Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 449, 2016 г.

Ю. В. Дымченко

РАВЕНСТВО ЕМКОСТИ И МОДУЛЯ КОНДЕНСАТОРА В СУБФИНСЛЕРОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Равенство емкости и модуля конденсатора имеет важное значение в геометрической теории функций. Оно позволяет связать теоретико-функциональные и геометрические свойства множеств. Для конформных емкостей и модулей на плоскости равенство было доказано Л. Альфорсом и А. Бёрлингом в работе [11]. Затем этот результат был улучшен в работах Б. Фюгледе [16] и В. Цимера [21]. Дж. Хессе [17] распространил этот результат на p-емкость и p-модуль для случая, когда пластины конденсатора не пересекаются с границей области. В случае евклидовой метрики равенство емкости и модуля в самых общих предположениях было доказано В. А. Шлыком [10], затем это доказательство было немного упрощено в работе М. Оцука [20]. В случае римановой метрики равенство было доказано в [8].

Финслеровы пространства были введены как обобщение римановых многообразий на случай, когда метрика зависит не только от координат, но и от направления.

Равенство емкости и модуля конденсатора в финслеровых пространствах в самых общих предположениях было установлено в работе [9].

Пространства Карно–Каратеодори и субфинслеровы пространства отличаются от римановых и финслеровых пространств соответственно ограничением класса допустимых путей. С основными вопросами анализа на группах Карно можно ознакомиться, например, в книге [15]. Емкости, модули конденсаторов, а также свойства различных функциональных классов на группах Карно изучались в основном в работах С. К. Водопьянова и его учеников (например, [5–7]). В частности, равенство ёмкости и модуля конденсатора было установлено И. Г. Маркиной в работе [18].

Субфинслеровы пространства изучались, например, в работах [1–3, 13, 14].

Ключевые слова: емкость и модуль конденсатора,субфинслерово пространство, соболевские классы функций.

Приведем основные определения и обозначения. Доказательство многих нижеприведенных рассуждений можно найти в [15].

Стратифицированной однородной группой (или группой Карно) называется связная односвязная нильпотентная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли которой $\mathfrak{g}$ разлагается в прямую сумму векторных пространств $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$ таких, что $[V_1, V_k] = V_{k+1}$ для $k = 1, 2, \ldots, m-1$ и $[V_1, V_m] = \{0\}$. Здесь $[X, Y] = XY - YX$ – коммутатор элементов X и Y, а $[V_1, V_j]$ – линейная оболочка элементов $[X, Y]$, где $X \in V_1$, $Y \in V_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Пусть левоинвариантные векторные поля X_{11}, X_{12},..., X_{1n_1} образуют базис V_1. Определим подрасслоение HT касательного расслоения $T\mathbb{G}$ со слоями HT_x, $x \in \mathbb{G}$, которые представляют собой линейную оболочку векторных полей $X_{11}(x)$, X_{12}, ..., $X_{1n_1}(x)$. Назовем HT горизонтальным касательным расслоением, а его слои HT_x – горизонтальными касательными пространствами в точке $x \in \mathbb{G}$.

Расширим базис X_{11}, ..., X_{1n_1} до базиса X_{ij}, $j = 1, 2, \ldots n_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, всей алгебры Ли $\mathfrak{g}$, где каждый X_{ij} представляет собой коммутатор j-го порядка некоторых векторов X_{1j}, $j = 1, 2, \ldots, n_1$. Таким образом, n_i является размерностью пространства V_i, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Любой элемент $x \in \mathbb{G}$ можно единственным образом представить в виде $x = \exp\left(\sum\limits_{i,j} x_{ij} X_{ij}\right)$. Набор чисел $\{x_{ij}\}$ назовем координатами элемента x. Получим взаимно однозначное отображение между группой $\mathbb{G}$ и пространством R^N, где $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ – топологическая размерность группы $\mathbb{G}$.

Мера Лебега в R^N индуцирует биинвариантную меру Хаара в $\mathbb{G}$, которую мы обозначим через dx.

Обозначим $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in_i})$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Определим растяжения $\delta_\lambda x$, $\lambda > 0$, по формуле $\delta_\lambda x = (\lambda x_1, \lambda^2 x_2, \ldots, \lambda^m x_m)$. также имеем $d(\delta_\lambda x) = \lambda^Q dx$, где $Q = \sum\limits_i i n_i$ – однородная размерность группы $\mathbb{G}$.

