) записываем

$$\mathrm{P}^{a}_{\alpha}\langle v_{\max}\rangle \quad = \mathrm{pr}\ \mathrm{P}^{a}_{\alpha}\mathbf{v}_{\max} \quad = \mathrm{pr}\ (\mathrm{P}^{a}_{\alpha}\widehat{v}_0 + P^{a}_{\alpha}\widehat{v}_1 + \dots + \mathrm{P}^{a}_{\alpha}\widehat{v}_d),$$

где правая часть, согласно (5.24), (5.12) и (7.2), равна

$$\mathrm{pr}\,(\mathbf{v}_{a0}+\mathbf{v}_{a1}+\cdots+\mathbf{v}_{ad})=\frac{P_{a,0}}{Q_{a,0}}\widehat{+}\frac{P_{a,1}}{Q_{a,1}}\widehat{+}\ldots\widehat{+}\frac{P_{a,d}}{Q_{a,d}}=\frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}},$$

что и доказывет равенство (7.15). □

§8. Числовой пример

Покажем, как работает $\mathcal{SM}$-алгоритм из (7.1) на примере разложения в цепные дроби корней четвертой степени.

8.1. Выбор базового симплекса. Пусть $d = 3$ и точка $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ имеет координаты

$$\alpha_1=\sqrt[4]{2}\approx 1.18,\quad \alpha_2=\alpha_1^2=\sqrt{2}\approx 1.41,\quad \alpha_3=\alpha_1^3=\sqrt[4]{8}\approx 1.68 \tag{8.1}$$

из алгебраического поля $F = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ степени $\deg F/\mathbb{Q} = d+1 = 4$. Отсюда следует, что α – полная точка (3.10) и, значит, к ней применим $\mathcal{SM}$-алгоритм.

Выберем матрицу

$$U^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Она принадлежит группе $G_0 = \mathrm{GL}_{4,0}(\mathbb{Z})$. Вспоминая формулу (1.2) и используя приближения (8.1) видим, что $U^{-1}\alpha \in \triangle$, и поэтому выполняется включение

$$\alpha \in \triangle_U^d, \tag{8.2}$$

где обратная матрица

$$U=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

снова принадлежит группе G_0 и $\triangle_U^d = U\triangle_e^d$ – базовый симплекс с вершинами

$$
\begin{aligned}
v_0 = Ue_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = Ue_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \\
v_2 = Ue_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = Ue_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{8.3}
$$

8.2. Единица Пизо поля F. По алгоритму из предложения 2.1 находим единицу Пизо

$$\zeta = 1 + \sqrt[4]{2} + \sqrt{2} + \sqrt[4]{8} = 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \tag{8.4}$$

поля F. Для дальнейших вычислений вместо ζ удобнее работать с обратной единицей

$$\theta = \zeta^{-1} = \sqrt[4]{2} - 1. \tag{8.5}$$

Для начала находим для θ минимальный многочлен

$$f_\theta(x) = \mathrm{Norm}_{F/\mathbb{Q}}(x - \theta) \quad = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 1. \tag{8.6}$$

Теперь, чтобы определим матрицу U_θ с условием

$$U_\theta \widehat{\theta} = \theta \cdot \widehat{\theta}, \tag{8.7}$$

где

$$\widehat{\theta} = \begin{pmatrix} \theta^3 \\ \theta^2 \\ \theta \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{8.8}$$

Из (8.6) получаем, что

$$U_\theta = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.9}$$

причем данная матрица унимодулярна.

8.3. Матрица перехода T. Теперь нужно найти матрицу перехода

$$\widehat{\alpha} = T\widehat{\theta} \tag{8.10}$$

от базиса $\widehat{\theta}$ к базису

$$\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt[4]{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt[4]{8} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{8.11}$$

Используя явный вид степеней

$$\theta = \sqrt[4]{2} - 1, \quad \theta^2 = -2\sqrt[4]{2} + \sqrt{2} + 1, \quad \theta^3 = 3\sqrt[4]{2} - 2\sqrt{2} + \sqrt[4]{8} - 1,$$

легко находится обратная матрица перехода

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8.12}$$

а затем по ней – сама матрица перехода

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.13}$$

Данная матрица имеет определитель $\det T = -1$, а значит, T – унимодулярная матрица и ее уровень (3.17) будет $l(T) = 1$.

