Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 449, 2016 г.

В. Г. Журавлев

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЯДЕРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ЕДИНИЦ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В МНОГОМЕРНЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

Введение

0.1. Теорема Лагранжа. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_d)$ – произвольная точка с координатами из $\mathbb{R}$ и $F_x = \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_d)$ – расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, получающееся добавлением к нему чисел $x_1, \ldots, x_d$. Определим *степень точки* x над $\mathbb{Q}$, полагая $\deg(x) = \deg F_x$, где справа указана степень $\deg F_x = [F_x : \mathbb{Q}]$ поля F_x, рассматриваемого как векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$.

В [1] было доказано следующее утверждение.

Теорема 0.1. *Пусть точка $x = (x_1, \ldots, x_d)$ будет иррациональной, т.е. числа $1, x_1, \ldots, x_d$ линейно независимы над кольцом целых рациональных чисел $\mathbb{Z}$. Если она при этом является неподвижной точкой некоторого отображения δ из полугруппы d-мерных возвратных отображений $\mathcal{D}$, то ее степень*

$$\deg(x) = d + 1.$$

Теорема Лагранжа утверждает [2], что иррациональность допускает периодическое разложение в цепную дробь тогда и только тогда, когда она является квадратичной. Приведенная выше теорема 0.1 представляет собою обобщение первой части теоремы Лагранжа для алгебраических иррациональностей произвольной степени $d+1$, т.к. в данном случае неподвижность точки x влечет за собою периодичность разложения ее в d-мерную цепную дробь.

0.2. Приближения единиц алгебраических полей. В настоящей работе доказывается вторая часть обобщения теоремы Лагранжа (теорема 0.2) для некоторого $(d+1)$-параметрического семейста алгебраических иррациональностей, точнее, – для точек $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$

Ключевые слова: индуцированные разбиения тора, наилучшие многомерные приближения, теорема Лагранжа.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант No. 14-01-00360.

с координатами $\alpha_1 = \theta^d$, $\alpha_2 = \theta^{d-1}, \ldots$, $\alpha_d = \theta$, где $0 < \theta < 1$ – вещественный корень неприводимого многочлена

$$f(x) = x^{d+1} + a_d x^d + \ldots + a_1 x + a_0$$

степени $d+1 \geqslant 3$ с натуральными коэффициентами $a_i = 1, 2, 3, \ldots$ и со свободным членом $a_0 = -1$. Такие числа θ являются единицами кольца целых чисел $\mathfrak{O}$ вещественного алгебраического поля $\mathbb{Q}(\theta)$ – алгебраического расширения степени $d+1$ поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

В теореме 11.2 доказано следующе утверждение.

Теорема 0.2. 1. *Существует период $p \geqslant 1$ и такие рекуррентные последовательности Q^a, $R_1^a, \ldots, R_d^a$ порядка $d+1$ с постоянными коэффициентами, что для всех $i = ap + b$, где $0 \leqslant b < p$, точка*

$$v_{\min}^{(i)} = (-Q^a\alpha_1 + R_1^a, \ldots, -Q^a\alpha_d + R_d^a) \tag{0.1}$$

обладает минимальным свойством:

$$v_{\min}^{(i)} \in T^{(i)} \quad \text{с минимальным целым} \quad Q^a \geqslant 1, \tag{0.2}$$

где $T^{(i)}$ – явно определяемая последовательность выпуклых многогранников, объем которых $s(T^{(i)}) \to 0$ при $i \to +\infty$. Свойство (0.2) означает, что ни одна из точек орбиты $x_j \equiv -j\alpha \bmod \mathbb{Z}^d$ не попадает

$$x_j \notin T^{(i)} \quad \text{для всех} \quad 1 \leqslant j < Q^a \tag{0.3}$$

в многогранник $T^{(i)}$.

2. *Для всех $a = 0, 1, 2, \ldots$ имеют место неравенства*

$$|Q^a\alpha_1 - R_1^a| + \ldots + |Q^a\alpha_d - R_d^a| \quad \leqslant c\varrho(\mathbf{A})^a, \tag{0.4}$$

если собственные значения $\lambda_i \neq \lambda_{i'}$ для любых $i \neq i'$ у некоторой калибровочной матрицы $\mathbf{A}$, где $\varrho(\mathbf{A})$ – спектральный радиус матрицы $\mathbf{A}$ и $c > 0$ – константа, не зависящая от a.

Замечание 0.1. Минимальное свойство (0.2) указывает на *наилучшее ядерное приближение* (karyon approximation). Это означает, что точки $v_{\min}^{(i)}$ из (0.1) наилучшим образом приближаются к $0 \bmod \mathbb{Z}^d$ относительно $T^{(i)}$-норм (ядерных норм), в качестве выпуклых тел для которой выбраны выпуклые многогранники $T^{(i)}$ – ядра индуцированных разбиений d-мерного тора $\mathbb{T}^d$. Данные многогранники $T^{(i)}$ согласованы с орбитой точек $x_j \equiv -j\alpha \bmod \mathbb{Z}^d$ для $j = 0, 1, 2, \ldots$ и, следовательно, напрямую согласованы с интересующей нас точкой $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$.

Неравенство же (0.4) записано в фиксированной многогранной s-норме $|x|_s = |x_1| + \ldots + |x_d|$. Можно было взять и любую другую норму, например, – шаровую или евклидову $|x| = (|x_1|^2 + \ldots + |x_d|^2)^{1/2}$. Фиксированные нормы удобны для количественных оценок скорости приближений, но они не прослеживают наилучшие приближения.

0.3. История и методы. Доказательство того, что приближения (0.2) являются наилучшими относительно $T^{(i)}$-норм, опирается на метод дифференцирования индуцированных разбиений многомерных торов [1,3,4]. Теорема 0.2 для приближений кубических иррациональностей была доказана в [5].

Для вывода же из приближений (0.2) количественных оценок (0.4) используются многомерные возвратные отображения [1,5]. Ранее одномерные возвратные отображения применялись в теории динамических систем [6,7], а двумерные возвратные отображения – для проверки периодичности разложений кубических корней [8] и для приближений кубических иррациональностей [5].

Исследования разложений отдельных классов кубических иррациональностей содержатся в [9–15].

Основной областью, используемую в настоящей работе, является замкнутый d-мерный симплекс $\triangle_d$. Для размерности $d = 2$ приближения иррациональностей через различные способы деления треугольника $\triangle_2$ подробно исследованы в [16–22].

Хорошо известна связь между обычными цепными дробями и рекуррентными соотношениями второго порядка. В теореме 11.2 для вычисления подходящих дробей также применяются рекуррентные соотношения, но уже произвольного порядка $d+1$. В многомерном случае такая связь наилучших приближений с рекуррентными последовательностями была обнаружена в [23].

§1. Согласованные множества векторов и их производные

1.1. Согласованные множества векторов. Обозначим через Σ совокупность всех сочетаний σ из двух элементов $\{k_1, k_2\}$ из множества индексов $\{0, 1, \ldots, d\}$. Пусть $v_0, v_1, \ldots, v_d$ – произвольные векторы из $\mathbb{R}^d$ и $\sigma' = \{k_1', \ldots, k_{d-1}'\}$ – дополнительное к σ сочетение в $\{0, 1, \ldots, d\}$.

Между $\sigma \in \Sigma$ и дополнительными к ним сочетаниями $\sigma' \in \Sigma$ существует взаимно однозначное соответствие $\sigma \Leftrightarrow \sigma'$. Далее мы будем рассматривать неупорядоченные множества векторов $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$.

Определение 1.1. *Пусть любые $d-1$ вектора из $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ линейно независимы. Обозначим через $H_{\sigma'}$ гиперплоскость, содержащую векторы $v_{k'_j}$ с индексами k'_j из σ'. Тогда такое множество векторов $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ назовем* согласованным, *если для всех дополнительных к σ' сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\} \in \Sigma$ векторы v_{k_1}, v_{k_2} из $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ не принадлежат гиперплоскости $H_{\sigma'}$ и лежат по отношению к ней в разных полупространствах $H^+_{\sigma'}$ и $H^-_{\sigma'}$.*

Непосредственно из определения согласованности следует, что любые D вектора из $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ будут линейно независимы.

Определение 1.2. *Любое согласованное множество векторов $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ из $\mathbb{R}^d$ будем для краткости называть* звездой.

Объяснением названия звезды может служить следующий критерий.

Критерий 1.1. Обозначим через $\Delta(v)$ натянутый на векторы звезды v замкнутый симплекс, и пусть $\Delta^{\mathrm{int}}(v)$ – внутренняя часть симплекса. Тогда условие на множество векторов v быть звездой равносильно условию

$$0 \in \Delta^{\mathrm{int}}(v). \tag{1.1}$$

1.2. Производные звезды. Далее мы будем использовать обозначения

$$X = X_1 \sqcup X_2, \quad X = X_1 \cup X_2 \tag{1.2}$$

для *строгого* и *нестрогого разбиений* множества X в случае, если $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ и $X_1^{\mathrm{int}} \cap X_2^{\mathrm{int}} = \varnothing$ соответственно, где X_k^{int} – множество внутренних точек из X_k.

Из определения 1.1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Предположим, что для некоторого сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ сумма векторов $v_\sigma = v_{k_1} + v_{k_2}$ звезды $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ не принадлежит гиперплоскости $H_{\sigma'}$, где σ' – дополнительное сочетание для σ. Тогда при этом условии только одно из множеств*

$$v(\sigma) \sqcup v(\sigma') \tag{1.3}$$

будет согласованным. Здесь $v(\sigma) = \{v_{k_1}, v_\sigma\}$ *или* $v(\sigma) = \{v_\sigma, v_{k_2}\}$ *в зависимости от того, какие из пар векторов* v_{k_1}, v_σ *или* v_{k_2}, v_σ *принадлежат разным полупространствам* $H^{\pm}_{\sigma'}$, *и* $v(\sigma')$ *– дополнительное для* $v(\sigma)$ *множество векторов из звезды* v.

Заметим, что однозначность выбора множества $v(\sigma)$ в (1.3) гарантирована ограничением на сумму векторов $v_\sigma \notin H_{\sigma'}$.

Определение 1.3. *Обозначим через* $v^\sigma = v(\sigma) \sqcup v(\sigma')$ *то множество векторов из* (1.3), *которое является согласованным. Если существуют множества векторов* v^σ *для всех сочетаний* $\sigma \in \Sigma$, *т.е. для всех* σ *выполняется условие леммы* 1.1, *то будем говорить, что согласованное множество векторов* $\{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ невырождено *или более кратко – звезда* $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ невырождена.

Таким образом, согласно определению 1.3 для всех сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ на множестве невырожденных звезд $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ определено отображение

$$v \quad \xrightarrow{\sigma} \quad v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \ldots, v_d^\sigma\}, \tag{1.4}$$

где $v^\sigma_{k_1} = v_{k_1}$, $v^\sigma_{k_2} = v_\sigma$ или $v^\sigma_{k_1} = v_\sigma$, $v^\sigma_{k_2} = v_{k_2}$ в зависимости от выполнения условия из (1.3), и $v^\sigma_{k'} = v_{k'}$ для всех $k' \in \sigma'$.

Звезду v^σ из (1.4) назовем *σ-производной* нерывожденой звезды v. Если нужно выделит индексы k_1, k_2 из сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$, то будем для σ-производной (1.4) использовать еще и другое развернутое обозначение $v^\sigma = v^{\{k_1,k_2\}}$. По определению (1.4) имеет место формула коммутирования $v^{\{k_1,k_2\}} = v^{\{k_2,k_1\}}$. Поэтому для нерывожденной звезды v существуют $C^2_{d+1} = \frac{(d+1)d}{2}$ ее производных звезд v^σ.

§2. Индуцированные разбиения тора

2.1. Перекладывающиеся развертки тора. Пусть

$$L = \mathbb{Z}[l_1, \ldots, l_d]$$

– полная решетка в пространстве $\mathbb{R}^d$ с базисом $l_1, \ldots, l_d$, т.е. векторы $l_1, \ldots, l_d$ линейно независимы на полем вещественных чисел $\mathbb{R}$; и пусть T – некоторое подмножество из $\mathbb{R}^d$. Будем говорить, что T является *разверткой тора* $\mathbb{T}^d_L = \mathbb{R}^d/L$, если отображение

$$T \overrightarrow{\sim} \mathbb{T}^d_L : \quad x \mapsto x \bmod L$$

– биекция. Развертка T называется *перекладывающейся*, если задано ее разбиение
$$T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_d \tag{2.1}$$
и перекладывание
$$T \xrightarrow{S'} T: \quad S'(x) = x + v_{\mathrm{col}(x)} \tag{2.2}$$
на векторы $v_0, v_1, \ldots, v_d$, связанные с базисом решетки L равенствами
$$l_k = v_k - v_0 \quad \text{для} \quad k = 1, \ldots, d. \tag{2.3}$$
В формуле (2.2) использовано обозначение $\mathrm{col}(x) = k$ для *цвета* точек x, принадлежащих подмножеству T_k из разбиения (2.1), где $k = 0, 1, \ldots, d$.

Заметим, что при переходе (2.3) от векторов переклыдывания $v_0, v_1, \ldots, v_d$ к базизу $l_1, \ldots, l_d$ решетки L нарушается симметрия, когда выделяется вектор v_0. Удобно ввести для него дополнительное обозначение
$$v_0 = \alpha'. \tag{2.4}$$
В частности, из равенств (2.3) и (2.4) вытекают сравнения
$$v_k \equiv \alpha' \bmod L$$
для всех $k = 0, 1, \ldots, d$. Поэтому перекладывание (2.2) эквивалентно сдвигу тора $S' = S'_{\alpha'}$:
$$T \xrightarrow{S'} T: \quad S'(x) \equiv x + \alpha' \bmod L \tag{2.5}$$
на вектор $\alpha' \bmod L$.

2.2. Перекладывающиеся параллелоэдры и их деформации. Определим для $m = 0, 1, \ldots, d$ замкнутые d-мерные параллелепипеды
$$\overline{T}_m = \quad \{\lambda_{k_1} v_{k_1} + \ldots + \lambda_{k_d} v_{k_d}; \qquad 0 \leqslant \lambda_{k_i} \leqslant 1\}, \tag{2.6}$$
где $k_1, \ldots, k_d$ – дополнительные к m индексы в $\{0, 1, \ldots, d\}$. Если множество векторов $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ является звездой (см. определение 1.2), то объединение
$$\overline{T} = \overline{T}_0 \cup \overline{T}_1 \cup \ldots \cup \overline{T}_d \tag{2.7}$$
параллелепипедов (2.6) образует *параллелоэдр* [24,25] – многогранник, разбивающий пространство
$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{l \in L} \overline{T}[l] \tag{2.8}$$

с помощью параллельных переносов $\overline{T}[l] = \overline{T} + l$ на векторы l решетки L. Причем различные многогранники $\overline{T}[l]$ из (2.8) не имеют общих внутренних точек. Здесь и далее будем пользоваться соглашением (1.2).