Пусть $F(x, \xi)$ – неотрицательная функция, определенная при $x \in \mathbb{G}$, $\xi \in HT_x$, которая гладко зависит от x и xi и представляет собой финслерову метрику на каждом слое HT_x, т.е.:

1) Для любого $a > 0$ выполнено $F(x, a\xi) = aF(x, \xi)$ и $F(x, \xi) > 0$ при $\xi \neq 0$, $x \in \mathbb{G}$;

2) Для любых $x \in \mathbb{G}$, $\xi, \eta \in HT_x$ функция $\nabla_H^2 F^2(x,\eta)(\xi,\xi)$ положительно определена, где

$$(\nabla_H^2)_{ij} = \frac{1}{2}(X_{1i}X_{1j} + X_{1j}X_{1i}), \quad i,j = 1,2,\dots,n_1.$$

Определим на кокасательном расслоении HT^* функцию $H(x,\omega)$, где $x \in \mathbb{G}$, $\omega \in HT_x^*$ как супремум величин $\omega(\xi)$ по всем $\xi \in HT_x$, удовлетворяющим условию $F(x,\xi) \leqslant 1$. В дальнейшем будем отождествлять ω с вектором, имеющем координаты дифференциальной формы ω в базисе ω_i, двойственным к базису X_{1i}, то есть $\omega_i(X_{1j}) = \delta_{ij}$ для $i,j = 1,2,\dots,n_1$.

Кривую $\gamma : (a,b) \to \mathbb{G}$ назовем горизонтальной, если для почти всех $t \in (a,b)$ $\dot\gamma(t) \in HT_{\gamma(t)}$. Длину такой кривой определим как интеграл $l(\gamma) = \int\limits_a^b F(\gamma(t),\dot\gamma(t))\,dt$.

На группе $\mathbb{G}$ определим однородную норму $|\cdot|$, удовлетворяющую условиям: для любого $x \in \mathbb{G}$ $|x| \geqslant 0$ и $|x| = 0$ только при $x = 0$; $|x^{-1}| = |x|$, $|\delta_\lambda x| = \lambda|x|$. Определим шар с центром в точке $x \in \mathbb{G}$ радиуса $r > 0$ следующим образом: $B(x,r) = \{y \in \mathbb{G} : |x^{-1}y| < r\}$. Заметим, что он является левым сдвигом шара $B(0,r)$, который в свою очередь является образом единичного шара $B(0,1)$ при растяжении δ_r. Известно [15], что существует константа C такая, что для любых $x,y \in \mathbb{G}$

$$||xy| - |x|| \leqslant C|y| \ \text{ при } \ |y| \leqslant \frac{|x|}{2}. \tag{1}$$

Меру dx нормируем так, чтобы $|B(0,1)| = \int\limits_{B(0,1)} dx = 1$. Очевидно, что $|B(0,r)| = r^Q$. Посредством непрерывной положительной в $\mathbb{G}$ функции $g(x)$ определим элемент объема $d\sigma = g(x)\,dx$.

Расстояние $d_c(x,y)$ между двумя точками $x,y \in \mathbb{G}$ определим как инфимум длин кривых, соединяющих x и y. Кривую $\gamma : [a,b] \to \mathbb{G}$ назовем спрямляемой, если существует

$$\sup\left\{\sum_{k=1}^{r-1} d_c(\gamma(t_k),\gamma(t_{k+1}))\right\} < \infty$$

по всем разбиениям $a \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_r = b$. Известно [19], что если кривая не является горизонтальной, то она неспрямляема, поэтому далее будем рассматривать только горизонтальные кривые.

Будем говорить, что кривая $\gamma : (a,b) \to D$ соединяет множества E_0 и E_1, если

$$\liminf_{t\to a} d(\gamma(t), E_0) = \liminf_{t\to b} d(\gamma(t), E_1) = 0,$$

где $d(x,y) = |x^{-1}y|$ для $x, y \in \mathbb{G}$. Семейство всех таких локально спрямляемых кривых обозначим через $\Gamma(E_0, E_1, D)$.

Расстояния d и d_c эквивалентны друг другу, а топология, порожденная расстоянием d, эквивалентна евклидовой [4].

Неотрицательную числовую борелевскую функцию на D назовём допустимой для некоторого семейства Γ кривых, расположенных в D, если для любой $\gamma \in \Gamma$ $\int\limits_\gamma \rho F(x, dx) = \int\limits_a^b \rho(\gamma(t)) F(\gamma(t), \dot\gamma(t))\, dt \geqslant 1$, где $\gamma(t)$ – параметризация γ посредством параметра $t \in (a,b)$. Множество всех допустимых функций для Γ обозначим через $\operatorname{adm}\Gamma$.

Пусть D – область в $\mathbb{G}$ и $E_0, E_1 \subset \bar{D}$ – замкнутые непересекающиеся множества. Тройку множеств (E_0, E_1, D) назовем конденсатором.

Пусть $p > 1$. Определим p-модуль конденсатора (E_0, E_1, D) следующим образом:

$$M_{p,F}(E_0, E_1, D) = \inf \int\limits_D \rho^p\, d\sigma,$$

где инфимум берется по всем $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma(E_0, E_1, D)$.

Функцию $u : D \to \mathbb{R}$ назовем локально липшицевой в D, если для любого компактного подмножества $D' \subset D$ существует константа L такая, что для любых $x, y \in D'$ $|u(x) - u(y)| \leqslant L \max(d_c(x,y), d_c(y,x))$. Определим класс $L^1_{p,F}(D)$ как замыкание класса локально липшицевых в D функций по норме

$$\|u\|_{L^1_{p,F}(D)} = \left(\int\limits_D H(x, Xu)^p\, d\sigma \right)^{1/p},$$

где $Xu = (X_{11}u, X_{12}u, \ldots, X_{1n_1}u)$ – горизонтальный градиент функции u.