8.4. Матрица Пизо P_α. Подставляя $\widehat{\theta} = T^{-1}\widehat{\alpha}$ в равенство (8.7), получаем матрицу $M_\alpha = TU_\theta^{-1}T^{-1}$ представления $M_\alpha\widehat{\alpha} = \zeta \cdot \widehat{\alpha}$ для умножения на единицу Пизо ζ. Поскольку матрица перехода T из (8.10) имеет уровень $l(T) = 1$, то показатель $\nu(U_\theta) = 1$. Следовательно, матрица M_α унимодулярная, и поэтому имеют место равенства

$$U_\alpha = M_\alpha = \mathrm{P}_\alpha$$

согласно определению матрицы Пизо (3.19). Теперь используя (8.5), (8.9), (8.12) и (8.13), получаем нужную нам связь

$$\mathrm{P}_\alpha\widehat{\alpha} = \zeta \cdot \widehat{\alpha} \tag{8.14}$$

между матрицей Пизо

$$\mathrm{P}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{8.15}$$

и единицей Пизо ζ из (8.4).

8.5. Рекуррентные последовательности. Матрица Пизо P_α из (8.15) имеет характеристический многочлен

$$ch_{\mathrm{P}_\alpha}(x) = x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x - 1. \tag{8.16}$$

Поэтому столбцы $\mathbf{v}_a$ из (6.17) для вершин $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_{ai}$ и точек Фарея $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_{a,\max}$ у симплексов $\mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\mathbf{v}_{a+4} = 4\mathbf{v}_{a+3} + 6\mathbf{v}_{a+2} + 4\mathbf{v}_{a+1} + \mathbf{v}_a \tag{8.17}$$

для $a = 0, 1, 2, \ldots$

Начальные условия для вершин

$$v_{ai} = \frac{P_{ai}}{Q_{ai}} = \Big(\frac{P_{ai,1}}{Q_{ai}}, \frac{P_{ai,2}}{Q_{ai}}, \frac{P_{ai,d}}{Q_{ai}}\Big) \tag{8.18}$$

с номерами $i = 0, 1, 2, 3$ симплексов $\mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle$ для $a = 0, 1, 2, 3$ получаем по формуле (6.20):

$$\mathbf{v}_{a0} = \begin{pmatrix} +P_{a0,1} \\ P_{a0,2} \\ P_{a0,3} \\ Q_{a0} \end{pmatrix} : \begin{matrix} 1 & 6 & 31 & 164 \\ 1 & 7 & 37 & 195 \\ 2 & 8 & 44 & 232 \\ 1 & 5 & 26 & 138 \end{matrix} \qquad \mathbf{v}_{a1} = \begin{pmatrix} P_{a1,1} \\ P_{a1,2} \\ P_{a1,3} \\ Q_{a1} \end{pmatrix} : \begin{matrix} 2 & 7 & 38 & 201 \\ 1 & 9 & 45 & 239 \\ 2 & 10 & 54 & 284 \\ 1 & 6 & 32 & 169 \end{matrix}$$

$$\mathbf{v}_{a2} = \begin{pmatrix} P_{a2,1} \\ P_{a2,2} \\ P_{a2,3} \\ Q_{a2} \end{pmatrix} : \begin{matrix} 1 & 7 & 37 & 195 \\ 2 & 8 & 44 & 232 \\ 2 & 10 & 52 & 276 \\ 1 & 6 & 31 & 164 \end{matrix} \qquad \mathbf{v}_{a3} = \begin{pmatrix} P_{a3,1} \\ P_{a3,2} \\ P_{a3,3} \\ Q_{a3} \end{pmatrix} : \begin{matrix} 1 & 5 & 26 & 138 \\ 1 & 6 & 31 & 164 \\ 1 & 7 & 37 & 195 \\ 1 & 4 & 22 & 116 \end{matrix} \tag{8.19}$$