Для $d = 2$ параллелоэдр $\overline{T}$ из (2.6) является выпуклым шестиугольником с попарно равными и параллельными сторонами, для $d = 3$ – ромбододекаэдром Федорова [26], а для $d = 4$ – параллелоэдром Вороного [27].

По *i-алгоритму* из [25] вершины, ребра и грани параллелепипедов $\overline{T}_m$ можно распределить между собою так, чтобы получалось разбиение $T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_d$, имеющее внутреннюю часть $T^{\text{int}} = (\overline{T})^{\text{int}}$ такую же, как и параллелоэдр (2.7), и разбивающее пространство

$$\mathbb{R}^d = \bigsqcup_{l \in L} T[l] \tag{2.9}$$

в строгом смысле (1.2), т.е. в (2.9) многогранники $T[l'] \cap T[l''] = \varnothing$, если $l' \neq l''$. Существование разбиения (2.9) равносильно условию незамкнутому параллелоэдру T быть разверткой тора $\mathbb{T}^d_L = \mathbb{R}^d/L$.

Исходя из i-алгоритма [25], можно считать, что выполняются условия

$$0 \in T_0, \quad v_0 \in T_1, \quad v_0 + v_1 \in T_2, \quad \ldots, \quad v_0 + v_1 + \ldots + v_{d-1} \in T_d. \tag{2.10}$$

Если дополнительно предположить выполненными условия (2.10), то в результате каждой звезде $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ ставится в соответствие параллелоэдр

$$T = T(v) = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_d, \tag{2.11}$$

являющийся перекладывающейся разверткой тора $\mathbb{T}^d_L$ с векторами перекладывания $v_0, v_1, \ldots, v_d$ в (2.2).

2.3. Вмещающее пространство. Кроме тора $\mathbb{T}^d_L$, нам потребуется еще один тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} = \mathbb{R}^d/\mathcal{L}$ для другой полной решетки $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^d$. Зададим сдвиг $S = S_\alpha$ тора $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ на вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$, полагая

$$\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \xrightarrow{S} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}: \quad x \mapsto S(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathcal{L}. \tag{2.12}$$

Далее торы $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ будут использоваться, как вмещающие пространства для вложений различных торов $\mathbb{T}^d_L$ с изменяющимися решетками L.

2.4. Вкладывающиеся в тор развертки.

Определение 2.1. *Перекладывающаяся развертка T из* (2.1) вкладывается

$$T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{2.13}$$

в тор $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$ относительно сдвига $S = S_\alpha$, если выполняются следующие условия.

1. *Подмножество $T \subset \mathbb{R}^d$ является $\mathcal{L}$*-различимым, *т.е. для любых элементов x, y из T, связанных сравнением $x \equiv y \bmod \mathcal{L}$, следует их равенство $x = y$. Значит, отображение*

$$T \overrightarrow{\sim} T \bmod \mathcal{L}: \qquad x \mapsto x \bmod \mathcal{L} \tag{2.14}$$

будет взаимно однозначным; поэтому используя отображение (2.14) *можем считать развертку T вложенной как множество $T \subset \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$.*

2. *Векторы перекладывания* (2.2) *имеют вид $v_k \equiv m_k\alpha \bmod \mathcal{L}$ для всех $k = 0, 1, \ldots, d$ с некоторыми коэффициентами $m_k = 1, 2, 3, \ldots$*

3. *Пусть*

$$\mathrm{Orb}^+(T_k) = \quad \{S^j(T_k); \quad j = 1, \ldots, m_k - 1\} \tag{2.15}$$

обозначает орбиту *подмножества $T_k \subset T$. В силу включения $T \subset \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ будем полагать $\mathrm{Orb}^+_k \subseteq \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$. Тогда по определению считается, что орбиты* (2.15) *удовлетворяют условию* $\mathrm{Orb}^+(T_k) \cap T = \varnothing$ *для $k = 0, 1, \ldots, d$.*

Чтобы сформулировать следующий результат, нам потребуется в дополнение к (2.15) определить еще *полные орбиты*

$$\mathrm{Orb}(T_k) = \quad \{S^j(T_k); \quad j = 0, 1, \ldots, m_k - 1\}. \tag{2.16}$$

Кроме того, будем предполагать вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_D)$ из (2.12) *иррациональным*, когда выполняется условие:

$$\textit{числа}\ \ 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d\ \ \textit{линейно независимы над кольцом}\quad \mathbb{Z}. \tag{2.17}$$

Здесь α_k – координаты вектора α в некотором базисе полной решетки $\mathcal{L}$.

Теорема 2.1. *Пусть развертка T вкладывается* (2.13) *в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$, развертка T имеет внутреннюю точку, и пусть вектор α для сдвига $S = S_\alpha$ из* (2.12) *будет иррациональным* (2.17). *Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Множества из полных орбит* $\mathrm{Orb}(T_k)$ *не пересекаются, т.е.* $S^{j_1}(T_{k_1}) \cap S^{j_2}(T_{k_2}) \neq \varnothing$ *только при условии* $j_1 = j_2$ *и* $k_1 = k_2$.

2. *Имеет место разбиение тора* $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$*:*

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{T}_d, \tag{2.18}$$

где

$$\mathcal{T}_k = T_k \sqcup S^1(T_k) \sqcup \ldots \sqcup S^{m_k - 1}(T_k)$$

– орбитное разбиение, составленное из множеств, входящих в полную орбиту $\mathrm{Orb}(T_k)$ *из* (2.16).

Доказательство приведено в [1]. □

2.5. Индуцированные отображения и ядро разбиения. Из теоремы 2.1 следует, что сдвиг тора $S' : T \longrightarrow T$ из (2.5) является *индуцированным отображением* или иначе – отображением первого возвращения, отображением Пуанкаре – для сдвига тора $S : \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ из (2.12), что символически будем обозначать в виде равенства

$$S' = S|_T.$$

Обозначим

$$T = T(v), \quad \mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{T}_d \tag{2.19}$$

соответственно развертку T из (2.1), (2.11) и *индуцированное разбиение* (2.18) тора $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$, порождаемое вкладывающейся в тор $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ разверткой T.

Множество T по отношению ко всему разбиению тора $\mathcal{T}$ называется (ср. [4]) *ядром (karyon)* разбиения $\mathcal{T}$. Чтобы указывать на такую связь между T и $\mathcal{T}$ будем использовать обозначения

$$T = \mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}(\mathcal{T}). \tag{2.20}$$

Ядро (2.20) характеризуется следующим свойством: *ядро – это такое подмножество* $\mathrm{Kr} \subset \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$*, для которого отображение первого возвращения* $S' = S|_{\mathrm{Kr}}$*, индуцированное сдвигом тора* $S = S_\alpha$ *из* (2.12)*, эквивалентно перекладыванию* $d+1$ *подмножеств из разбиения* $\mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}_0 \sqcup \mathrm{Kr}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathrm{Kr}_d$.

В определении ядра Kr важно, что количество областей в его разбиении на единицу больше размерности вмещающего его тора $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$. Отсюда, в частности, следует, что Kr является разверткой некоторого тора $\mathbb{T}^d_{L}$, а индуцированное отображение $S' = S|_{\mathrm{Kr}}$ изоморфно сдвигу этого тора.

2.6. Критерий вложимости развертки тора. В [1] доказана следующая теорема.

Теорема 2.2. *Определенная в* (2.11) *развертка тора* $T = T(v)$ *вкладывается* (2.13) *в тор* $T \overset{\text{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух эквивалентных утверждений:*

1) *множество* $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{T}_d$ *из* (2.19) *является разбиением тора* $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$*;*

2) *внутренняя часть* T^{int} *развертки* $T \subset \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *не содержит ни одной из точек* x_j *орбиты*

$$\mathrm{Orb}^+(0,\mathbf{m}) = \quad \{x_j = S^j(0); \quad j = 1, 2, \ldots, \mathbf{m} - 1\} \tag{2.21}$$

порядка $\mathbf{m} = m_0 + m_1 + \ldots + m_d$.

2.7. Производные вкладывающихся множеств векторов.

Определение 2.2. *Пусть* $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ *– звезда и* $T = T(v)$ *– отвечающая ей развертка* (2.19) *тора* $\mathbb{T}^d_L$ *с векторами перекладывания* $v_0, v_1, \ldots, v_d$. *Если данная развертка* T *вкладывается* $T \overset{\text{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *в тор* $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *относительно некоторого сдвига* $S = S_\alpha$, *то в этом случае будем говорить, что такая звезда* v вкладывается

$$v \overset{\text{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}} \tag{2.22}$$

в тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *относительно сдвига* S.

В [1] доказана следующая теорема.

Теорема 2.3. *Пусть невырожденная звезда* $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ *вкладывается* (2.22) *в тор* $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *относительно сдвига* $S = S_\alpha$ *с иррациональным* (2.17) *вектором* α. *Тогда любая ее* σ*-производная* $v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \ldots, v_d^\sigma\}$ *для* $\sigma \in \Sigma$ *также вкладывается*

$$v^\sigma \overset{\text{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$$

в тот же тор $\mathbb{T}^d_{\mathcal{L}}$ *относительно сдвига* S.

§3. Возвратные отображения

Здесь приведы краткие сведения о многомерных возвратных отображениях, изложенные в [1].

3.1. Базисный симплекс и его симметрии. Возвратные отображения – это нормированные дифференцирования (1.4). Основной областью для нас будет замкнутый d-мерный *симплекс* $\triangle = \triangle_d$ с вершинами в точках $(0,\dots,0)$, $(1,\dots,0),\dots,$ $(0,\dots,1)$ из пространства $\mathbb{R}^d$. Обозначим через $S_\triangle$ *группу* его аффинных симметрий. Она сопряжена с группой метрических симметрий *правильного симплекса* $\triangle'_d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ с вершинами $(1,0,\dots,0)$, $(0,1,\dots,0),\dots,$ $(0,0,\dots,1)$ из $\mathbb{R}^{d+1}$. Чтобы явным образом описать указанную связь, зададим вложение

$$\mathrm{em}: \quad \mathbb{R}^d \supset \triangle_d \quad \overrightarrow{\sim} \quad \triangle'_d \subset \mathbb{R}^{d+1}: \tag{3.1}$$

$$x = (x_1,\dots,x_d) \quad \mapsto \quad x' = (x'_1,\dots,x'_d,x'_{d+1}),$$

где $x'_i = x_i$ для $1 \leqslant i \leqslant d$ и $x'_{d+1} = 1 - x_1 - \dots - x_D$. Симметрии правильного симплекса

$$\sigma: \quad \triangle'_d \quad \overrightarrow{\sim} \quad \triangle'_d \tag{3.2}$$

задаются перестановками координат точек

$$x' \quad \to \quad \sigma x' = (x'_{\sigma(1)}, x'_{\sigma(2)}, \dots, x'_{\sigma(d+1)}), \tag{3.3}$$

где σ принадлежат группе перестновок S_{d+1} из $d+1$ элемента $1,\dots,d+1$. Симметрии (3.2) будут изометриями правильного симплекса $\triangle'_d$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \triangle_d \ni x & \stackrel{\mathrm{em}}{\longrightarrow} & x' \in \triangle'_d \\ \sigma\downarrow & & \downarrow\sigma \\ \triangle_d \ni \sigma x & \stackrel{\mathrm{pr}}{\longleftarrow} & \sigma x' \in \triangle'_d \end{array} \tag{3.4}$$

Здесь pr обозначает *проекцию* $\mathrm{pr}: \quad \mathbb{R}^{d+1} \ni x' \quad \to \quad (x'_1,\dots,x'_d) \in \mathbb{R}^d$ и левая вертикальная стрелка в диаграмме (3.4) означает отображение, определяемое из условия коммутативности диаграммы равенством

$$\sigma x = \mathrm{pr}(\sigma x'), \tag{3.5}$$

где $\sigma \in S_{d+1}$ и $x' = \mathrm{em}(x)$. Используя диаграмму (3.4), можем отождествить

$$S_\triangle \overrightarrow{\sim} S_{d+1}: \quad s = s_\sigma \quad \overrightarrow{\sim} \quad \sigma \tag{3.6}$$

группу аффинных симметрий $S_\triangle$ симплекса $\triangle_d$ с группой перестновок S_{d+1}. Отсюда вытекает, что группа симметрий $S_\triangle$ имеет порядок

$\sharp S_\triangle = (d+1)!$ и все симметрии $s = s_\sigma$ из $S_\triangle$ распадаются на два класса собственных и несобственных симметрий $\operatorname{sign}(s) = \pm 1$ в зависимости от знака $\operatorname{sign}(\sigma) = \pm 1$ соответствующей подстановки σ из S_{d+1}. Согласно (3.5) и (3.1) в координатах $(x_1, \ldots, x_d) \in \triangle_d$ относительно декартова базиса $e_1 = (1, \ldots, 0), \ldots, e_d = (0, \ldots, 1)$ симметрии $s = s_\sigma$ из $S_\triangle$ записываются следующим явным образом:

$$s_\sigma(x_1, \ldots, x_d) = (\sigma x_1, \ldots, \sigma x_d), \tag{3.7}$$

где

$$\sigma x_i = \begin{cases} x_{\sigma(i)}, & \text{если} \quad \sigma(i) \leqslant d, \\ 1 - x_1 - \cdots - x_d, & \text{если} \quad \sigma(i) = d + 1. \end{cases}$$

3.2. Разбиения базисного симплекса. Выделим в симплексе $\triangle = \triangle_D$ *открытые области*

$$\triangle_k^{kl}, \quad \triangle_l^{kl} \quad \subset \quad \triangle \tag{3.8}$$

с целыми индексами $0 \leqslant k < l \leqslant d$. Замыкания областей $\overline{\triangle}_k^{kl}$, $\overline{\triangle}_l^{kl}$ разбивают симплекс

$$\triangle = \overline{\triangle}_k^{kl} \cup \overline{\triangle}_l^{kl} \tag{3.9}$$

и пересекаются $\overline{\triangle}_k^{kl} \cap \overline{\triangle}_l^{kl} = \mu^{kl}$ по *медианной гиперплоскости* μ^{kl}, проходящей через концы векторов $e_{kl} = \frac{1}{2}(e_k + e_l)$ и e_m для всех $0 \leqslant m \leqslant d$, $m \neq k, l$, где $e_0 = (0, \ldots, 0)$. Нижние индексы в $\triangle_k^{kl}$ и $\triangle_l^{kl}$ указывают на принадлежность вершин с номерами k и l соответственно $\overline{\triangle}_k^{kl}$ и $\overline{\triangle}_l^{kl}$.