Обозначим через $\operatorname{Adm}(E_0, E_1, D)$ множество неотрицательных функций из $L^1_{p,F}(D) \cap C(D)$, равных нулю (единице) в некоторой окрестности E_0 (E_1). Определим p-емкость конденсатора:

$$C_{p,F}(E_0, E_1, D) = \inf \int\limits_D H(x, Xu)^p\, d\sigma,$$

где инфимум берется по всем функциям $u \in \mathrm{Adm}(E_0, E_1, D)$.

Лемма 1. *Инфимум в определении p-модуля конденсатора $M_{p,F}(E_0, E_1, D)$ можно брать по непрерывным в $D \setminus (E_0 \cup E_1)$ допустимым функциям.*

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon < 1/2$, D_k, $k = 1, 2, \ldots$ – открытые множества, образующие исчерпание изнутри множества $D \setminus (E_0 \cup E_1)$, т.е. $\overline{D_k} \subset D_{k+1}$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k = D \setminus (E_0 \cup E_1)$;$d_k = d(\partial D_k, \partial D_{k+1})$, $k \geqslant 1$. Положим для единообразия рассуждений $d_{-1} = d_0 = \infty$, $D_0 = \varnothing$.

Для каждого $k \geqslant 1$ покроем компактное множество $\overline{D_k} \setminus D_{k-1}$ конечным числом шаров $B(x_i, r_i)$, где $x_i \in \overline{D_k} \setminus D_{k-1}$, $r_i < \min(d_{k-2}, d_k)/2$. Получим локально конечное покрытие области $D \setminus (E_0 \cup E_1)$ шарами $B(x_i, r_i)$, $i \geqslant 1$, лежащими в $D \setminus (E_0 \cup E_1)$. Заметим, что покрытие шарами с теми же центрами и вдвое большими радиусами $B(x_i, 2r_i)$ обладает тем же свойством. Дополнительно можно считать, что все $r_i < 1/2$.

Пусть $\{h_i(x)\}$ – разбиение единицы на $D \setminus (E_0 \cup E_1)$, подчиненное покрытию $\{B(x_i, r_i)\}$.

Возьмём допустимую функцию ρ для $\Gamma(E_0, E_1, D)$ такую, что

$$\int\limits_D \rho^p \, d\sigma < M_{p,F}(E_0, E_1, D) + \varepsilon.$$

Пусть $\varphi(z)$ – бесконечно дифференцируемая неотрицательная в $\mathbb{G}$ функция с носителем в $B(0,1)$ с условием $\int\limits_{\mathbb{G}} \varphi(z)\, dz = 1$.

Обозначим $\rho_i = h_i \rho$, $\varphi_t(x) = t^{-Q} \varphi(\delta_{1/t} x)$, $\tilde{\rho}_i = \int\limits_{\mathbb{G}} \rho_i(y) \varphi_t(x y^{-1}) dy$. Для каждого $i \geqslant 1$ подберем параметр $0 < t_i < \varepsilon$ так, чтобы при $t \leqslant t_i$ $\|\tilde{\rho}_i - \rho_i\|_{p,F} < 2^{-i} \varepsilon^{1/p}$, где норма берется в пространстве $L_{p,F}(D)$, $\|\rho\|_{p,F} = \left(\int\limits_D \rho^p \, d\sigma \right)^{1/p}$ (см. [15, утверждение 1.20], с заменой левых сдвигов на правые и наоборот). Также потребуем, чтобы $zB(x_i, r_i) \subset B(x_i, 2r_i)$ для любого z с $|z| \leqslant t_i$. Это можно сделать в силу неравенства (1).

Функция $\log F(x, \xi)$ равномерно непрерывна на компакте $\{(x, \xi) : x \in \overline{B(x_i, 2r_i)}, 1/2 \leqslant F(x, \xi) \leqslant 3/2\}$, то есть существует $\delta > 0$ такое, что при $|z| < \delta$ имеем $|\xi' - \xi''| < \delta$ и для любого $x \in B(x_i, 2r_i)$ такого, что $zx \in \overline{B(x_i, 2r_i)}$,

$$\frac{F(zx,\xi')}{F(x,\xi'')} \geqslant (1+\varepsilon)^{-1}. \tag{2}$$

Здесь ξ', ξ'' рассматриваем как векторы в базисе X_{1i}, $i = 1, 2, \ldots, n_1$ с евклидовой нормой. Далее считаем, что $t_i < \delta$.

Функция $\tilde{\rho} = \sum\limits_i \tilde{\rho}_i$ является бесконечно дифференцируемой в $D \setminus (E_0 \cup E_1)$ и

$$\int\limits_D \tilde{\rho}^p \, d\sigma < M_{p,F}(E_0, E_1, D) + 2\varepsilon, \tag{3}$$

если положить $\tilde{\rho} = 0$ на $E_0 \cup E_1$.