Применяя формулу (7.2), из начальных условий для вершин (8.19) получаем начальные условия для точек Фарея

$$v_{a,\max} = \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}} = \Big(\frac{P_{a,\max,1}}{Q_{a,\max}}, \frac{P_{a,\max,2}}{Q_{a,\max}}, \frac{P_{a,\max,d}}{Q_{a,\max}}\Big) \tag{8.20}$$

для $a = 0, 1, 2, 3$:

$$\mathbf{v}_{a,\max} = \begin{pmatrix} P_{a,\max,1} \\ P_{a,\max,2} \\ P_{a,\max,3} \\ Q_{a,\max} \end{pmatrix} : \begin{matrix} 5 & 25 & 132 & 698 \\ 5 & 30 & 157 & 830 \\ 7 & 35 & 187 & 987 \\ 4 & 21 & 111 & 587 \end{matrix} \tag{8.21}$$

8.6. Аппроксимация корней четвертой степени. Пусть $\mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle$ для $a \geqslant l_\alpha(\triangle)$, где $l_\alpha(\triangle)$ определено в (6.14), – последовательность симплексов с вершинами v_{ai} из (8.18), определяемых рекуррентным соотношением (8.17) и начальными условиями (8.19). Кроме того, пусть $v_{a,\max}$ – точки Фарея, определяемые тем же рекуррентным соотношением (8.17) и начальными условиями (8.21). Тогда по теореме 7.1 такие симплексы $\mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle$ обладают свойством минимальности (5.3)-(5.5):

для каждого казанного a единственной точкой $\frac{P}{Q} \in P_\alpha^a\langle\triangle\rangle$ со знаменателем $1 \leqslant Q < Q_{a,\max}$ является точка Фарея

$$\frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}} \in \mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle. \tag{8.22}$$

Численные расчеты в совокупности с теоремой 7.2 приводит к следующей оценке

$$\left|\sqrt[4]{2} - \frac{P_{a,\max,1}}{Q_{a,\max}}\right| + \left|\sqrt{2} - \frac{P_{a,\max,2}}{Q_{a,\max}}\right| + \left|\sqrt[4]{8} - \frac{P_{a,\max,3}}{Q_{a,\max}}\right| \leqslant \varrho^a \tag{8.23}$$

для всех $a = 0, 1, 2, \ldots,$ где $\varrho = \frac{\lambda_{2,\max}}{\lambda}$ удовлетворяет неравенствам $0 < \varrho < 0,13$; а также – к неравенству

$$\left|\sqrt[4]{2} - \frac{P_{a,\max,1}}{Q_{a,\max}}\right| + \left|\sqrt{2} - \frac{P_{a,\max,2}}{Q_{a,\max}}\right| + \left|\sqrt[4]{8} - \frac{P_{a,\max,3}}{Q_{a,\max}}\right| \leqslant \frac{c}{Q_{a,\max}^{1+\varepsilon}} \tag{8.24}$$

с абсолютной константой $c < 3$ и показателем $\varepsilon = \frac{\ln\,\lambda_{2,\max}}{\ln\,\lambda} > 0,26$.

Неравенство (8.24) вытекает из оценки (8.23) и асимптотики для знаменателей

$$Q_{a,\max} \sim \lambda^a \quad \text{при} \quad a \to +\infty. \tag{8.25}$$

Замечание 8.1. Неравенства вида (8.24) имеют особое значение, т.к. они показывают явным образом скорость приближения точки $\alpha = (\sqrt[4]{2}, \sqrt{2}, \sqrt[4]{8})$ подходящими дробями $\frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}$ из (8.22) в терминах их общих знаменателей $Q_{a,\max}$. Приближения (8.24) становятся нетривиальными только при условии $\varepsilon > 0$. Далее в п. 9.2 мы покажем, что при

$d = 3$, как в нашем в случае, для показателей ε имеет место верхняя оценка $\varepsilon \leqslant \frac{1}{3}$.