Таким образом, области (3.8) представляют собою открытые полусимплексы, замыкание объединения которых

$$\triangle^{kl} = \triangle_k^{kl} \sqcup \triangle_l^{kl} \tag{3.10}$$

совпадает со всем симплексом $\triangle$ и при этом $\triangle_k^{kl} \cap \triangle_l^{kl} = \varnothing$.

3.3. Нормированные дифференцирования звезд. Согласно условию (1.1) из критерия 1.1, каждая точка $x \in \triangle^{kl}$ задает звезду $w = \{w_0, w_1, \ldots, w_d\}$ с лучами $w_m = e_m - x$, выходящими из центра x в вершины симплекса $\triangle$ с соответствующими номерами $0, 1, \ldots, d$. При таком выборе центра существует производная звезда

$$w' = \{w_0', w_1', \ldots, w_d'\}. \tag{3.11}$$

Если $x \in \triangle_k^{kl}$, то лучи в (3.11) имеют вид

$$w_k' = w_k, \quad w_l' = w_k + w_l \quad \text{и} \quad w_m' = w_m \quad \text{для} \quad m \neq k, l; \tag{3.12}$$

если же $x \in \triangle_l^{kl}$, то – вид

$$w'_k = w_k + w_l, \quad w'_l = w_l \quad \text{и} \quad w'_m = w_m \quad \text{для} \quad m \neq k, l. \tag{3.13}$$

Из условия $x \in \triangle^{kl}$ вытекает, что векторы

$$e'_1 = w'_1 - w'_0, \ldots, \quad e'_D = v'_D - v'_0 \tag{3.14}$$

образуют базис пространства $\mathbb{R}^D$. Пусть A^{kl} – матрица перехода

$$e' = eA^{kl} \tag{3.15}$$

от базиса $\{e_1, \ldots, e_d\}$ к базису $\{e'_1, \ldots, e'_d\}$ из (3.14). В равенстве (3.15) слева указана строка $e' = (e'_1 \ldots e'_d)$, а справа – произведение строки $e = (e_1 \ldots e_d)$ на $d \times d$-матрицу A^{kl}. Данная матрица имеет две *специализации*

$$A^{kl} = A_k^{kl} \quad \text{или} \quad A_l^{kl} \tag{3.16}$$

в зависимости от принадлежности x области $\triangle_k^{kl}$ или $\triangle_l^{kl}$:

для $1 \leqslant k < l \leqslant d$

$$A_k^{kl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_1 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & 1_{kk} & 1 - x_k & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0_{lk} & 1 - x_l & 0 \\ & & & \ddots \\ 0 & 0 & -x_d & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.17}$$

$$A_l^{kl} = \begin{pmatrix} 1 & -x_1 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & 1 - x_k & 0_{kl} & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 1 - x_l & 1_{ll} & 0 \\ & & & \ddots \\ 0 & -x_d & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{3.18}$$

для $k = 0$ и $1 \leqslant l \leqslant d$

$$A_0^{0l} = \begin{pmatrix} 1 & & -x_1 & & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & 1 - x_l & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & -x_d & & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

$$A_l^{0l} = \begin{pmatrix} 1 + x_1 & x_1 & & x_1 & & x_1 \\ x_2 & 1 + x_2 & & x_2 & & x_2 \\ & & \ddots & & & \\ -1 + x_l & -1 + x_l & & x_l & & -1 + x_l \\ & & & & \ddots & \\ x_d & & & x_d & & 1 + x_d \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

В координатах формула перехода (3.15) примет вид

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_d \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{kl} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}. \tag{3.21}$$

Здесь, чтобы не усложнять обозначения, обратные матрицы $(A^{kl})^{-1}$ для A^{kl} обозначили через $\mathcal{A}^{kl}$. С помощью обратных матриц $\mathcal{A}^{kl}$ можно для производной звезды w' из (3.11) определить *нормированную звезду*

$$\mathbf{w}' = \{\mathbf{w}'_0, \mathbf{w}'_1, \ldots, \mathbf{w}'_d\} \tag{3.22}$$

с *центром* $x' = (x'_1, \ldots, x'_d)$, вычисляемым по формуле

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_d \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{kl} \begin{pmatrix} -w'_{01} \\ \vdots \\ -w'_{0d} \end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

где в правом столбце использованы координаты вектора

$$w'_0 = (w'_{01}, \ldots, w'_{0d})$$

из производной звезды $w' = \{w'_0, w'_1, \ldots, w'_d\}$, определнной в (3.11). Если вектор w'_0 сохраняется неизменным $w'_0 = w_0$, то в формуле (3.21) выбирается центр $x = (x_1, \ldots, x_d) = -w_0 = -w'_0$ первоначальной звезды w. Нормированная звезда $\mathbf{w}'$, как и w, имеет лучи $\mathbf{w}'_m = e_m - x'$

для $0 \leqslant m \leqslant d$, выходящими теперь уже из нового центра x' в вершины симплекса $\triangle$. Определение (3.22) звезды $\mathbf{w}'$ корректно, поскольку по определению (1.1) точка x' принадлежит внутренней области $\triangle^{\rm int}$ треугольника $\triangle$.

В явном виде координаты $(x'_1, \dots, x'_d) = \delta^{kl}(x_1, \dots, x_d)$ центра x' нормированной звезды $\mathbf{w}'$ из (3.22) вычисляются через *дробно-линейные преобразования*:

для $1 \leqslant k < l \leqslant d$ –

$$\begin{aligned} \delta_k^{kl}(x_1, \dots, x_d) &= \left(\tfrac{x_1}{1-x_l}, \dots, \tfrac{x_k - x_l}{1-x_l}, \dots, \tfrac{x_d}{1-x_l}\right), \\ \delta_l^{kl}(x_1, \dots, x_d) &= \left(\tfrac{x_1}{1-x_k}, \dots, \tfrac{x_l - x_k}{1-x_k}, \dots, \tfrac{x_d}{1-x_k}\right), \end{aligned} \tag{3.24}$$

где элементы $\frac{x_k - x_l}{1-x_l}$ и $\frac{x_l - x_k}{1-x_k}$ стоят соответственно на k и l местах;

для $k = 0$ и $1 \leqslant l \leqslant d$ –

$$\begin{aligned} \delta_0^{0l}(x_1, \dots, x_d) &= \left(\tfrac{x_1}{1-x_l}, \dots, \tfrac{x_d}{1-x_l}\right), \\ \delta_l^{0l}(x_1, \dots, x_d) &= \left(\tfrac{x_1}{x_1 + \dots + x_d}, \dots, \tfrac{x_1 + \dots + 2x_l + \dots + x_d - 1}{x_1 + \dots + x_d}, \dots, \tfrac{x_d}{x_1 + \dots + x_d}\right), \end{aligned} \tag{3.25}$$

где в последнем случае средний элемент стоит на l месте.

Преобразования (3.24), (3.25) представляют собою многомерный аналог одномерных [6, 7] и двумерных возвратных отображений [1].

3.4. Возвратные отображения. Дробно-линейные преобразования (3.24), (3.25) задают

$$\triangle \xrightarrow{\delta^{kl}} \triangle : \quad x \mapsto x' = \delta^{kl}(x) \tag{3.26}$$

$\frac{(d+1)d}{2}$ отображений δ^{kl}, нумеруемых индексами $0 \leqslant k < l \leqslant d$:

$$\delta^{kl}(x) = \begin{cases} \delta_k^{kl}(x), & \text{если} \quad x \in \triangle_k^{kl}, \\ \delta_l^{kl}(x), & \text{если} \quad x \in \triangle_l^{kl}, \end{cases} \tag{3.27}$$

где $\triangle_k^{kl}$ и $\triangle_l^{kl}$ – открытые области из базисного симплекса $\triangle$, определенные в (3.8). Таким образом, областью определения отображения δ^{kl} является открытая двусвязная область $\triangle^{kl} \subset \triangle$ из (3.10) и, значит, δ^{kl} определены почти всюду в симплексе $\triangle$, исключая его границы и медианную гиперплоскость μ^{kl}, определенную в (3.9).

§4. Дробно-линейные и проективные преобразования

4.1. Матрицы возвратных отображений. На языке $(d+1, d+1)$-матриц

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,d+1} \\ & \dots & \\ a_{d+1,1} & \dots & a_{d+1,d+1} \end{pmatrix}$$

дробно-линейные преобразования (3.24), (3.25) удобно переписать в свернутом виде

$$M\langle x\rangle = \left(\frac{\lambda_1(M,x)}{\lambda_{d+1}(M,x)}, \dots, \frac{\lambda_d(M,x)}{\lambda_{d+1}(M,x)}\right), \tag{4.1}$$

где $\lambda_i(M,x) = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{id}x_d + a_{i,d+1}$ – линейные формы. В данном случае – неоднородные формы, поскольку мы здесь неявно используем специализацию $x_{d+1} = 1$. В матричной форме (4.1) удобно представляется ассоциативное свойство таких преобразований

$$M_1\langle M_2\langle x\rangle\rangle = (M_1 \cdot M_2)\langle x\rangle, \tag{4.2}$$

где через $M_1 \cdot M_2$ обозначается произведение матриц M_1 и M_2. Поскольку $E_{d+1}\langle x\rangle = x$ для единичной матрицы E_{d+1} порядка $d+1$, то из свойства (4.2) следует, что для $x \mapsto x' = M\langle x\rangle$ обратным отображением будет

$$x' \mapsto x = M^{-1}\langle x'\rangle. \tag{4.3}$$

Согласно определению (4.1), дробно-линейные преобразования (3.24), (3.25) имеют следующие матрицы:

для $0 < k < l \leqslant d$

$$\widehat{\delta}_k^{kl} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{kk} & 0 & -1_{kl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0_{lk} & 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\delta}_l^{kl} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{kk} & 0 & 0_{kl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1_{lk} & 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{4.4}$$

для $k = 0$ и $1 \leqslant l \leqslant d$

$$\widehat{\delta}_0^{0l} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\delta}_l^{0l} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 2_{ll} & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Все матрицы (4.4), (4.5) имеют целые коэффициенты и единичный определитель и, следовательно, они принадлежат группе унимодулярных матриц $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$.

4.2. Обратные возвратные отображения. Отображения δ^{kl} являются дважды накрывающими симплекс $\triangle$, а их специализации δ_*^{kl} задают уже биекции

$$\delta_k^{kl} : \triangle_k^{kl} \xrightarrow{\sim} \triangle^{\mathrm{int}}, \qquad \delta_l^{kl} : \triangle_l^{kl} \xrightarrow{\sim} \triangle^{\mathrm{int}}. \tag{4.6}$$

Поэтому для них существуют *обратные возвратные отображения*

$$\partial_k^{kl} : \triangle^{\mathrm{int}} \xrightarrow{\sim} \triangle_k^{kl}, \qquad \partial_l^{kl} : \triangle^{\mathrm{int}} \xrightarrow{\sim} \triangle_l^{kl}. \tag{4.7}$$

Матрицами для отображений (4.7) будут обратные матрицы для соответствующих возвратных отображений (4.4), (4.5):

для $0 < k < l \leqslant d$

$$\widehat{\partial}_k^{kl} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{kk} & 0 & 1_{kl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0_{lk} & 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\partial}_l^{kl} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{kk} & 0 & 0_{kl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{lk} & 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{4.8}$$

для $k = 0$ и $1 \leqslant l \leqslant d$

$$\widehat{\partial}_0^{0l} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\partial}_l^{0l} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{1} & 0_{ll} & -\mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ -\mathbf{1} & -1 & -\mathbf{1} & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Как уже отмечалось, все возвратные отображения δ_*^{kl} имеют унимодулярные матрицы (4.4), (4.5). Поэтому матрицы (4.8), (4.9) обратных отображений ∂_*^{kl} снова будут унимодулярными с единичным определителем.

Через дробно-линейные преобразования обратные отображения ∂_*^{kl} запишутся в следующем виде: для $1 \leqslant k < l \leqslant d$

$$\begin{aligned} \partial_k^{kl}(x_1, \ldots, x_d) &= \left(\frac{x_1}{x_l + 1}, \ldots, \frac{x_k + x_l}{x_l + 1}, \ldots, \frac{x_d}{x_l + 1} \right), \\ \partial_l^{kl}(x_1, \ldots, x_d) &= \left(\frac{x_1}{x_k + 1}, \ldots, \frac{x_k + x_l}{x_k + 1}, \ldots, \frac{x_d}{x_k + 1} \right), \end{aligned} \tag{4.10}$$

где элементы $\frac{x_k+x_l}{x_l+1}$ и $\frac{x_k+x_l}{x_k+1}$ стоят соответственно на k и l местах;

для $k = 0$ и $1 \leqslant l \leqslant d$

$$\begin{aligned} \partial_0^{0l}(x_1, \ldots, x_d) &= \left(\frac{x_1}{x_l + 1}, \ldots, \frac{x_d}{x_l + 1} \right), \\ \partial_l^{0l}(x_1, \ldots, x_d) &= \left(\frac{x_1}{s + 2}, \ldots, \frac{s - x_l + 1}{s + 2}, \ldots, \frac{x_d}{s + 2} \right), \end{aligned} \tag{4.11}$$

где в последнем случае средний элемент $\frac{s-x_l+1}{s+2}$ стоит на l месте и $s = x_1 + \ldots + x_d$.

4.3. Матрицы симметрий базисного симплекса. Симметрии $s = s_\sigma$ из группы $S_\triangle$ базисного симплекса $\triangle = \triangle_d$, определяемые формулой (3.7), также можно представить в матричной форме (4.1). Для них $(d+1, d+1)$-матрицами будут

$$\widehat{s} = \widehat{s}_\sigma = \begin{pmatrix} & & \ldots & & & \\ 0 & \ldots & 1_{i,\sigma(i)} & \ldots & 0 & 0_{i,d+1} \\ & & \ldots & & & \\ -1 & \ldots & -1 & \ldots & -1 & 1_{j,d+1} \\ & & \ldots & & & \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1_{d+1,d+1} \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

Здесь i-строка состоит из 0, кроме элемента $1 = 1_{i,\sigma(i)}$ на $\sigma(i)$ месте в случае $\sigma(i) \leqslant d$. Если $\sigma(j) = d+1$, то строка с номером $j \leqslant d$ принимает иной вид $(-1, \ldots, -1, 1)$. Последняя $(d+1)$-строка для всех $\sigma \in S_{d+1}$ имеет вид $(0, \ldots, 0, 1)$.