Далее мы покажем, что функция $(1+\varepsilon)\tilde{\rho}$ является допустимой для $\Gamma(E_0, E_1, D)$. Если $\gamma \in \Gamma(E_0, E_1, D)$, то

$$1 \leqslant \int\limits_\gamma \widetilde{\rho}\, F(x,\, dx) = \int\limits_\gamma \sum_i \rho_i\, F(x,\, dx) = \sum_i \int\limits_{\gamma\cap B(x_i, r_i)} \rho_i\, F(x,\, dx). \tag{4}$$

Преобразуем интеграл от функции $\tilde{\rho}$ по γ:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\gamma \tilde{\rho}\, F(x,\, dx) \\
&= \int\limits_\gamma \sum_i \tilde{\rho}_i\, F(x,\, dx) = \int\limits_\gamma \sum_i \int\limits_{\mathbb{G}} \rho_i(y^{-1}x)\varphi_{t_i}(y)\, dy\, F(x,\, dx) \\
&= \int\limits_\gamma \sum_i \int\limits_{\mathbb{G}} \rho_i((\delta_{t_i} z)^{-1}x)\varphi(z)\, dz\, F(x,\, dx) \\
&= \sum_i \int\limits_{B(0,1)} \varphi(z)\, dz \int\limits_{\gamma\cap B(x_i, 2r_i)} \rho_i((\delta_{t_i} z)^{-1}x)\, F(x, dx) \\
&= \int\limits_{B(0,1)} \varphi(z)\, dz \sum_i \int\limits_{\gamma\cap B(x_i, 2r_i)} \rho_i((\delta_{t_i} z)^{-1}x)\, F(x,\, dx).
\end{aligned} \tag{5}$$

Пусть $z \in B(0,1)$. Для любого $i = 1, 2, \ldots$ рассмотрим дугу γ' из множества $\gamma \cap B(x_i, 2r_i)$. Обозначим $\tilde{\gamma}' = (\delta_{t_i} z)^{-1} \cdot \gamma'$. Эта кривая будет горизонтальной вследствие левоинвариантности X_{1j}, $j = 1, 2, \ldots, n_1$. Соединим соответствующие граничные точки γ' и $\tilde{\gamma}'$ двумя горизонтальными кривыми, лежащими в $B(x_i, 2r_i) \setminus B(x_i, r_i)$. Заменим γ' на объединение $\tilde{\gamma}'$ с этими горизонтальными кривыми. В результате всех этих преобразований получим кривую $\tilde{\gamma}_z$, которая также будет допустимой для $\Gamma(E_0, E_1, D)$.

Далее имеем, делая замену $y = (\delta_{t_i} z)^{-1} x$ и параметризуя кривую γ посредством финслеровой длины дуги (если кривая не спрямляема, то отсчитываем длину дуги от какой-либо точки кривой с соответствующим знаком):

$$\int\limits_{\gamma \cap B(x_i, 2r_i)} \rho_i((\delta_{t_i} z)^{-1} x)\, F(x,\, dx) \geqslant (1+\varepsilon)^{-1} \int\limits_{\tilde{\gamma}_z \cap B(x_i, r_i)} \rho_i(y)\, F(y,\, dy)$$

в силу (2). Подставляя в (5) и используя (4), получим, что

$$\int\limits_{\gamma} \tilde{\rho}\, F(x, dx) \geqslant (1+\varepsilon)^{-1},$$

т.е. $(1+\varepsilon)\tilde{\rho} \in \operatorname{adm}\Gamma(E_0, E_1, D)$. В силу произвольности ε и неравенства (3) лемма доказана. □

Следующая лемма является обобщением на субфинслеровы многообразия результата из [10], который был модифицирован в работе [12].

Определим систему замкнутых множеств E_{ij}, $j \geqslant 0$, $i = 0, 1$, таких, что $E_{ij} \subset \operatorname{int} E_{i,j-1}$ при $j \geqslant 1$, $E_i = \bigcap\limits_{j=0}^{\infty} E_{ij}$, $E_{00} \cap E_{10} = \varnothing$.

Лемма 2. *Пусть $\rho \in L_{p,F}(D)$ – положительная непрерывная в $D \setminus (E_0 \cup E_1)$ функция. Для любого $\varepsilon > 0$ существует функция ρ', $\rho' \geqslant \rho$ в D такая, что*

(1) $\int\limits_D \rho'^p\, d\sigma \leqslant \int\limits_D \rho^p\, d\sigma + \varepsilon$,