§9. Симплекс-модульный алгоритм и теорема Лагранжа

Здесь мы хотим указать на связь между $\mathcal{SM}$-алгоритмом (7.1) и многомерным обощением теоремы Лагранжа (0.11) о периодическом разложении квадратичных иррациональностей в цепные дроби. Начнем с необходимых для этого предварительных рассуждений.

9.1. Настройка $\mathcal{SM}$-алгоритма. Рассматриваемый здесь $\mathcal{SM}$-алгоритм относится к категории гибких алгоритмов. Чтобы получить разложение в цепную дробь некоторой произвольной полной точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, требуется предварительная *настройка* данного алгоритма на точку α. Это значит, что произвольным образом требуется выбрать:

1) *базовый симплекс $\triangle$, содержащий указанную точку α;*
2) *а также некоторую единицу Пизо ζ в поле $\mathbb{Q}(\alpha)$.*

(9.1)

Выбирая $\triangle$ мы задаем геометрию приближений для точки α – базовый аппроксимирующий симплекс, выбор же единицы Пизо ζ определяет скорость получающихся посредством $\mathcal{SM}$-алгоритма приближений подходящих дробей $\frac{P_a}{Q_a} = \left(\frac{P_{a,1}}{Q_a}, \dots, \frac{P_{a,d}}{Q_a}\right)$ $(a = 0, 1, 2, \dots)$ к точке α.

После того, как произведена настройка (9.1), мы получаем

$$\mathcal{SM} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{SM}_\alpha \tag{9.2}$$

– *специализацию*

$$\mathcal{SM}_\alpha := \mathcal{SM}(\triangle, \zeta)$$

для $\mathcal{SM}$-алгоритма. Специализация $\mathcal{SM}_\alpha$ – это уже жесткий алгоритм. Он применим только к точке настройки α.

Существует бесконечно много специализаций (9.2). Разные специализации позволяют получать различные скорости приближения точки α подходящими дробями $\frac{P_a}{Q_a}$. Ниже мы обсудим этот вопрос более подробно.

9.2. Выбор параметров настройки. Что следует понимать под скоростью приближения, выясним на примере двух неравенств (8.23) и (8.24). Только во втором из них видна явная связь между знаменателями $Q_{a,\max}$ и величиной отклонения $c/Q^{1+\varepsilon}_{a,\max}$ подходящих дробей $\frac{P_a}{Q_a}$ от точки α. Приближение нетривиально только, если выполняется условие

$$\varepsilon = \frac{\ln\,\lambda_{2,\max}}{\ln\,\lambda} > 0. \tag{9.3}$$

Таким образом, *скорость приближения* можно отождествить с величиной показателя (9.3). Чтобы установить связь показателя ε с единицей Пизо ζ, вспомним обозначения из предложения 3.1 и определение $\lambda_{2,\max}$ в (4.16). Из них видно, что (9.3) эквивалентно условию

$$\varepsilon = \frac{\ln\,\zeta_{2,\max}}{\ln\,\zeta} > 0, \tag{9.4}$$

налагаемому на выбор единицы Пизо $\zeta \in \mathcal{P}$ из (2.4). Здесь обозначили

$$\zeta_{2,\max} = \max_{2\leqslant j\leqslant d+1} |\zeta_j| = \max_{2\leqslant j\leqslant d+1} |\zeta^{(j)}|.$$

Отсюда и равенства для нормы $|\mathrm{Norm}_{\mathbb{F}/\mathbb{Q}}(\zeta)| = 1$ вытекает следующая верхняя граница

$$\varepsilon = \frac{\ln\,\zeta_{2,\max}}{\ln\,\zeta} \leqslant \frac{1}{d} \tag{9.5}$$

для показателя ε, где $d = \deg(\zeta) - 1$. Граница (9.5) всегда достигается в случае квадратичных и кубических иррациональностей α, если последние имеют мнимые сопряженные значения, т.е. в случае мнимых кубических полей.

Итак, мы видим, решающим фактором, определяющим качество настройки (9.1), является выбор единицы Пизо $\zeta \in \mathcal{P}$. Выбор же базового симплекса $\triangle$, согласно формуле (7.14), оказывает влияние только на величину постоянного множителя $c = c_{\alpha,\max}$.