Матрицы (4.12) симметрий симплекса $\triangle_D$ отличаются от матриц возвратных отображений (4.4), (4.5) нижней строкой $(0, \ldots, 0, 1)$. Их определители вычисляются по формуле $\det(\widehat{s}_\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma)$, где справа указан знак $\operatorname{sign}(\sigma) = \pm 1$ соответствующей подстановки σ из S_{d+1}. Поэтому все матрицы симметрий (4.12) принадлежат группе $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$.

Кроме самих матриц (4.12) нам потребуются еще их *однородные части* – верхние левые $(d \times d)$-блоки:

$$\check{s} = \check{s}_\sigma = \begin{pmatrix} & & \ldots & & \\ 0 & \ldots & 1_{i,\sigma(i)} & \ldots & 0_{i,d} \\ & & \ldots & & \\ -1 & \ldots & -1 & \ldots & -1_{j,d} \\ & & \ldots & & \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Матрицы (4.13) порождают группу $S_{\check{\triangle}}$ аффинных (однородных) симметрий центрированного симплекса $\check{\triangle} = \check{\triangle}_d$, получающегося сдвигом базисного симплекса $\triangle = \triangle_d$ на вектор $\left(-\frac{1}{d+1}, \ldots, -\frac{1}{d+1}\right)$. Следовательно, симплекс $\check{\triangle}$ имеет центр в начале координат $(0, \ldots, 0)$ – неподвижной точке всех симметрий (4.13).

4.4. Иррациональные точки. Аналогично определению (2.17) для векторов, точку $x = (x_1, \ldots, x_d)$ из $\mathbb{R}^d$ назовем *иррациональной*, если числа

$$1, x_1, \ldots, x_d \quad \textit{линейно независимы над кольцом} \quad \mathbb{Z}. \tag{4.14}$$

В [1] доказано следующее свойство инвариантности.

Лемма 4.1. *Если точка* $x = (x_1, \ldots, x_d)$ *иррациональна* (4.14) *и матрица* M *принадлежит целочисленной унимодулярной группе*

$$\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z}),$$

то

1) *для точки* x *определен ее образ* $M\langle x\rangle$ *относительно дробно-линейного отображения* (4.1)*; и*

2) *соответствующая точка* $x' = M\langle x\rangle$ *снова будет иррациональной.*

§5. Возвратные матрицы

5.1. Единицы алгебраических полей. Пусть

$$f_a(x) = x^{d+1} + a_d x^d + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{5.1}$$

будет многочленом степени $d+1 \geqslant 3$ с натуральными коэффициентами $a_i = 1, 2, 3, \ldots$ и со свободным членом $a_0 = -1$. Такие $f_a(x)$ являются $\triangle$-*многочленами* [5]. Это означает, что многочлен $f_a(x)$ имеет вещественный корень $f_a(\theta) = 0$ в интервале $0 < \theta < 1$, удовлетворяющий условию

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \triangle^{\mathrm{int}}, \tag{5.2}$$

где $\alpha_1 = \theta^d$, $\alpha_2 = \theta^{d-1}$, …, $\alpha_d = \theta^1$. Если при этом многочлен $f_a(x)$ окажется неприводимым над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, то скажем, что $f_a(x)$ – $\triangle_{\mathrm{irr}}$-*многочлен.* Следовательно, в данном случае его корень θ будет алгебраической иррациональностью степени $d+1$.

Из $\triangle_{\mathrm{irr}}$-условия и ограничения на свободный член $a_0 = -1$ многочлена (5.1) вытекает, что его корень θ является *единицей* нормы $N_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\theta) = (-1)^d$ вещественного алгебраического расширения $\mathbb{Q}(\theta)$ над полем $\mathbb{Q}$ степени $d+1$.

5.2. Возвратные матрицы для алгебраических единиц. Каждому набору $a = (a_d, \dots, a_1, a_0)$ коэффициентов из (5.1) сопоставим квадратную матрицу

$$M(a) = M(a_d, \dots, a_1, a_0) = \begin{pmatrix} -a_d & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

порядка $d+1$. Так как $\det M(a) = (-1)^{d+1} a_0 = \pm 1$, то $M(a)$ принадлежит группе $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$. Из определения (5.3) следует, что столбец $\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы $M(a)$, т.е. выполняется матричное равенство

$$M(a)\widehat{\alpha} = \lambda \widehat{\alpha} \tag{5.4}$$

с собственным значением $\lambda = \theta$.

5.3. Полугруппа $\widehat{\mathcal{D}}$. Обозначим через $\widehat{\mathcal{D}}$ *полугруппу* унимодулярных матриц из $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$, отвечающих преобразованиям δ из полугруппы $\mathcal{D}$. Полугруппа $\widehat{\mathcal{D}}$ содержит группу $\widehat{S}_\triangle$ матриц, соответствующих аффинным симметриям $S_\triangle$ d-мерного симплекса $\triangle$. Если матрица M принадлежит полугруппе $\widehat{\mathcal{D}} \subset \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$, то по определению она допускает разложение в конечное произведение симметрий $\widehat{s} \in \widehat{S}_\triangle$ и *элементарных возвратных матриц* $\widehat{\delta}^{kl}_* \in \widehat{\mathcal{D}}$, определенных в п. 3. Произвольную матрицу M из полугруппы $\widehat{\mathcal{D}}$ также будем называть *возвратной*. Из определения полугруппы $\mathcal{D}$ следует, что такая матрица M будет обязательно унимодулярной. Чтобы избежать длинных записей и сделать их более удобно читаемыми, воспользуемся следующими сокращениями:

$$\widehat{s} \to s, \quad (\widehat{\delta}^{kl}_k)^n \to kl^n, \quad (\widehat{\delta}^{kl}_l)^n \to lk^n \tag{5.5}$$

для $n = 0, 1, 2, \dots$ Например, разложение $M = \widehat{s} \cdot \widehat{\delta}^{k_1 l_1}_{k_1} \cdot (\widehat{\delta}^{k_2 l_2}_{l_2})^3$ примет сокращенный вид $M = s \cdot k_1 l_1 \cdot l_2 k_2^3$.

5.4. Разложение в произведение элементарных возвратных матриц. Наша цель – показать, что матрицы $M(a)$ из (5.3), соответствующие многочленам $f_a(x)$ из (5.1), будут возвратными, т.е. $M(a)$ содержатся в полугруппе $\widehat{\mathcal{D}}$.

Предложение 5.1. *Пусть $M(a)$ – матрицы (5.3) с натуральными элементами $a_i = 1, 2, 3, \dots$ для $i = 1, \dots, d$ и $a_0 = -1$. Тогда в обозначениях (5.5) матрицы $M(a)$ имеют следующие разложения:*

$$M(a) = F \cdot V(a), \tag{5.6}$$

где

$$F = s_\sigma \cdot \underline{d, d-1} \cdot \ldots \cdot \underline{d, 1} \cdot \underline{d, 0} \tag{5.7}$$

– остов (frame) разложения (5.6), а

$$V(a) = 01^{a_d - 1} \cdot 02^{\,a_{d-1}-1} \cdot \ldots \cdot 0d^{\,a_1 - 1} \tag{5.8}$$

– динамическая или переменная часть разложения (5.6). В правой части равенства (5.7) использованы сокращения $\underline{d, k} = \widehat{\delta}_d^{kd}$ и s_σ – симметрия (3.7) для циклической подстановки $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & d \\ d & 0 & \dots & d-1 \end{pmatrix}$

Замечание 5.1. Множитель F в $M(a)$ назван *остовом* разложения (5.6), поскольку он сохраняется при изменениях параметров $a_1, \dots, a_d$.

Доказательство. В силу (4.4) записываем

$$\underline{dl} = \widehat{\delta}_d^{ld} = \begin{pmatrix} E_{d-1} & 0 \\ -\mathbf{1}_l & E_2 \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

для $0 < l < d$, где $\mathbf{1}_l = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ – $2 \times (d-1)$-матрица с единичным столбцом на l месте. Из (5.9) следует правило умножения

$$\widehat{\delta}_d^{ld} \cdot \widehat{\delta}_d^{l'd} = \begin{pmatrix} E_{d-1} & 0 \\ -\mathbf{1}_l - \mathbf{1}_{l'} & E_2 \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

и формула коммутативности

$$\widehat{\delta}_d^{ld} \cdot \widehat{\delta}_d^{l'd} = \widehat{\delta}_d^{l'd} \cdot \widehat{\delta}_d^{ld} \tag{5.11}$$

для любых $0 < l, l' < d$. Из (5.10) и (5.11) находим произведение

$$\underline{d, d-1} \cdot \underline{d, d-2} \cdot \ldots \cdot \underline{d, 1} = \begin{pmatrix} E_{d-1} & 0 \\ -\mathbf{1} & E_2 \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

с $2 \times (d-1)$-матрицей $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. По определению (4.5) находим

$$\underline{d, 0} = \widehat{\delta}_d^{0d} = \begin{pmatrix} E_{d-1} & 0 \\ \mathbf{1} & E_2' \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

с блоком $E_2' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Соединяя (5.12) с (5.13) получаем

$$\underline{d, d-1} \cdot \ldots \cdot \underline{d, 1} \cdot \underline{d, 0} = \begin{pmatrix} E_{d-1} & 0 \\ 0 & E_2' \end{pmatrix}. \tag{5.14}$$

По определению симметрии

$$\widehat{s_1} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

имеют блоки

$$S_{11} = \begin{pmatrix} -1 & \ldots & -1 & -1 \\ 1 & \ldots & 0 & 0 \\ & \ldots & & \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \\ 0 & 0 & \\ & \ldots & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix},$$

$$S_{21} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где S_{11} и S_{22} – квадратные матрицы размеров $d-1$ и 2 соответственно. Перемножая равенства (5.14) и (5.15) получаем для остова (5.7) равенство

$$F = \widehat{s_1} \cdot \underline{d, d-1} \cdot \ldots \cdot \underline{d, 1} \cdot \underline{d, 0} = \begin{pmatrix} -1 & \ldots & -1 & 1 \\ 1 & \ldots & 0 & 0 \\ & \ldots & & \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.16}$$

Таким образом, остов F равен

$$M(1, \ldots, 1, -1) = F \tag{5.17}$$

– матрице $M(a)$ из (5.3) с элементами $a_d = 1, \ldots, a_1 = 1, a_0 = -1$.

Переходим к вычислению динамической $V(a)$ части (5.8) разложения (5.6). По определению имеем

$$\underline{0l} = \widehat{\delta}_0^{0l} = \begin{pmatrix} E_d & 0 \\ -1_l & 1 \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

для $0 < l \leqslant d$, где $1_l = (0 \ldots 1 \ldots 0)$ – строка с единицей на l месте. Из (5.18) следует правило умножения

$$\widehat{\delta}_0^{0l} \cdot \widehat{\delta}_0^{0l'} = \begin{pmatrix} E_d & 0 \\ -1_l - 1_{l'} & 1 \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

и формула коммутативности

$$\widehat{\delta}_0^{0l} \cdot \widehat{\delta}_0^{0l'} = \widehat{\delta}_0^{0l'} \cdot \widehat{\delta}_0^{0l} \tag{5.20}$$

для любых $0 < l, l' \leqslant d$. Из (5.19) и (5.20) находим произведение

$$\underline{01}^{b_1} \cdot \underline{02}^{b_2} \cdot \ldots \cdot \underline{0d}^{\,b_d} = \begin{pmatrix} E_d & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

– матрица со строкой $b = (b_1 b_2 \ldots b_d)$. Используя (5.21) получаем матрицу

$$F \cdot \underline{01}^{b_1} \cdot \underline{02}^{b_2} \cdot \ldots \cdot \underline{0d}^{\,b_d} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

с блоками

$$M_{11} = \begin{pmatrix} -1 - b_1 & \ldots & -1 - b_{d-1} & -1 - b_d \\ 1 & \ldots & 0 & 0 \\ & \ldots & & \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{21} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{22} = \begin{pmatrix} r0 \end{pmatrix},$$

где M_{11} – квадратная матрица размера d. Если принять во внимание равенство $F = M(1, \ldots, 1, -1)$ и обозначение (5.3), то соотношение (5.22) можно переписать в виде рекуррентной формулы

$$M(1 + b_1, \ldots, 1 + b_d, -1) = M(1, \ldots, 1, -1) \cdot \underline{01}^{b_1} \cdot \underline{02}^{b_2} \cdot \ldots \cdot \underline{0d}^{\,b_d}. \tag{5.23}$$

Подставляя в нее $b_1 = a_d - 1$, $b_2 = a_{d-1} - 1, \ldots$, $b_d = a_1 - 1$ и используя для произведения (5.21) обозначение (5.8), получаем нужное разложение (5.6). □

§6. Неподвижные точки возвратных матриц

6.1. Соответствие и специализации. Выписанные ранее разложения матрицы $M(a)$ в виде произведения симметрии $\widehat{s}$ и элементарных возвратных матриц $\widehat{\delta}_*^{kl}$ задают соответствие

$$M(a) \longrightarrow \delta_s, \tag{6.1}$$

где отображение $\delta_s = s\delta$ принадлежит расширенной полугруппе $\mathcal{D}$ и равно композиции симметрии s и некотрого отображения δ из полугруппы $\mathcal{D}_\delta \subset \mathcal{D}$. Более того, соответствие (6.1) определяет также и специализацию δ_* второго отображения: δ равно произведению элементарных возвратных отображений δ^{kl}, а его специализация δ_* равна произведению специализаций δ_*^{kl}, определяемых элементарными возвратными матрицами $\widehat{\delta}_*^{kl}$, содержащимися в правой части разложений матрицы $M(a)$.

6.2. Неподвижные точки.