(2) *Предположим, что для каждого $j \geqslant 0$ существует кривая $\gamma_j \in \Gamma(E_{0j}, E_{1j}, D)$ такая, что $\int\limits_{\gamma_j} \rho'\, F(x,\, dx) \leqslant \alpha$. Тогда существует кривая $\tilde{\gamma} \in \Gamma(E_0, E_1, D)$ такая, что $\int\limits_{\tilde{\gamma}} \rho\, F(x,\, dx) \leqslant \alpha + \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $E^j = E_{0j} \cup E_{1j}$, $W_j = E^{j-1} \setminus \operatorname{int} E^j$, $d_j = \min(d_c(\partial E_{0j}, \partial E_{0,j-1}), d_c(\partial E_{1,j-1}, \partial E_{1j})) > 0$. Так как функция ρ положительна в $D \setminus (E_0 \cup E_1)$, можно найти последовательность $\varepsilon_j \to 0$ при $j \to \infty$ такую, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1+\varepsilon_j^{-1})\varepsilon_j^{p+1} < \varepsilon, \tag{6}$$

$$\alpha\varepsilon_j < d_j \inf_{W_j \cap D} \rho. \tag{7}$$

Далее, можно найти последовательность компактных множеств D_j такую, что

$D_j \subset \operatorname{int} D_{j+1}$, $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} D_j = D$ и $\int\limits_{D\setminus D_j} \rho^p\, d\sigma < \varepsilon_j$.

Пусть $V_j = (D \setminus D_j) \cap W_j$. Положим

$$\rho'(x) = \begin{cases} (1+\varepsilon_j^{-1})\rho(x), & x \in V_j; \\ \rho(x), & x \in D \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} V_j. \end{cases}$$

Покажем, что функция ρ' удовлетворяет условиям леммы. Используя (6), имеем:

$$\begin{aligned} \int\limits_D \rho'^p\, d\sigma &= \sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{V_j}\Big((1+\varepsilon_j^{-1})\rho\Big)^p\, d\sigma + \int\limits_{D\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} V_j} \rho^p\, d\sigma \leqslant \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}(1+\varepsilon_j^{-1})^p \int\limits_{V_j}\rho^p\, d\sigma + \int\limits_D \rho^p\, d\sigma \leqslant \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}(1+\varepsilon_j^{-1})^p\varepsilon_j^{p+1} + \int\limits_D \rho^p\, d\sigma \leqslant \int\limits_D \rho^p\, d\sigma + \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, условие (1) выполнено. Покажем, что выполняется условие (2). Зафиксируем $j \geqslant 1$. Кривая $\gamma_k \in \Gamma(E_{0j}, E_{1j}, D)$ при $k \geqslant j$, следовательно, она содержит две дуги: дугу γ_k', соединяющую ∂E_{0j} с $\partial E_{0,j-1}$, и дугу γ_k'', соединяющую $\partial E_{1,j-1}$ с ∂E_{1j}. Дуги γ_k' и γ_k'' не содержатся в V_j. Действительно, если выполняется обратное, то с помощью неравенства (7) выводим, что

$$\alpha \geqslant \int\limits_{\gamma_k} \rho'\, F(x,dx) \geqslant \int\limits_{\gamma_k'} \rho'\, F(x,dx) \geqslant \varepsilon_j^{-1} \int\limits_{\gamma_k'} \rho\, F(x,dx) \geqslant \varepsilon_j^{-1} d_j \inf_{W_j\cap D} \rho > \alpha,$$

и аналогичное рассуждение справедливо для γ_k''. Получили противоречие. Значит,

$$\gamma_k \cap (D_j \cap (E_{i,j-1} \setminus \int E_{ij})) \neq \varnothing, \quad i = 0, 1, \quad k \geqslant j.$$

Обозначим $\gamma_k = \gamma_{0k}$. Приведем алгоритм, позволяющий из некоторой последовательности кривых $\gamma_{j-1,k}$ извлечь сходящуюся подпоследовательность γ_{jk}.

Заметим, что множество $D_j \cap (E_{i,j-1} \setminus \operatorname{int} E_{ij})$ является компактом. Следовательно, из последовательности $\gamma_{j-1,k}$ можно выделить подпоследовательность (которую снова обозначим $\gamma_{j-1,k}$), сходящуюся к некоторой кривой γ_0, для которой множество

$$M = \gamma_0 \cap (D_j \cap (E_{0,j-1} \setminus \operatorname{int} E_{0j})) \neq \varnothing.$$

Возьмём какую-либо точку $x_{0j} \in M$. Так как ρ непрерывна в точке x_{0j}, можно выбрать шар $B(x_{0j}, r(x_{0j}))$ такой, что для любой геодезической линии l, соединяющей центр шара и его границу, выполнено условие

$$\int\limits_l \rho\, F(x,\, dx) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{j+3}}. \tag{8}$$

Отбрасывая несколько первых членов последовательности $\gamma_{j-1,k}$, можно считать, что любая кривая этой подпоследовательности пересекает шар $B(x_{0j}, r(x_{0j}))$. Таким же образом рассмотрим множество $D_j \cap (E_{1,j-1} \setminus \operatorname{int} E_{1j})$, точку x_{1j} из этого множества, шар $B(x_{1j}, r(x_{1j}))$, удовлетворяющий условию, аналогичному (8); так же из $\gamma_{j-1,k}$ выделим подпоследовательность, все члены которой пересекают этот шар. Полученная подпоследовательность и будет искомой последовательностью γ_{jk}.