Возвращаясь к оценке (8.24) заметим, что она была получена с помощью (8.4), (8.5) – единицы Пизо $\zeta = 1/(\sqrt[4]{2} - 1)$. Такой выбор единицы позволил получить показатель $\varepsilon \approx 0,265 \approx 1/3,8$ вместо максимально возможного $\varepsilon_{\max} = 1/d = 1/3$. Нахождение же наилучших единиц Пизо представляет собою отдельную задачу.

9.3. Теорема Лагранжа. Вернемся к обсуждению возможных многомерных обобщений теоремы Лагранжа $\mathrm{L}_d = \overrightarrow{\mathrm{L}}_d \wedge \overleftarrow{\mathrm{L}}_d$ из (0.11), начатого во Введении.

Используя алгоритм возвратных отображений $\mathcal{D}$, необходимое условие $\overleftarrow{\mathrm{L}}_2$ было доказано в [4] для некоторого трехпараметрического семейста кубических иррациональностей, точнее, – для точек $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ с координатами $\alpha_1 = \theta^2$, $\alpha_2 = \theta$, где $0 < \theta < 1$ – вещественный корень многочлена

$$f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{9.6}$$

с коэффициентами a_i из кольца $\mathbb{Z}$ и со свободным членом $a_0 = \pm 1$. Такие числа θ являются единицами кубического поля $\mathbb{Q}(\theta)$.

Расширение условия $\overleftarrow{\mathrm{L}}_d$ на произвольную размерность осуществлено в работе [5]. В ней рассмотрено $(d+1)$-параметрическое семейсто алгебраических иррациональностей $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ с координатами $\alpha_1 = \theta^d$, $\alpha_2 = \theta^{d-1}, \dots, \alpha_d = \theta$, где $0 < \theta < 1$ – вещественный корень многочлена

$$f(x) = x^{d+1} + a_dx^d + \dots + a_1x + a_0 \tag{9.7}$$

степени $d + 1 \geqslant 3$ с натуральными коэффициентами $a_i = 1, 2, 3, \dots$ и со свободным членом $a_0 = -1$.

В отличие от универсального алгоритма $\mathcal{D}$, рассматриваемый в настоящей работе $\mathcal{SM}$-алгоритм алгебраичный – он допускает лишь алгебраические иррациональности α. Если точка α полная и, следовательно, иррациональная, то $\mathcal{SM}$-алгоритм позволяет строить последовательность *подходящих дробей* $\frac{P_a}{Q_a} = \left(\frac{P_{a,1}}{Q_a}, \dots, \frac{P_{a,d}}{Q_a}\right)$ из (7.1), по теореме 7.2 сходящихся

$$\frac{P_a}{Q_a} \longrightarrow \alpha \quad \text{при} \quad a \to +\infty$$

к выбранной точке α в метрике $|*|_s$. Как уже отмечалось в п. 0.6 Введения, в данном случае *периодичность* подходящих дробей $\frac{P_a}{Q_a}$ означает, что их числители P_a и знаменатели Q_a вычисляются по рекуррентному уравнению (6.19) с постоянными коэффициентами.

Таким образом, как прямое следствие из теорем 7.1 и 7.2 вытекает справедливость необходимого условия $\overleftarrow{\mathrm{L}}_d$ в (0.11) для $\mathcal{SM}$-алгоритма.

Теорема 9.1. *Если точка* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ *полная* (3.10)-(3.12) *и, значит, имеет степень* $\deg \alpha = d + 1$, *то по* $\mathcal{SM}$-*алгоритму она разлагается в периодическую цепную дробь.*

□

Замечание 9.1. Появление алгоритмов разложения иррациональностей в многомерные цепные дроби – типа предложенного выше $\mathcal{SM}$-алгоритма – расширяет пространство потенциально допускаемых вариантов многомерных обобщений теоремы Лагранжа (0.11). В обсуждаемом здесь подходе новизна состоит в том, что для алгебраичных алгоритмов становится не "видимым" достаточное условие $\overrightarrow{\mathrm{L}}_d$ в многомерных вариантах теоремы Лагранжа (0.11). Оно для них не существует или, если выразиться по-другому, перестает иметь смысл.