Предложение 6.1. *Пусть* $f(x)$ – $\triangle_{\mathrm{irr}}$*-многочлен* (5.1) *с коэффициентами* $a_d, \ldots, a_1, a_0$ *из предложения* 5.1 *и* α – *точка из области* $\triangle^{\mathrm{int}}$*, определенная в* (5.2)*. Кроме того, пусть* $M(a)$ – *возвратная матрица* (5.3) *с параметром* $a = (a_d, \ldots, a_1, a_0)$ *и* $\delta_s = s\delta$ – *отвечающее ей отображение* (6.1) *из полугруппы* $\mathcal{D}$*. Тогда точка* α *удовлетворяет условиям:*

$$\alpha \in \triangle(\delta_{s*}), \tag{6.2}$$

где $\triangle(\delta_{s*})$ – *область определения специализации* $\delta_{s*} = s\delta_*$ *отображения* δ_s*, задаваемой соответствием* (6.1)*, и*

$$\delta_{s*}\alpha = \alpha, \tag{6.3}$$

т.е. точка α *допускается специализацией* δ_{s*} *и является неподвижной точкой* $\delta_s\alpha = \alpha$ *отображения* δ_s*.*

Доказательство. По условию точка α удовлетворяют $\triangle_{\mathrm{irr}}$-условию и по построению (5.3) матрицы $M(a)$ отвечающий точке α вектор-столбец $\widehat{\alpha}$ является (5.4) собственным $M(a)\widehat{\alpha} = \lambda\widehat{\alpha}$ для матрицы $M(a)$ с собственным значением $\lambda = \theta \neq 0$. Поэтому можно применить многомерный вариант второй части теоремы 5.1, из которой вытекают оба утверждения (6.2) и (6.3). □

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_d)$ – произвольная точка с координатами из $\mathbb{R}$. Обозначим через $F_x = \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_d)$ расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ добавлением к нему чисел $x_1, \ldots, x_d$. Данное расширение состоит из всех чисел вида $\frac{f(x_1,\ldots,x_d)}{g(x_1,\ldots,x_d)}$, где f и g являются многочленами от D переменных с коэффициентами из поля $\mathbb{Q}$. Множество F_x также будет полем. Определим *степень* (над $\mathbb{Q}$) точки x равенством $\deg(x) = \deg F_x$, где $\deg F_x = [F_x : \mathbb{Q}]$ – степень поля F_x над $\mathbb{Q}$. Если $\deg(x) = 1$, то, очевидно, точка x имеет координаты из $\mathbb{Q}$.

В [1] доказана

Теорема 6.1. *Пусть точка x будет иррациональной* (4.14)*. Если она при этом является неподвижной точкой некоторого отображения δ из полугруппы $\mathcal{D}$, то ее степень* $\deg(x) = d + 1$.

Замечание 6.1. Теорема 6.1 представляет собою многомерное обобщение теоремы Лагранжа на алгебраические иррациональности.

§7. Дифференцирования и нормирования звезды

7.1. Коммутативная диаграмма. Далее будем предполагать, что специализация δ_*, задаваемая точкой α, имеет вид

$$\delta_* = \delta_p \cdots \delta_2 \delta_1, \tag{7.1}$$

где $\delta_i = \delta_*^{k_i l_i}$ – специализации, определяемые соответствием (6.1). Заметим, что отображение (7.1) не содержит симметрии s из группы $S_\triangle$.

Рассмотрим следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{w} & \xrightarrow{\delta_1} & \mathbf{w}^{(1)} & \xrightarrow{\delta_2} & \ldots & \xrightarrow{\delta_p} & \mathbf{w}^{(p)} \\ \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow A^{(1)} & & & & \downarrow A^{(p)} \\ v & \xrightarrow{\sigma_1} & v^{(1)} & \xrightarrow{\sigma_2} & \ldots & \xrightarrow{\sigma_p} & v^{(p)} \end{array} \tag{7.2}$$

Здесь использовали обозначения: $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(0)}$ – начальная звезда с центром в точке $x = x^{(0)} = \alpha$; $\mathbf{w}^{(1)} = \delta_1 \mathbf{w}^{(0)}$ – звезда с центром в $x^{(1)} = \delta_1 x^{(0)}$; и т.д., $\ldots$; $\mathbf{w}^{(p)} = \delta_p \mathbf{w}^{(p-1)}$ – звезда с центром в $x^{(p)} = \delta_p x^{(p-1)}$. Кратко цепочку преобразований из верхней строки диаграммы (7.2) можем записать в виде композиции

$$\mathbf{w}^{(p)} = \delta_p(\ldots(\delta_2(\delta_1 v))) = \delta_* \mathbf{w}, \quad x^{(p)} = \delta_p(\ldots(\delta_2(\delta_1 x))) = \delta_* x \tag{7.3}$$

из p возвратных отображений δ_*. Так определенные $\mathbf{w}^{(i)}$ для

$$i = 1, \ldots, p$$

будут *нормированными звездами.*

Нижняя строка диаграммы (7.2) содержит обычные (см. определение 1.2) или *динамические* звезды $v^{(i)}$ для $i = 1, \ldots, p$, где $v = v^{(0)} = \mathbf{w}$; $v^{(1)} = v^{(0)\sigma_1}$ – производная звезда относительно дифференцирования $\sigma_1 = \{k_1, l_1\}$, ассоциированного с отображением $\delta_1 = \delta_*^{k_1 l_1}$; и т.д., $\ldots$; $v^{(p)} = v^{(p-1)\sigma_p}$ – производная звезда относительно $\sigma_p = \{k_p, l_p\}$, ассоциированного с $\delta_p = \delta_*^{k_p l_p}$. Следовательно, имеем представление

$$v^{(p)} = ((v^{\sigma_1})^{\sigma_2} \ldots)^{\sigma_p} = v^{\sigma} \tag{7.4}$$

звезды $v^{(p)}$ через последовательность дифференцирований

$$\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_p,$$

ассоциированную с отображением δ_* из (6.1).

Теперь опишем вертикальные стрелки из диаграммы (7.2). Первая стрелка обозначет тождественное отображение id, т.е. $v = \mathrm{id}\,\mathbf{w} = \mathbf{w}$. Далее, выпишем матрицы $A^{(p)}$:

$A^{(1)} = A_*^{k_1 l_1}(x^{(0)})$ – матрица (3.16), зависящая от начальной точки $x = x^{(0)}$;

$A^{(2)} = A_*^{k_1 l_1}(x^{(0)})A_*^{k_2 l_2}(x^{(1)})$ – матрица, уже зависящая от двух точек $x = x^{(0)}$ и $x^{(1)}$; и т.д., $\ldots$;

последняя матрица $A^{(p)} = A_*^{k_1 l_1}(x^{(0)})A_*^{k_2 l_2}(x^{(1)})\cdots A_*^{k_p l_p}(x^{(p-1)})$ определяется всеми предыдущими точками $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(p-1)}$. Таким образом, по определению матрицы $A^{(i)}$ определяют аффинные изоморфизмы

$$A^{(i)}: \quad \mathbf{w}^{(i)} \ \overset{\longrightarrow}{\sim}\ v^{(i)} \tag{7.5}$$

звезд $\mathbf{w}^{(i)}$ и $v^{(i)}$ из верхней и нижней строк диаграммы (7.2) для всех $i = 1, \ldots, p$.

В [1] доказана следующая

Лемма 7.1. *Диаграмма* (7.2) *является коммутативной.*

7.2. Периодические звезды. Из предложения 6.1 следует, что нормированная звезда $\mathbf{w}^{(p)}$ из диаграммы (7.2) будет симметричной

$$\mathbf{w} = \check{s}\mathbf{w}^{(p)} \tag{7.6}$$

исходной звезде $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(0)}$ относительно преобразования $\check{s}$ из группы $S_{\check{\triangle}}$ аффинных однородных симметрий (4.13) симплекса $\check{\triangle}$. В этом случае будем говорить, что звезда $\mathbf{w}$ *периодична* относительно отображения δ_s из (6.1), а звезда $v = \mathbf{w}$ *периодична* относительно дифференцирования σ из (7.4), при этом $p > 0$ будет *периодом* звезды $v = \mathbf{w}$.

Заметим, что однородные преобразования $\check{s}$ из (4.13) действуют на векторы звезды $\mathbf{w}$, а преобразования s из группы $S_\triangle$ аффинных неоднородных симметрий (3.7) действуют на точки симплекса $\triangle$. В формуле (7.6) звезда $\mathbf{w}$, рассматривается как совокупность из $d + 1$ векторов $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{w}_1, \ldots,$ $\mathbf{w}_d$.

7.3. Калибровочная матрица. Поскольку $v^{(p)} = A^{(p)}\mathbf{w}^{(p)}$ по формуле (7.5), то с помощью равенства (7.6) получаем

$$v^{(p)} = A^{(p)}\mathbf{w}^{(p)} = A^{(p)}\check{s}^{-1}\mathbf{w}.$$

Поэтому, принимая во внимание равенство $\mathbf{w} = v$, можем записать

$$v^{(p)} = \mathbf{A}v, \tag{7.7}$$

где матрица $\mathbf{A} = A^{(p)}\check{s}^{-1}$ определяет аффинное однородное отображение звезд $\mathbf{A} : v \mapsto v^{(p)}$. Равенство (7.7) означает, что производная звезда $v^{(p)}$ из диаграммы (7.2) *аффинно изоморфна* начальной звезде v. По этой причине $\mathbf{A}$ называется *калибровочной матрицей* периодической звезды v.

Далее мы хотим воспользоваться равенством (7.7) несколько раз. С этой целью рассмотрим бесконечную периодическую комбинированную последовательность $\xi = \{\xi_0, \xi_1, \ldots\}$ с периодом p, где $\xi_1 = \sigma_1$, $\xi_2 = \sigma_2$, …, $\xi_p = \sigma_p\check{s}^{-1}$, $\xi_{p+1} = \sigma_1, \ldots$ С помощью последовательности ξ определим для звезды v по индукции звезды $v^{(i)}$ для $i = 0, 1, 2, \ldots$, полагая

$$v^{(i)} = (v^{(i-1)})^{\xi_i} \quad \text{для} \quad n \geqslant 1, \tag{7.8}$$

где $v^{(0)} = v$ и $v'^{\xi_i} = \check{s}(v'^{\sigma_p})$ для $i = p, 2p, 3p, \ldots$. Чтобы не вводить нового термина, будем так определенные звезды $v^{(i)}$ продолжать называть *производными* для звезды v.

В [1] доказана следующая

Теорема 7.1. *Пусть звезда v периодична относительно дифференцирования σ из* (7.4) *с периодом p, и пусть $\mathbf{A}$ – ее калибровочная матрица, определенаая в* (7.7). *Тогда для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$ справедлива формула*

$$v^{(i)} = \mathbf{A}^a v^{(b)}, \tag{7.9}$$

если $i = ap + b$, где $a = 0, 1, 2, \ldots$ и $b = 0, \ldots, p-1$.

§8. Метрические характеристики ядер производных разбиений тора

8.1. Генерации вкладывающихся разверток. По определению (2.22) и теореме 2.3 производные звезды $v^{(i)}$ из (7.8) вкладываются

$$v^{(i)} \overset{\text{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d \tag{8.1}$$

в тор $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. По соглашению (2.19) это означает, что порождаемые ими развертки тора или иначе – многогранники, ядра разбиений тора –

$$T^{(i)} = T(v^{(i)}) \tag{8.2}$$

вкладываются в тор $T^{(i)} \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d$. Из построения (7.8) производной звезды $v^{(i)} = \{v_0^{(i)}, v_1^{(i)}, \ldots, v_d^{(i)}\}$ следует, что ее векторы перекладывания $v_k^{(i)}$ имеют вид

$$v_k^{(i)} \equiv m_k^{(i)} \alpha^- \bmod \mathbb{Z}^d \tag{8.3}$$

для $k = 0, 1, 2$ с некоторыми коэффициентами $m_k^{(i)} = 1, 2, 3, \ldots$, которые назовем ***порядками*** лучей $v_k^{(i)}$ звезды $v^{(i)}$. Здесь $\alpha^- = -\alpha \in \mathbb{R}^d$ – вектор сдвига $S = S_{\alpha^-}$ тора $\mathbb{T}^d$ и порядки $m_k^{(i)}$ вычисляются по правилу (1.4). Сумму данных коэффициентов

$$m^{(i)} = m_0^{(i)} + m_1^{(i)} + \ldots + m_d^{(i)} \tag{8.4}$$

назовем ***порядком*** производной звезды $v^{(i)}$. С ним свяжем конечные орбиты

$$\mathrm{Orb}'(0, m^{(i)}) = \{x_j = S^j(0) \equiv j\alpha^- \bmod \mathbb{Z}^d; j = 1, 2, \ldots, m^{(i)} - 1\}. \tag{8.5}$$

Далее нас будут интересовать метрические характеристики ядер производных разбиений $T^{(i)}$ из (8.2), а именно поведение их радиусов и объемов при $i \to \infty$. Для этого потребуются спектральные радиусы матриц и формулы объемов ядер.

8.2. Спектральный радиус. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ – собственные значения невыродженной комплексной $d \times d$-матрицы A и

$$\varrho(A) = \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_d|\} \tag{8.6}$$

– ее *спектральный радиус*. В случае простого спектра, когда $\lambda_i \neq \lambda_{i'}$ для любых $i \neq i'$, матрицу A можно представить в ввиде произведения

$$A = MJM^{-1} \tag{8.7}$$

диагональной матрицы $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \ldots & \lambda_d \end{pmatrix}$ и некоторой невырожденной комплексной матрицы M. Введем в пространстве $\mathbb{C}^d$ многогранную *s-метрику* $|x|_s = |x_1| + \ldots + |x_d|$, обладающую свойством

$$|Mx|_s \leqslant d\,||M||_{\max} \cdot |x|_s, \tag{8.8}$$

где $M = (m_{ij})$ – произвольная комплексная $d \times d$-матрица, $Mx = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ и $||M||_{\max} = \max_{i,j} |m_{ij}|$ – max-*норма* матрицы M. Используя разложение (8.7) и неравенство (8.8) имеем

$$\begin{aligned} |Ax|_s = |M(JM^{-1}x)|_s \leqslant d\,||M||_{\max}|J(M^{-1}x)|_s \leqslant \\ \leqslant d^2||M||_{\max}||J||_{\max}|M^{-1}x|_s \\ \leqslant d^3||M||_{\max}||M^{-1}||_{\max}||J||_{\max}|x|_s. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Так как $||J||_{\max} = \max_i |\lambda_i| = \varrho(A)$, то приходим к следующему неравенству

$$|Ax|_s \leqslant c_s(M)\varrho(A)|x|_s \tag{8.10}$$

с константой $c_s(M) = d^3||M||_{\max}||M^{-1}||_{\max}$. Снова используя разложение (8.7) можем записать $A^n = MJ^nM^{-1}$, откуда выводим

$$\varrho(J^n) = \varrho(A)^n, \tag{8.11}$$

поскольку $\varrho(J^n) = \varrho(J)^n = \varrho(A)^n$. Теперь еще раз применяя схему (8.9), (8.10) и равенство (8.11) получаем общее неравенство

$$|A^nx|_s \leqslant c_s(M)\varrho(A)^n|x|_s \tag{8.12}$$

для любой степени $n = 1, 2, 3, \ldots$ Неравенство (8.12) также переносится и на евклидову метрику $|x| = (|x_1|^2 + \ldots + |x_d|^2)^{1/2}$. Повторяя рассуждения (8.9)-(8.12) и используя неравенства $\frac{1}{\sqrt{d}}|x|_s \leqslant |x| \leqslant |x|_s$, можно получить аналог неравенства (8.12) для евклидовой метрики

$$|A^nx| \leqslant c(M)\varrho(A)^n|x| \tag{8.13}$$

для любой степени $n = 1, 2, 3, \ldots$ с другой увеличенной константой $c(M) = \sqrt{d}\,c(M)_s$.