Проводим изложенное построение последовательно для $j = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим диагональную последовательность γ_{kk}.

Кривая γ_{kk} пересекает шары $B(x_{ij}, r(x_{ij}))$, $i = 0, 1$, для $1 \leqslant j \leqslant k$ не менее чем в двух точках. Соединим две точки пересечения с центром соответствующего шара геодезическими линиями. Получим кривую $\tilde{\gamma}_k \in \Gamma(E_{0k}, E_{1k}, D)$, проходящую через точки x_{0j}, x_{1j}, $j = 1, 2, \ldots, k$. Для этой кривой имеем, используя условие (8):

$$\int\limits_{\tilde{\gamma}_k} \rho\, F(x, dx) \leqslant \int\limits_{\gamma_{kk}} \rho\, F(x,\, dx) + 2 \sum_{j=1}^{k} \frac{\varepsilon}{2^{j+3}} \leqslant \alpha + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Пусть Γ_0 – семейство горизонтальных кривых, соединяющих x_{00} и x_{10} в $D\setminus(E_0\cup E_1)$, Γ_{ij} – семейство горизонтальных кривых в $D\setminus(E_0\cup E_1)$, соединяющих x_{ij} и $x_{i,j+1}$, $i=0,1$, $j=1,2,\ldots$. Тогда

$$\inf_{\gamma\in\Gamma_0}\int\limits_\gamma \rho\, F(x,\,dx)+\sum_{j=1}^{k}\inf_{\gamma\in\Gamma_{0j}}\int\limits_\gamma \rho\, F(x,dx)+\sum_{j=1}^{k}\inf_{\gamma\in\Gamma_{1j}}\int\limits_\gamma \rho\, F(x,\,dx) \leqslant \int\limits_{\tilde\gamma_k}\rho\, F(x,dx)\leqslant \alpha+\frac{\varepsilon}{4}.$$

Это верно для любого k, следовательно,

$$\inf_{\gamma\in\Gamma_0}\int\limits_\gamma \rho\, F(x,\,dx)+\sum_{j=1}^{\infty}\inf_{\gamma\in\Gamma_{0j}}\int\limits_\gamma \rho\, F(x,dx)+\sum_{j=1}^{\infty}\inf_{\gamma\in\Gamma_{1j}}\int\limits_\gamma \rho\, F(x,\,dx)\leqslant\alpha+\frac{\varepsilon}{4}.$$

Выберем кривые $C_0\in\Gamma_0$ и $C_{ij}\in\Gamma_{ij}$, $i=0,1$, $j=1,2,\ldots$ так, чтобы

$$\int\limits_{C_0}\rho\, F(x,\,dx)<\inf_{\gamma\in\Gamma_0}\int\limits_\gamma \rho\, F(x,\,dx)+\frac{\varepsilon}{2},$$
$$\int\limits_{C_{ij}}\rho\, F(x,dx)<\inf_{\gamma\in\Gamma_{ij}}\int\limits_\gamma \rho\, F(x,\,dx)+\frac{\varepsilon}{2^{j+3}}.$$

Пусть $\tilde\gamma=\cdots+C_{01}+C_0+C_{11}+\ldots$. Тогда $\tilde\gamma\in\Gamma(E_0,E_1,D)$ и

$$\int\limits_{\tilde\gamma}\rho\, F(x,\,dx)\leqslant\alpha+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}+2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{j+3}}=\alpha+\varepsilon.$$

Лемма доказана. □

Докажем теперь основную теорему.

Теорема 1. *Пусть D – область в $\mathbb{G}$; E_0, E_1 – непересекающиеся непустые компакты из $\bar D$. Тогда*

$$M_{p,F}(\Gamma(E_0,E_1,D))=C_{p,F}(E_0,E_1,D).$$

Доказательство. Сначала докажем неравенство

$$M_{p,F}(\Gamma(E_0,E_1,D))\leqslant C_{p,F}(E_0,E_1,D). \tag{9}$$

Пусть $u \in \mathrm{Adm}(E_0, E_1, D)$, Γ_0 – подсемейство локально спрямляемых горизонтальных кривых γ из $\Gamma(E_0, E_1, D)$ таких, что u абсолютно непрерывна на любой спрямляемой замкнутой части γ. Определим функцию $\rho(x) = H(x, Xu)$ на D.

Пусть $\gamma \in \Gamma_0$ и $\gamma : (a, b) \to D$. Если $a < t_1 < t_2 < b$, то получим:

$$\int\limits_{\gamma} \rho\, F(x,\, dx) \geqslant \int\limits_{t_1}^{t_2} H(x, Xu(\gamma(t)))F(x, \dot\gamma(t))\, dt$$
$$\geqslant \left| \int\limits_{t_1}^{t_2} (Xu(\gamma(t)), \dot\gamma(t))\, dt \right| = |u(\gamma(t_2)) - u(\gamma(t_1))|.$$

Вследствие произвольности t_1 и t_2 получим, что $\int\limits_{\gamma} \rho\, F(x, dx) \geqslant 1$. Таким образом, $\rho \in \mathrm{adm}\, \Gamma_0$.