Таким образом, переходя на новую точку зрения можно утверждать, что теорема 9.1 и есть многомерное обобщение теоремы Лагранжа (0.11) в случае $\mathcal{SM}$-алгоритма.

Литература

1. И. М. Виноградов, *Основы теории чисел.* 5-ое изд. М. 1972.
2. В. Г. Журавлев, *Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **445** (2016), 33–92.
3. А. Я. Хинчин, *Цепные дроби.* 4-ое изд. М. 1978.
4. В. Г. Журавлев, *Периодические ядерные разложения кубических иррациональностей в цепные дроби.* — Математика и информатика, Совр. пробл. матем., МИ РАН, М., (2016), 1-30 (в печати).
5. В. Г. Журавлев, *Периодические ядерные разложения единиц алгебраических полей в цепные дроби.* — Зап. науч. семин. ПОМИ (2016), 1–36. (см. наст. сборник).
6. В. Г. Журавлев, *Ядерные разложения чисел Пизо в многомерные цепные дроби.* — Зап. науч. семин. ПОМИ (2016), 1–23. (см. наст. сборник).
7. L. Euler, *De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda.* — Petersburger Akademie Notiz. Exhib. August 14 (1775) Commentationes arithmeticae collectae. V. II. St. Petersburg (1849), 99–104.
8. C. G. J. Jacobi, *Allgemeine Theorie der Kettenbruchänlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird.* — Gesammelte Werke, Bd. 6. Berlin: Reimer 1891, 385–426.
9. C. G. J. Jacobi, *Über die Auflösung der Gleichung* $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = f_n$. — J. Reine Angew. Math. **69** (1868), 21–28.
10. H. Poincare, *Sur une generalization des fractionés continues.* — C.R. Acad. Sci. Paris **99**, No. 1 (1884), 1014–1016.
11. V. Brun, *En generalisation av Kjedebroken.* — Skrifter utgit av Videnskapsselskapeti Kristiania. I. Matematisk-Naturvidenskabelig Klasse **6** (1919-1920).
12. Е. В. Подсыпанин, *Об одном обобщении алгоритма цепных дробей, связанном с алгоритмом Вигго Бруна.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **67** (1977), 184–194.

13. А. Д. Брюно, В. И. Парусников, *Многогранники Клейна для двух кубических форм Давенпорта.* — Мат. заметки **56**, No. 4 (1994), 9–27.
14. А. Д. Брюно, В. И. Парусников, *Сравнение разных обобщений цепных дробей.* — Мат. заметки **61**, No. 3 (1997), 339–348.
15. Л. Д. Пустыльников, *Обобщенные цепные дроби и эргодическая теория.* — Успехи мат. наук **58**, No. 1 (2003), 113–164.
16. M. Furukado, Sh. Ito, A. Saito, J. Tamura, Sh. Yasutomi, *A new multidimensional slow continued fraction algorithm and stepped surface.* — Exper. Math. **23** (2014), No. 4, 390–410.
17. В. Г. Журавлев, *Делящиеся разбиения тора и множества ограниченного остатка.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **440** (2015), 99–122.
18. В. Г. Журавлев, *Двумерные приближения методом делящихся торических разбиений.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **440** (2015), 81–98.
19. З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел.* 2-ое изд. М. 1972.

Zhuravlev V. G. Simplex-module algorithm for expansion of algebraic numbers in multidimensional continued fractions.

Simplex-module algorithm ($\mathcal{SM}$-algorithm) for expansion of algebraic numbers $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ in multidimensional continued fractions is offered. The method is based on 1) minimal rational simplices $\mathbf{s}$, where $\alpha \in \mathbf{s}$, and 2) Pisot matrices P_α for which $\widehat{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d, 1)$ is eigenvector. A multi-dimensional generalization of the Lagrange theorem is proved.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН,
ул. Губкина 8, 119991 Москва, Россия
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 1 августа 2016 г.