8.3. Радиусы и объемы производных параллелоэдров. Применим доказанные формулы (8.12) и (8.13) к оценке метрических характеристик производных параллелоэдров $T^{(i)} = T(v^{(i)})$ из (8.2). В соответствии с метрикой $|x|_s$ и $|x|$ будем использовать два *радиуса* $r_s(T^{(i)})$ и $r(T^{(i)})$.

Лемма 8.1. *Если параллелоэдр $T(v)$ порождается звездой*

$$v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\},$$

то его радиус $r_*(T(v))$ *вычисляется по формуле*

$$r_*(T(v)) = \frac{1}{2} \max_{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_d} |\varepsilon_0 v_0 + \varepsilon_1 v_1 + \ldots + \varepsilon_D v_d|_*. \tag{8.14}$$

где $r_*(T(v))$ *может быть любым из радиусов* $r_s(T(v))$ *или* $r(T(v))$ *в зависимости от выбранной метрики* $|x|_* = |x|_s$ *или* $|x|$. *Максимум в* (8.14) *вычисляется по всем наборам* $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d\}$, *таким что* $\varepsilon_i = \pm 1$, *при этом количество отрицательных* ε_i *меняется в интервале* $[1, \ldots, \frac{d+1}{2}]$.

Доказательство. Из определения (2.7) следует, что параллелоэдр $T(v)$ имеет вершины $v_{k_1} + \ldots + v_{k_i}$, где $0 \leqslant k_1 < \ldots < k_i \leqslant d$ и $1 \leqslant i \leqslant d$. Поэтому его центром будет $c(T(v)) = \frac{1}{2}(v_0 + v_1 + \ldots + v_d)$. Радиус же параллелоэдра $r_*(T(v))$ равен максимальной длине векторов вида $w - c(T(v))$, где w пробегает все вершины параллелоэдра $T(v)$. Отсюда выводим формулу (8.14). □

Многогранник $T^{(i)}$ является разверткой тора $\mathbb{T}^d_{L^{(i)}} = \mathbb{R}^d/L^{(i)}$ для решетки $L^{(i)} = \mathbb{Z}[l_1^{(i)}, \ldots, l_d^{(i)}]$ с базисом $l_k^{(i)} = v_k^{(i)} - v_0^{(i)}$ для $k = 1, \ldots, d$, где $v_k^{(i)}$ – лучи звезды $v^{(i)}$ из (8.1). Поэтому *объем* $s(T^{(i)})$ многогранника $T^{(i)}$ равна

$$s(T^{(i)}) = \left| \det \begin{pmatrix} l_{11}^{(i)} & \ldots & l_{1d}^{(i)} \\ & \ldots & \\ l_{d1}^{(i)} & \ldots & l_{dd}^{(i)} \end{pmatrix} \right| \tag{8.15}$$

– объему фундаментальной области решетки $L^{(i)}$, где $l_{kl}^{(i)}$ – координаты базисных векторов $l_k^{(i)}$ для $k = 1, \ldots, d$.

Лемма 8.2. 1. *Если калибровочная матрица* $\mathbf{A}$ *звезды* v *из* (7.7) *имеет различные собственные значения* $\lambda_i \neq \lambda_{i'}$ *для любых* $i \neq i'$, *то для радиусов* $r_*(T^{(i)}) = r_s(T^{(i)})$ *или* $r(T^{(i)})$ *многогранника* $T^{(i)}$ *выполняются следующие оценки*

$$r_*(T^{(i)}) \leqslant c_*(M) \varrho(\mathbf{A})^a r_*(T^{(b)}) \tag{8.16}$$

для $i = ap + b$, *где* $a = 0, 1, 2, \ldots$ *и* $b = 0, \ldots, p-1$. *Здесь константы* $c_*(M)$ *равны* $c_s(M)$ *из* (8.10) *или* $c(M) = \sqrt{d}\,c(M)_s$ *и* $\varrho(A)$ *– спектральный радиус* (8.6) *матрицы* $\mathbf{A}$.

2. *Объем* $s(T^{(i)})$ *многогранника* $T^{(i)}$ *находится по формуле*

$$s(T^{(i)}) = |\det \mathbf{A}|^a s(T^{(b)}), \tag{8.17}$$

где $\det\mathbf{A}$ *обозначает определитель матрицы* $\mathbf{A}$, *удовлетворяющий неравенствам* $0 < |\det\mathbf{A}| < 1$, *а объемы* $s(T^{(b)})$ *находятся по формуле* (8.15).

Доказательство. приведено в [1], где спректральную норму матриц нужно заменить спректральным радиусом. □

§9. Порядковые и калибровочные матрицы

9.1. Определение порядковых матриц. Составим из порядков лучей (8.3) звезды v матрицу-столбец

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}(v) = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_D \end{pmatrix} \tag{9.1}$$

и выясним, как она меняется под действием симметрий базисного симплекса $\triangle = \triangle_D$ и дифференцирований v^σ на звезду v.

Для этого поставим в соответствие любой перестановке σ элементов $0, 1, \ldots, d$ ее *перестановочную матрицу*

$$S_\sigma = \begin{pmatrix} \cdots & 1_{0,\sigma(0)} & \cdots \\ \cdots & 1_{1,\sigma(1)} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & 1_{d,\sigma(d)} & \cdots \end{pmatrix} \tag{9.2}$$

с единицами $1 = 1_{i,\sigma(i)}$ на $(i, \sigma(i))$-местах. Если заменить 0 на $d+1$, то получим перестановку (3.2), определяющую симметрию базисного симплекса $s = s_\sigma$ из группы $S_\triangle$. Дифференцированиям же δ_k^{kl} и δ_l^{kl} из (3.27) с произвольными индексами $0 \leqslant k < l \leqslant d$ поставим в соответствие матрицы

$$D_k^{kl} = E + E_{lk}, \quad D_l^{kl} = E + E_{kl}, \tag{9.3}$$

где $E = E_{d+1}$ – единичная матрица порядка $d+1$, а матрицы E_{ij} имеют нулевые элементы, кроме $1 = 1_{ij}$ на (i, j)-месте. Матрицы M из (9.2) и (9.3) имеют целые коэффициенты и определители $\det M = \pm 1$, поэтому принадлежат $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$.

9.2. Порядки лучей производных звезд. Данные матрицы позволяют вычислять порядки лучей m_0^σ, $m_1^\sigma, \ldots$, m_d^σ преобразованной звезды $v^\sigma = (v_0^\sigma, v_1^\sigma, \dots, v_d^\sigma)$:

$$\mathbf{m}^\sigma = \mathbf{m}(v^\sigma) = M^\sigma(v)\mathbf{m}. \tag{9.4}$$

Здесь, согласно определению производной (1.4), имеем $M^\sigma(v) = D_*^{k_1k_2}$, если $\sigma = \{k_1, k_2\}$ – дифференцирование, где в качестве специализации $*$ выбирается k_1 или k_2 в зависимости от того, какое из условий (1.4) выполняется; и $M^\sigma(v) = M^\sigma = S_\sigma$ в случае преобразования симметрии $\sigma = s = s_\sigma$ звезды v, где S_σ – соответствующая матрица из (9.2).

Лемма 9.1. *Пусть v – периодическая звезда $v^{(p)} = \mathbf{A}v$ периода $p > 0$ с калибровочной матрицей $\mathbf{A} = A^{(t)}\check{s}$ из* (7.7), *и пусть ее производные звезды $v^{(i)}$ для $i = 0, 1, 2, \dots$ определены по формуле* (7.8). *Тогда если $i = ap + b$, где $a = 0, 1, 2, \dots$ и $b = 0, \dots, p-1$, то*

$$\mathbf{m}^{(i)} = \mathbf{m}(v^{(i)}) = \mathbf{M}^a\mathbf{m}^{(b)}. \tag{9.5}$$

Здесь

$$\mathbf{M} = SM^{(p)} \tag{9.6}$$

с матрицей S из (9.2), *соответствующей обратной симметрии для $\check{s}$, и*

$$M^{(p)} = D_*^{k_pl_p}(v^{(p-1)}) \cdots D_*^{k_2l_2}(v^{(1)})D_*^{k_1l_1}(v^{(0)}), \tag{9.7}$$

где у порядковых матриц $D_*^{k_jl_j}(v^{(j-1)}) = D_*^{k_jl_j}$ из (9.4) *специализации $*$ определяются производной звездой $v^{(j-1)}$.*

Доказательство. вытекает из теоремы 7.1 и определения (7.7) калибровочной матрицей $\mathbf{A}$, если учесть, что при переходе с верхней на нижнюю строку в диаграмме (7.2) меняется порядок преобразований. □

Назовем $\mathbf{M}$ *порядковой матрицей* периодической звезды v, отвечающей калибровочной матрице $\mathbf{A}$.

9.3. Порядковые матрицы для алгебраических единиц. Воспользуемся формулой (9.6) и вычислим порядковую матрицу $\mathbf{M}$ в явном виде через коэффициенты многочлена $f_a(x)$, определенного в (5.1).

По определению (9.3) для $0 \leqslant k \leqslant d-1$

$$D_d^{kd} = E + E_{kd}, \text{ где } E_{kd} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9.8}$$

– квадратная матрица порядка $(d+1)$ с выделенной k-ой строкой. Принимая во внимание формулы умножения для матриц E_{kd}:

$$E_{kd} \cdot E_{k'd} = 0 \quad \text{для любых} \quad 0 \leqslant k, \quad k' \leqslant d-1, \tag{9.9}$$

находим произведение

$$D_d^{d-1,d} \cdot \ldots \cdot D_d^{1d} \cdot D_d^{0d} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9.10}$$

где $E_{11} = E_d$ – единичная матрица порядка d и $E_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ – столбец высоты d.

По определению (9.2) для циклической подстановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & d \\ d & 0 & \ldots & d-1 \end{pmatrix}$$

порядковая матрица S_σ имеет вид

$$S_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & \ldots & 0 & 0 \\ & \ldots & & \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.11}$$

Поэтому из равенств (9.10) и (9.11) получаем

$$\mathbf{M}_f = S_\sigma \cdot D_d^{d-1,d} \cdot \ldots \cdot D_d^{1d} \cdot D_d^{0d} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}. \tag{9.12}$$

Здесь $\mathbf{M}_f$ обозначает произведение матриц из (9.12), а блоки D_{ij} соответственно равны

$$D_{11} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \ldots & 0 & 0 \\ & \ldots & & \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$D_{21} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_{22} = (1).$$

По определению (9.3) для $0 < l \leqslant d$ имеем

$$D_0^{0l} = E + E_{l0}, \quad \text{где} \quad E_{l0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \dots & & \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9.13}$$

– квадратная матрица порядка $(d+1)$ с выделенной l-ой строкой. Для матриц E_{l0} и $E_{l'0}$ с любыми индексами $0 < l, l' \leqslant d$ также выполняется формула умножения $E_{l0} \cdot E_{l'0} = 0$, аналогичная формуле (9.9). Поэтому можем записать

$$(D_0^{0l})^{b_l} = E + b_l E_{l0} \tag{9.14}$$

с любым показателем $b_l = 0, 1, 2, \dots$ Применяя формулу (9.14), вычисляем произведение

$$\mathbf{M}_v(b) = (D_0^{01})^{b_1} \cdot (D_0^{02})^{b_2} \cdot \ldots \cdot (D_0^{0d})^{b_d} = E + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.15}$$

Здесь $\mathbf{M}_v(b)$ – произведение матриц из (9.14), зависящее от

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_d),$$

и $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix}$ – соответствующий b столбец высоты d. Введем обозначение $\mathbf{M}(b) = \mathbf{M}_f \cdot \mathbf{M}_v(b)$. Тогда в силу формул (9.12) и (9.15) произведение $\mathbf{M}(b)$ можно записать в явном виде

$$\mathbf{M}(b) = \begin{pmatrix} b_d & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ b_d + 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ b_d + b_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \dots & & \dots & & & \\ b_d + b_{d-2} & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ b_d + b_{d-1} & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.16}$$

Теорема 9.1. *Порядковая матрица* $\mathbf{M}$, *определенная в* (9.6) *для периодической звезды* v *и отвечающая калибровочной матрице* $\mathbf{A}$, *допускает следующее представление*

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_f \cdot \mathbf{M}_v(a) \tag{9.17}$$

через остов $\mathbf{M}_f$ *– постоянную матрицу* (9.12) *и*

$$\mathbf{M}_v(a) = (D_0^{01})^{a_d-1} \cdot (D_0^{02})^{a_{d-1}-1} \cdot \ldots \cdot (D_0^{0d})^{a_1-1} \tag{9.18}$$

– динамическую матрицу, зависящую от коэффициентов

$$a_i = 1, 2, 3, \ldots$$

многочлена $f_a(x)$ *из* (5.1). *В явном виде порядковая матрица* (9.17) *записывает как*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_1 - 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ a_1 + a_d - 2 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ \ldots & & \ldots & & & \\ a_1 + a_3 - 2 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 1 \\ a_1 + a_2 - 2 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.19}$$

Доказательство. вытекает из формулы (9.6) для порядковой матрицы $\mathbf{M}$ и равенства (9.16), если в нем сделать замену $b_1 = a_d - 1$, $b_2 = a_{d-1} - 1$ и $b_d = a_1 - 1$. □

9.4. Калибровочные матрицы для алгебраических единиц. Применим явную формулу (9.19) порядковой матрицы $\mathbf{M}$ и вычислим через ее коэффициенты калибровочную матрицу $\mathbf{A}$, определенную в (7.7).