Следовательно,

$$M_{p,F}(\Gamma_0) \leqslant \int\limits_{D} \rho^p\, d\sigma = \int\limits_{D} H(x, Xu)\, d\sigma.$$

Учитывая, что $M_{p,F}(\Gamma_0) = M_{p,F}(\Gamma(E_0, E_1, D))$ (см. [16] и [18]), переходя к инфимуму по u, получим неравенство (9).

Докажем противоположное неравенство:

$$M_{p,F}(\Gamma(E_0, E_1, D)) \geqslant C_{p,F}(E_0, E_1, D) \tag{10}$$

в случае $(E_0 \cup E_1) \cap \partial D = \varnothing$. Пусть $\rho \in \mathrm{adm}\, \Gamma(E_0, E_1, D)$ – непрерывная в $D \setminus (E_0 \cup E_1)$ функция. Определим в D функцию $u(x) = \min(1, \inf \int\limits_{\beta_x} \rho\, F(x, dx))$, где инфимум берется по всем локально спрямляемым горизонтальным кривым β_x, соединяющим E_0 и x в направлении точки x. Покажем, что $u \in \mathrm{Adm}(E_0, E_1, D)$ и $H(x, Xu) \leqslant \rho$ почти везде в D. Если $u \equiv 1$, то это очевидно.

В случае $u \not\equiv 1$ пусть $\alpha_{x_1 x_2}$ – кратчайшая кривая, соединяющая x_1 и x_2 в направлении точки x_2, где точки x_1 и x_2 выбраны достаточно близко друг от друга. Пусть β_{x_1} – спрямляемая кривая, соединяющая

x_1 и E_0. Тогда

$$u(x_2) \leqslant \int\limits_{\beta_{x_1}} \rho\, F(x, dx) + \int\limits_{\alpha_{x_1 x_2}} \rho\, F(x,\, dx)$$
$$\leqslant \int\limits_{\beta_{x_1}} \rho\, F(x,\, dx) + \max_{x \in \alpha_{x_1 x_2}} \rho(x) d_c(x_1, x_2).$$

Здесь d_c измеряется от x_1 до x_2. Так как β_{x_1} произвольно, то

$$u(x_2) \leqslant u(x_1) + \max_{x \in \alpha_{x_1 x_2}} \rho(x) d_c(x_1, x_2).$$

Используя рассуждения, аналогичные приведеным в [19], убедимся в существовании производных $X_{1j}u$, $j = 1, 2, \ldots, n_1$, почти всюду в D. Пусть x_1 – такая точка, и пусть дана гладкая кривая, проходящая через x_1 в направлении вектора ξ. Устремляя x_2 к x_1 по этой кривой, получим:

$$Xu(x_1)(\xi) \leqslant \rho(x_1) F(x_1, \xi).$$

Поделив на $F(x_1, \xi)$ и взяв супремум по всем ξ, получим, что

$$H(x_1, Xu(x_1)) \leqslant \rho(x_1).$$

Значит,

$$C_{p,F}(E_0, E_1, D) \leqslant \int\limits_D H(x, Xu)^p \, d\sigma \leqslant \int\limits_D \rho^p \, d\sigma.$$

Переходя к инфимуму по ρ, получим неравенство (10) в случае $\partial D \cap (E_0 \cup E_1) = \emptyset$, следовательно, и утверждение теоремы в этом случае.

Рассмотрим общий случай $\partial D \cap (E_0 \cup E_1) \neq \varnothing$. Пусть $0 < \varepsilon < 1/2$. Рассмотрим непрерывную на $D \backslash (E_0 \cup E_1)$ допустимую для $\Gamma(E_0, E_1, D)$ функцию ρ такую, что

$$\int\limits_{D \backslash (E_0 \cup E_1)} \rho^p \, d\sigma < \varepsilon + M_{p,F}(E_0, E_1, D).$$

Можем считать, что $\rho > 0$ на $D \setminus (E_0 \cup E_1)$, иначе возьмем вместо нее функцию $\max(\rho(x), h(x))$, где $h(x) > 0$ – непрерывная на $\mathbb{G}$ функция со сколь угодно малым интегралом $\int\limits_D h^p \, d\sigma$.

Пусть ρ', E_{0j}, E_{1j} такие, как в лемме 2. Покажем, что

$$\int_{\gamma} \rho' \, F(x,\, dx) > 1 - 2\varepsilon$$

для всех $\gamma \in \Gamma(E_{0j}, E_{1j}, D)$ при достаточно больших j.

Действительно, если это не так, то найдутся значения j_k и кривые

$$\gamma_k \in \Gamma(E_{0j_k}, E_{1j_k}, D)$$

такие, что

$$\int_{\gamma_k} \rho' \, F(x, dx) \leqslant 1 - 2\varepsilon.$$

По лемме 2 найдется кривая $\tilde{\gamma} \in \Gamma(E_0, E_1, D)$ такая, что $\int_{\tilde{\gamma}} \rho \, F(x, dx) \leqslant 1 - \varepsilon$, что противоречит допустимости функции ρ.