Если $\widehat{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}$ – исходная звезда, то по определению (9.6) порядковой матрицы $\mathbf{M}$ производная звезда

$$\widehat{v}' = \widehat{v}^{(p)} = \widehat{\mathbf{A}v} = \begin{pmatrix} v_0' \\ v_1' \\ \vdots \\ v_d' \end{pmatrix} \tag{9.20}$$

вычисляется по формуле

$$\widehat{v}' = \mathbf{M}\widehat{v}. \tag{9.21}$$

Согласно (7.2) исходная звезда $\widehat{v}$ имеет лучи

$$v_0 = -\alpha, \quad v_1 = e_1 - \alpha, \quad \ldots, \quad v_d = e_d - \alpha \tag{9.22}$$

и ей отвечает ортонормированный репер $w_1 = v_1 - v_0 = e_1, \ldots, w_d = v_d - v_0 = e_d$. Репер производной звезды $\widehat{v}'$ запишем в следующем виде

$$\widehat{w}' = \begin{pmatrix} w_1' \\ \vdots \\ w_d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1' - v_0' \\ \vdots \\ v_d' - v_0' \end{pmatrix} = W\widehat{v}' \tag{9.23}$$

с $d \times (d+1)$-матрицей $W = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & \\ -1 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$. Подставляя в (9.23) значение $\widehat{v}'$ из формулы (9.21), получаем представление

$$\widehat{w}' = W\mathbf{M}\widehat{v} \tag{9.24}$$

производного репера $\widehat{w}'$ через исходную звезду $\widehat{v}$ и порядковую матрицу $\mathbf{M}$.

Применим (9.22) и разобъем звезду $\widehat{v}$ на единичные столбцы

$$\widehat{v} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\alpha + e_1 \\ \vdots \\ -\alpha + e_d \end{pmatrix} = (-\alpha_1 e_1 E_0 + e_1 E_1) + \ldots + (-\alpha_d e_d E_0 + e_d E_d). \tag{9.25}$$

Здесь использованы координаты у вектора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ и

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_i = \begin{pmatrix} c0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, d \tag{9.26}$$

– столбцы высоты $d+1$, при этом в столбцах E_i единица стоит на i-ом месте и нумерация элементов в E_i начинается с 0.

После подстановки $\widehat{v}$ из (9.25) в формулу (9.24) получим разложение производного репера

$$\widehat{w}' = e_1\mathbf{A}^1 + \ldots + e_d\mathbf{A}^d \tag{9.27}$$

на столбцы

$$\mathbf{A}^1 = W\mathbf{M}(-\alpha_1 E_0 + E_1), \quad \ldots, \quad \mathbf{A}^d = W\mathbf{M}(-\alpha_d E_0 + E_d) \tag{9.28}$$

высоты d. Перепишем репер (9.27) в виде

$$\widehat{w}' = \mathbf{A}\mathbf{e} \tag{9.29}$$

с матрицей

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}^1|\dots|\mathbf{A}^d) \tag{9.30}$$

из столбцов (9.28) и базисным столбцом $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \end{pmatrix}$. Тогда из равенства (9.29) будет следовать, что $\mathbf{A}$ есть ни что иное, как калибровочная матрица (7.7).

Теорема 9.2. *Пусть* $\mathbf{M}$ *– порядковая матрица* (9.6), *отвечающая калибровочной матрице* $\mathbf{A}$ *из* (7.7), *имеет коэффициенты*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & \dots & m_{0d} \\ m_{10} & m_{11} & \dots & m_{1d} \\ & & \dots & \\ m_{d0} & m_{d1} & \dots & m_{dd} \end{pmatrix} \tag{9.31}$$

и пусть

$$m_0 = \sum_{k=0}^{d} m_{0k}, \quad m_1 = \sum_{k=0}^{d} m_{1k}, \quad \dots, \quad m_d = \sum_{k=0}^{d} m_{dk} \tag{9.32}$$

– суммы ее строк. Тогда столбцы $\mathbf{A}^j$ *калибровочной матрицы* $\mathbf{A} = (\mathbf{A}^1|\dots|\mathbf{A}^d)$ *вычисляются по следующим формулам:*

$$\mathbf{A}^1 = \begin{pmatrix} -(m_1 - m_0)\alpha_1 + (m_{11} - m_{01}) \\ -(m_2 - m_0)\alpha_1 + (m_{21} - m_{01}) \\ \dots \\ -(m_d - m_0)\alpha_1 + (m_{d1} - m_{01}) \end{pmatrix}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathbf{A}^d = \begin{pmatrix} -(m_1 - m_0)\alpha_d + (m_{1d} - m_{0d}) \\ -(m_2 - m_0)\alpha_d + (m_{2d} - m_{0d}) \\ \dots \\ -(m_d - m_0)\alpha_d + (m_{dd} - m_{0d}) \end{pmatrix}. \tag{9.33}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение следующие $(d+1)\times d$-матрицы:

$$E_0^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad E_1^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\dots$$

$$E_0^d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad E_1^d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.34}$$

С помощью матриц (9.34) калибровочную матрицу $\mathbf{A}$, используя определение (9.30) и (9.28), можно записать более компактно $\mathbf{A} = W\mathbf{M}V$, где W – матрица из равенства (9.23) и

$$V = V_\alpha = (-\alpha_1 E_0^1 + E_1^1) + \ldots + (-\alpha_d E_0^d + E_1^d)$$

– $(d+1)\times d$ -матрица. Отсюда и (9.31) следуют формулы (9.33) для столбцов $\mathbf{A}^j$ калибровочной матрицы $\mathbf{A}$. □

§10. Рекуррентные последовательности

Здесь устанавливается связь между векторными и скалярными рекуррентными последовательностями. Пусть дана векторная рекуррентная последовательность

$$\mathbf{f}^{i+1} = M\mathbf{f}^i \tag{10.1}$$

с нумерацией $i = 0, 1, 2, \ldots$ Здесь M – квадратная матрица порядка $d+1$, $\mathbf{f}^i = \begin{pmatrix} f_0^i \\ f_1^i \\ \vdots \\ f_d^i \end{pmatrix}$ и $\mathbf{f}^0$ – некоторый фиксированный столбец. Из определения (10.1) следует формула

$$\mathbf{f}^i = M^i\mathbf{f}^0. \tag{10.2}$$

Наша цель – используя (10.1) найти формулу рекуррентной зависимости для скалярной последовательности

$$f^i = \mathbf{1}\cdot\mathbf{f}^i, \tag{10.3}$$

где $\mathbf{1} = (1\,1\ldots 1)$ – строка длины $d+1$, т.е. $f^i = f_0^i + f_1^i + \ldots + f_d^i$ определяются как суммы элементов столбов $\mathbf{f}^i$.

Для матрицы M запишем ее характеристический многочлен в виде

$$ch_M(x) = \det(xE - M) = x^{d+1} - b_d x^d - \ldots - b_1 x - b_0. \tag{10.4}$$

По теореме Гамильтона–Кэли M удовлетворяет матричному уравнению

$$M^{d+1} - b_d M^d - \ldots - b_1 M - b_0 E = 0. \tag{10.5}$$

Перепишем (10.5) в виде равенства $M^{d+1} = b_d M^d + \ldots + b_1 M + b_0 E$. Умножая его на столбец $\mathbf{f}^i$, получаем равенство

$$M^{d+1}\mathbf{f}^i = b_d M^d \mathbf{f}^i + \ldots + b_1 M\mathbf{f}^i + b_0 \mathbf{f}^i. \tag{10.6}$$

Теперь применяем к равенству (10.6) формулу (10.2) и приходим к новой рекуррентной формуле

$$\mathbf{f}^{i+d+1} = b_d \mathbf{f}^{i+d} + \ldots + b_1 \mathbf{f}^{i+1} + b_0 \mathbf{f}^i \tag{10.7}$$

для столбцов $\mathbf{f}^i$. После этого умножим обе части равенства (10.7) на строку $\mathbf{1}$ и воспользуемся равенством (10.3). Таким образом, приходим к следующему результату.

Предложение 10.1. *Если числа f^i для $i = 0, 1, 2, \ldots$ определены равенством* (10.3)*, то они удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$f^{i+d+1} = b_d f^{i+d} + \ldots + b_1 f^{i+1} + b_0 f^i, \tag{10.8}$$

где $b_d, \ldots, b_1, b_0$ – коэффициенты характеристического многочлена (10.4) *и начальные условия*

$$f^d = \mathbf{1} \cdot M^d \mathbf{f}^0, \ldots, \quad f^1 = \mathbf{1} \cdot M\mathbf{f}^0, \quad f^0 = \mathbf{1} \cdot \mathbf{f}^0 \tag{10.9}$$

задаются матрицей M и фиксированным столбцом $\mathbf{f}^0$ из (10.1).

§11. Многомерная ядерная аппроксимация

11.1. Основная теорема (общий случай). Важность последовательности определенных ранее в (8.2) производных многогранников $T^{(i)} = T(v^{(i)})$ для $i = 0, 1, 2, \ldots$ – ядер индуцированных разбиений (2.20) – объясняется тем, что через их геометрию характеризуются аппроксимационные свойства точек из бесконечной орбиты

$$\mathrm{Orb}_{\alpha^-}(0) = \{x_j = S^j(0) \equiv j\alpha^- \bmod \mathbb{Z}^d; \quad j = 0, 1, 2, \ldots\}, \tag{11.1}$$

порождаемой сдвигом $S = S_{\alpha^-}$ тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ из (2.8). Ограниченные многогранниками $T^{(i)}$ области на торе $\mathbb{T}^d$ выделяют из орбиты

(11.1) некоторую подпоследовательность точек $\{x_{j'}\}_{j'=1}^{\infty}$, наилучшим образом приближающихся к $0 \in \mathbb{T}^d$.

Теорема 11.1. *Пусть v – периодическая звезда периода $p > 0$ с калибровочной матрицей $\mathbf{A}$ из (7.7), и пусть ее производные звезды $v^{(i)}$ для $i = 0, 1, 2, \dots$ определены по формуле (7.8). Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Ни одна из точек $x_j \equiv j\alpha^- \bmod \mathbb{Z}^d$ орбиты (11.1) не попадает*

$$x_j \notin T^{(i)} \text{ для } j = 1, 2, \dots, m^{(i)} - 1 \tag{11.2}$$

в многогранник $T^{(i)}$ из (8.2), где $m^{(i)}$ – порядок (8.4) звезды $v^{(i)}$, равный сумме коэффициентов матрицы-столбеца $\mathbf{m}^{(i)}$ из (9.5). Первой попавшей в область $T^{(i)}$ является точка

$$x_j \in T^{(i)} \text{ для } j = m^{(i)}. \tag{11.3}$$

2. *Для радиуса $r_*(T^{(i)}) = r_s(T^{(i)})$ или $r(T^{(i)})$ многогранника $T^{(i)}$ с номером $i = ap + b$, где $a = 0, 1, 2, \dots$ и $b = 0, \dots, p-1$, выполняется следующее неравенство*

$$r_*(T^{(i)}) \leqslant c_*(M)\varrho(\mathbf{A})^a r_*(T^{(b)}) \tag{11.4}$$

в случае, если у калибровочной матрицы $\mathbf{A}$ собственные значения $\lambda_i \neq \lambda_{i'}$ для любых $i \neq i'$. Для начальных номеров b радиусы $r_*(T^{(b)})$ в (11.4) вычисляются по формуле (8.14). Здесь $\varrho(\mathbf{A})$ обозначает спектральный радиус (8.6) калибровочной матрицы $\mathbf{A}$, и константы $c_*(M)$ определены в (8.12), (8.13).

3. *Объем $s(T^{(i)})$ многогранника $T^{(i)}$ находится по формуле*

$$s(T^{(i)}) = |\det\mathbf{A}|^a s(T^{(b)}), \tag{11.5}$$

где $\det\mathbf{A}$ обозначает определитель матрицы $\mathbf{A}$, удовлетворяющий неравенствам $0 < |\det\mathbf{A}| < 1$, и объемы $s(T^{(b)})$ для начальных номером $b = 0, \dots, p-1$ вычисляются по формуле (8.15).

Доказательство. Утверждение 1 следует из теоремы 2.3, а утверждения 2 и 3 доказаны в лемме 8.2. □

11.2. Возвратные матрицы для алгебраических единиц и рекуррентные последовательности. Перепишем звезды

$$v^{(i)} = (v_0^{(i)}, v_1^{(i)}, \dots, v_d^{(i)})$$

из (7.8) в виде столбцов $v^{(i)} = \begin{pmatrix} v_0^{(i)} \\ v_1^{(i)} \\ \vdots \\ v_d^{(i)} \end{pmatrix}$. По определению имеем

$$v^{(0)} = \begin{pmatrix} v_0^{(0)} \\ v_1^{(0)} \\ \vdots \\ v_d^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\alpha+e_1 \\ \vdots \\ -\alpha+e_d \end{pmatrix}$$

или по-другому –

$$v^{(0)} = v = -\alpha E_0 + e_1 E_1 + \ldots + e_d E_d, \tag{11.6}$$

где E_i – столбцы (9.26). При этом $\alpha, e_1, \ldots, e_d$ в (11.6) рассматриваются как коэффициенты.