Определим функцию

$$\tilde{\rho}(x) = \begin{cases} \dfrac{\rho'}{1-2\varepsilon}, & x \in D \setminus (E_{0j} \cup E_{1j}); \\ 0, & x \notin D \setminus (E_{0j} \cup E_{1j}). \end{cases}$$

Она принадлежит $\operatorname{adm} \Gamma(E_0, E_1, D \cup E_{0j} \cup E_{1j})$. Поэтому, в силу доказанного частного случая,

$$\begin{aligned} C_{p,F}(E_0, E_1, D) &\leqslant C_{p,F}(E_0, E_1, D \cup E_{0j} \cup E_{1j}) \\ &= M_{p,F}(E_0, E_1, D \cup E_{0j} \cup E_{1j}) \\ &\leqslant \int_{D} \tilde{\rho}^p \, d\sigma \leqslant (M_{p,F}(E_0, E_1, D) + 2\varepsilon)(1 - 2\varepsilon)^{-p}. \end{aligned}$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$, получим неравенство (10), следовательно, и утверждение теоремы. $\square$

Замечание 2. Из леммы 2 следует непрерывность модуля, т.е.

$$\lim_{j\to\infty} M_{p,F}(E_{0j}, E_{1j}, D) = M_{p,F}(E_0, E_1, D).$$

Литература

1. В. Н. Берестовский, *Однородные пространства с внутренней метрикой и субфинслеровы многообразия. Научный семинар*, http://gct.math.nsc.ru/?p=2632.
2. В. Н. Берестовский, *Универсальные методы поиска нормальных геодезических на группах Ли с левоинвариантной субримановой метрикой.* — Сиб. мат. ж. **55**, No. 5 (2014), 959–970.
3. А. В. Букушева, *Слоения на распределениях с финслеровой метрикой.* — Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика **14**, No. 3 (2014), 247–251.
4. С. Водопьянов, А. Ухлов, *Пространства Соболева и (P, Q)-квазиконформные отображения групп Карно.* — Сиб. мат. ж. **39**,No. 4 (1998), 776–795.
5. С. К. Водопьянов, *Теория потенциала на однородных группах.* — Мат. сб., **180**, No. 1 (1989), 57–77.
6. С. К. Водопьянов, *Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно.* — Сиб. мат. ж. **37**, No. 6, (1996), 1269–1295.
7. С. К. Водопьянов, Н. А. Евсеев, *Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и квазиизометрические отображения.* — Сиб. мат. ж. **55**, No. 5 (2014), 1001–1039.
8. Ю. В. Дымченко, *Равенство емкости и модуля конденсатора на поверхности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **276** (2001), 112–133.
9. Ю. В. Дымченко, *Равенство емкости и модуля конденсатора в финслеровых пространствах.* — Мат. заметки **85**, No. 4 (2009), 594–602.
10. В. А. Шлык, *О равенстве p-емкости и p-модуля.* — Сиб. мат. ж. **34**, No. 6 (1993), 216–221.
11. L. Ahlfors, A. Beurling, *Conformal invariants and function-theoretic null-sets.* — Acta Math. **83** (1950), 101–129.
12. H. Aikawa, M. Ohtsuka, *Extremal lenth of vector measures.* — Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. **24** (1999), 61–88.
13. J. N. Clelland, C. G. Moseley, *Sub-Finsler geometry in dimension three.* — Differential Geometry and its Applications **24**, No. 6 (2006), 628–651.
14. E. L. Donne, *A metric characterization of Carnot groups.* — http://arxiv.org/abs/1304.7493v2.
15. G. Folland, E. Stein, *Hardy Spaces on Homogeneous Groups.* Math. Notes Series, University Press, 1982.
16. B. Fuglede, *Extremal length and functional completion.* — Acta Math. **126**, No. 3 (1957), 171–219.
17. J. Hesse, *A p-extremal length and p-capacity equality.* — Ark. mat. **13**, No. 1 (1975), 131–144.
18. I. Markina, *On coincidence of p-module of a family of curves and p-capacity on the Carnot group.* — Rev. Mat. Iberoamericana **19**, No. 1 (2003), 143–160.
19. J. Mitchell, *On Carnot-Caratheodory metrics.* — J. Diff. Geom. **21**, No. 1 (1985), 35–45.
20. M. Ohtsuka, *Extremal length and precise functions.* — GAKUTO international series, Gakkōtosho, 2003.

21. W. P. Ziemer, *Extremal length and conformal capacity.* — Trans. Amer. Math. Soc. **126** No. 3 (1967), 460–473.

Dymchenko Yu. V. Equality of the capacity and module of a condenser on a sub-Finsler space.

In this paper, the capacity and module of a condenser, and some functional classes on a sub-Finsler space are defined. Their general properties are studied; the equality of the capacity and module of a condenser is proved.

Дальневосточный федеральный университет,
у. Суханова 8, 690950 Владивосток, Россия
E-mail: dymch@mail.ru

Поступило 28 сентября 2016 г.