Пусть $i = ap + b$ с фиксированным $0 \leqslant b < p$. Определим следующие сдвиги: $\overrightarrow{j} \equiv j + b \bmod p$ и число $\overrightarrow{j}$ выбирается из интервала $[1, \ldots, p]$; для порядковой матрицы $\mathbf{M} = D_p \cdots D_1$ из (9.6), (9.7) с множителями $D_j = D_*^{k_j l_j}(v^{(j-1)})$ и $D_p = SD_*^{k_p l_p}(v^{(p-1)})$ соответственно для $j < p$ и $j = p$ полагаем $\overrightarrow{\mathbf{M}} = \overrightarrow{D}_p \cdots \overrightarrow{D}_1$, где $\overrightarrow{D}_j = D_{\overrightarrow{j}}$. Тогда в этих обозначениях из диаграммы (7.2) будет следовать формула

$$v^{(i)} = \overrightarrow{\mathbf{M}}^a v^{(b)}, \tag{11.7}$$

аналогичная (7.9), при этом

$$v^{(b)} = -\alpha E_0^{(b)} + e_1 E_1^{(b)} + \ldots + e_d E_d^{(b)}, \tag{11.8}$$

а столбцы $E_i^{(b)}$ вычисляются по формуле $E_i^{(b)} = D_*^{k_b l_b} \cdots D_*^{k_1 l_1} E_i^{(0)}$ для $0 \leqslant b < p$. Здесь полагаем $E_i^{(0)} = E_i$ и $D_*^{k_j l_j}$ – порядковые матрицы из (9.7). Тогда из (11.7) и (11.8) получаем равенство

$$v^{(i)} = -\alpha \overrightarrow{\mathbf{M}}^a E_0^{(b)} + e_1 \overrightarrow{\mathbf{M}}^a E_1^{(b)} + \ldots + e_d \overrightarrow{\mathbf{M}}^a E_d^{(b)}. \tag{11.9}$$

Вводя обозначения

$$\mathbf{Q}^a = \overrightarrow{\mathbf{M}}^a E_0^{(b)}, \quad \mathbf{R}_1^a = \overrightarrow{\mathbf{M}}^a E_1^{(b)}, \quad \ldots, \quad \mathbf{R}_d^a = \overrightarrow{\mathbf{M}}^a E_d^{(b)}, \tag{11.10}$$

перепишем равенство (11.9) в виде

$$v^{(i)} = -\alpha \mathbf{Q}^a + e_1 \mathbf{R}_1^a + \ldots + e_d \mathbf{R}_d^a. \tag{11.11}$$

Пусть $\mathbf{1} = (1\,1 \ldots 1)$ – строка из (10.3). Тогда по теореме 11.1

$$v_{\min}^{(i)} = \mathbf{1} \cdot v^{(i)} = v_0^{(i)} + v_1^{(i)} + \ldots + v_d^{(i)} \tag{11.12}$$

будет *минимальным вектором* (11.3), который в силу (11.11) можно записать в виде линейной комбинации

$$v_{\min}^{(i)} = -\alpha Q^a + e_1 R_1^a + \ldots + e_d R_d^a \qquad (11.13)$$

с коэффициентами $Q^a = \mathbf{1} \cdot \mathbf{Q}^a$, $R_1^a = \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_1^a, \ldots, R_d^a = \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_d^a$.

Из (11.10), (11.13) и предложения 10.1 следует, что Q^a, $R_1^a, \ldots, R_d^a$ являются *рекуррентными последовательностями* от параметра a (напомним, что параметр b фиксирован):

$$\begin{aligned} Q^{a+d+1} &= b_d Q^{a+d} + \ldots + b_1 Q^{a+1} + b_0 Q^a, \\ R_k^{a+d+1} &= b_d R_k^{a+d} + \ldots + b_1 R_k^{a+1} + b_0 R_k^a \end{aligned} \qquad (11.14)$$

для $k = 1, \ldots, d$. Здесь $b_d, \ldots, b_1, b_0$ – коэффициенты характеристического многочлена $ch_{\overrightarrow{\mathbf{M}}}(x) = ch_{\mathbf{M}}(x)$ порядковой матрицы $\mathbf{M}$, определенного в (10.4). Для последовательностей Q^a и R_k^a будут следующие *начальные условия*:

$$\begin{aligned} &Q^0 = \mathbf{1} \cdot \mathbf{Q}^0 = \mathbf{1} \cdot E_0^{(b)}, && R_k^0 = \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_k^0 = \mathbf{1} \cdot E_k^{(b)}, \\ &Q^1 = \mathbf{1} \cdot \mathbf{Q}^1 = \mathbf{1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}} E_0^{(b)}, && R_k^1 = \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_k^1 = \mathbf{1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}} E_k^{(b)}, \\ &\quad \ldots, && \quad \ldots, \\ &Q^d = \mathbf{1} \cdot \mathbf{Q}^d = \mathbf{1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}}^d E_0^{(b)}, && R_d^k = \mathbf{1} \cdot \mathbf{R}_k^d = \mathbf{1} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}}^d E_k^{(b)} \end{aligned} \qquad (11.15)$$

для $k = 1, \ldots, d$.

11.3. Основная теорема для алгебраических единиц. Общая теорема о ядерной аппроксимации 11.1 в применении к алгебраическим единицам допускает следующую конкретизацию.

Теорема 11.2. 1. *Для $i = ap + b$ и любого $0 \leqslant b < p$ вектор*

$$v_{\min}^{(i)} = (-Q^a \alpha_1 + R_1^a, \ldots, -Q^a \alpha_d + R_d^a) \qquad (11.16)$$

обладает минимальным свойством:

$$v_{\min}^{(i)} \in T^{(i)} \quad \text{с минимальным целым} \quad Q^a \geqslant 1. \qquad (11.17)$$

Свойство (11.17) *означает, что ни одна из точек орбиты*

$$x_j \equiv -j\alpha \bmod \mathbb{Z}^d$$

не попадает

$$x_j \notin T^{(i)} \quad \text{для всех} \quad 1 \leqslant j < Q^a \qquad (11.18)$$

в ядро $T^{(i)}$ – многогранник из (8.2).

2. *Объем* $s(T^{(i)})$ *ядра* $T^{(i)}$ *находится по формуле*

$$s(T^{(i)}) = |\det\mathbf{A}|^a s(T^{(b)}), \tag{11.19}$$

где $\det\mathbf{A}$ *обозначает определитель матрицы* $\mathbf{A}$*, удовлетворяющий неравенствам* $0 < |\det\mathbf{A}| < 1$*, и объемы* $s(T^{(b)})$ *для начальных номером* $b = 0, \ldots, p-1$ *вычисляются по формуле* (8.15).

3. *В случае калибровочной матрицы* $\mathbf{A}$ *с простым спектром* $\lambda_i \neq \lambda_{i'}$ *для любых* $i \neq i'$ *имеют место неравенства:*

$$|Q^a\alpha_1 - R_1^a| + \ldots + |Q^a\alpha_d - R_d^a| \quad \leqslant c_s^{(b)} \varrho(\mathbf{A})^a, \tag{11.20}$$

где $c_s^{(b)} = c_s(\overrightarrow{M}) r_s(v_{\min}^{(b)})$ *и* $\varrho(A)$ – *спектральный радиус* (8.6) *матрицы* $\mathbf{A}$.

4. *Коэффициенты* Q^a, $R_1^a, \ldots, R_d^a$ *из* (11.16) *образуют рекуррентные последовательности от параметра* $a = 0, 1, 2, \ldots$ *с уравнением* (11.14) *и начальными условиями* (11.15).

5. *Если* $b = 0$*, то начальные условия рекуррентных последовательностей* Q^a, $R_1^a, \ldots, R_d^a$ *принимают вид:*

$$\begin{array}{lll} Q^0 = d+1, & Q^1 = \sum\limits_{k,l} m_{kl}, \ldots, & Q^d = \sum\limits_{k,l} m_{kl}^d, \\ R_1^0 = 1, & R_1^1 = \sum\limits_{k} m_{k1}, \ldots, & R_1^d = \sum\limits_{k} m_{k1}^d, \\ & \ldots\ldots\ldots & \\ R_d^0 = 1, & R_d^1 = \sum\limits_{k} m_{kd}, \ldots, & R_d^d = \sum\limits_{k} m_{kd}^d, \end{array} \tag{11.21}$$

где $\mathbf{M} = (m_{kl})_{(d+1)\times(d+1)}$ – *порядковая матрица из* (9.6)*, имеющая нумерацию строк и столбцов* $0, 1, \ldots, d$*, и* $\mathbf{M}^i = (m_{kl}^i)_{(d+1)\times(d+1)}$ *обозначает* i*-ую степень матрицы* $\mathbf{M}$*; длина же* $r_s(v_{\min}^{(0)})$ *минимального вектора* (11.12)*, входящая в константу* $c_s^{(0)} = c_s(M) r_s(v_{\min}^{(0)})$ *из неравенства* (11.20)*, равна*

$$r_s(v_{\min}^{(0)}) = |(d+1)\alpha_1 - 1| + \ldots + |(d+1)\alpha_d - 1|. \tag{11.22}$$

Доказательство. 1. Формула (11.16) для минимального вектора $v_{\min}^{(i)}$ вытекает из равенства (11.13), его свойство минимальности (11.17), (11.18) – из теоремы 11.1.

2. Формула (11.19) для объема многогранника $s(T^{(i)})$ была ранее доказана в лемме 8.2.

3. В левой части неравенства (11.20) записана длина для минимального вектора $v_{\min}^{(i)}$ из (11.16) в s-метрике $|x|_s = |x_1| + \ldots + |x_d|$. Поэтому указанные неравенства получаются как следствие из неравенства (11.4), в котором радиусы $r_*(T^{(i)})$ и $r_*(T^{(b)})$ заменены длинами минимальных векторов $r_s(v_{\min}^{(i)})$ и $r_s(v_{\min}^{(b)})$.

4. Рекуррентность коэффициентов Q^a, $R_1^a, \ldots, R_d^a$ из (11.16) была ранее доказана в (11.14) и (11.15).

5. Явные начальные условия (11.21) для рекуррентных последовательностей Q^a, $R_1^a, \ldots, R_d^a$ в случае $b = 0$ также вычисляются по формулам (11.15).

По определению (11.12) начальный минимальный вектор $v_{\min}^{(0)} = v_0^{(0)} + v_1^{(0)} + \ldots + v_d^{(0)} = v_0 + v_1 + \ldots + v_d$ равен сумме лучей исходной звезды $v^{(0)} = v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$. Поскольку по определению $v_0 = -\alpha$, $v_1 = e_1 - \alpha, \ldots, v_d = e_d - \alpha$, то минимальный вектор $v_{\min}^{(0)}$ будет иметь координаты $v_{\min}^{(0)} = (1 - (d+1)\alpha_1, \ldots, 1 - (d+1)\alpha_d)$, откуда вытекает равенство (11.22). $\square$

Литература

1. В. Г. Журавлев, *Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **445** (2016), 33–92.
2. А. Я. Хинчин, *Цепные дроби.* 4-ое изд. М., 1978.
3. В. Г. Журавлев, *Двумерные приближения методом делящихся торических разбиений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **440** (2015), 81–98.
4. В. Г. Журавлев, *Делящиеся разбиения тора и множества ограниченного остатка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **440** (2015), 99–122.
5. В. Г. Журавлев, *Периодические ядерные разложения кубических иррациональностей в цепные дроби.* — Математика и информатика, Совр. пробл. матем., МИ РАН, М., (2016), 1–30 (в печати).
6. Z. Coelho, A. Lopes, L. F. Da Rocha, *Absolutely Continuous Invariant Measures for a Class of Affine Interval Exchange Maps.* — Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), No. 11, 3533–3542.
7. V. G. Zhuravlev, A. V. Shutov, *Derivaties of circle rotations and similarity of orbits.* — Max Planck Institut für Math., Preprint Series **62** (2004), 1–11.
8. M. Furukado, Sh. Ito, A. Saito, J. Tamura, Sh. Yasutomi, *A new multidimensional slow continued fraction algorithm and stepped surface.* — Exper. Math. **23** (2014), No. 4, 390–410.
9. M. Abrate, S. Barbero, U. Cerruti, N. Murru, *Periodic representations for cubic irrationalities.* — Fibonacci Quart. **50** (2012), No. 3, 252–264.
10. N. Murru, *On the periodic writing of cubic irrationals and a generalization of Rédei functions.* — Int. J. Number Theory **11** (2015), 779–799.

11. Sh. Ito, J. Fujii, H. Higashino, Sh. Yasutomi, *On simultaneous approximation to* (α, α^2) *with* $\alpha^3 + k\alpha - 1 = 0$. — J. Number Theory **99** (2003), 255–283.
12. Q. Wang, K. Wang, Z. Dai, *On optimal simultaneous rational approximation to* $(\omega, \omega^2)^\tau$ *with* ω *being some kind of cubic algebraic function.* — J. Approx. Theory **148** (2007), 194–210.
13. P. Hubert, A. Messaoudi, *Best simultaneous Diophantine approximations of Pisot numbers and Rauzy fractals* — Acta Arith. **124** (2006), No. 1, 1–15.
14. N. Chevallier, *Best simultaneous Diophantine approximations of some cubic numbers.* — J. de Théories des Nombres de Bordeaux **14** (2002), No. 2, 403–414.
15. N. Chevallier, *Best Simultaneous Diophantine Approximations and Multidimensional Continued Fraction Expansions.* — Moscow J. Combinatorics and Number Theory **3** (2013), No. 3, 3–56.
16. V. Brun, *Algorithmes euclidiens pour trois et quatre nombres.* — In Treizieme congres des mathematiciens scandinaves. Tenu a Helsinki 18–23 aout (1957), 45–64. Mercators Tryckeri, Helsinki, 1958.
17. E. S. Selmer, *Continued fractions in several dimensions.* — Nordisk Nat. Tidskr. **9** (1961), 37–43.
18. A. Nogueira, The three-dimensional Poincare continued fraction algorithm. — Israel J. Math. **90** (1995), No. 1–3, 373–401.
19. F. Schweiger, *Multidimensional Continued Fraction.* Oxford Univ. Press, New York, 2000.
20. V. Berthe, S. Labbe, *Factor complexity of S-adic words generated by the arnouxЏrauzyЏpoincare algorithm.* — Adv. Appl. Math. **63** (2015), 90–130.
21. P. Arnoux, S. Labbe, *On some symmetric multidimensional continued fraction algorithms.* — `arXiv:1508.07814` 2015.
22. J. Cassaigne, *Un algorithme de fractions continues de complexite lineaire.* — October 2015. DynA3S meeting, LIAFA, Paris, October 12th, 2015.
23. J. Lagarias, *Best simultaneous Diophantine approximations. I. Groth rates of best approximation denomimators.* — Trans. Amer. Math. Soc. **272**, No. 2 (1982), 545–554.
24. В. Г. Журавлев, *Многогранники ограниченного остатка.* — Математика и информатика, 1, Совр. пробл. матем., **16**, МИ РАН, М., 2012, 82-102.
25. В. Г. Журавлев, *Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **392** (2011), 95–145.
26. Е. С. Федоров, *Начала учения о фигурах.* М., 1953.
27. Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений.* Том 2. Киев, 1952.

Zhuravlev A. G. Periodic karyon expansions of algebraic units in multidimensional continued fractions.

Periodic expansions of algebraic numbers in multidimensional continued fractions are obtained by using multidimensional backward maps and the differentiation method of induced toric tilings.

Владимирский государственный университет
E-mail: `vzhuravlev@mail.ru`

Поступило 1 августа 2016 г.