Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 449, 2016 г.

В. Н. Дубинин

КРИТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ И МОДУЛИ ПРОИЗВОДНОЙ В НУЛЯХ КОМПЛЕКСНОГО ПОЛИНОМА

§1. Введение и формулировка результата

Пусть $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_p z^p$ – алгебраический полином степени p, $p \geqslant 2$, с комплексными коэффициентами и пусть z_1 – нуль полинома P. Предположим, что модули всех критических значений P (т.е. значений P в нулях производной P') не превосходят единицы. Из полученных ранее теорем искажения вытекает, в частности, следующее неравенство

$$|P'(z_1)| \leqslant \frac{p|2c_p|^{1/p}}{2\sin\frac{\pi}{2p}}. \tag{1}$$

Равенство в (1) достигается для полинома Чебышева первого рода $T_p(z) = 2^{p-1}z^p + \dots$ и точки $z_1 = \cos(\pi/(2p))$ (см. [1–3]). Естественно поставить вопрос об оценке сверху произведения

$$\prod_{k=1}^{n} |P'(z_k)|,$$

где $z_k,\ k = 1, \dots, n,$ – нули полинома P, $n \leqslant p$. Заметим, что независимо от ограничения на критические значения полинома P выполняется равенство

$$\prod_{k=1}^{p} |P'(z_k)| = |c_p|^p \prod_{k=1}^{p} \prod_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^{p} |z_k - z_l|,$$

где $z_k,\ k = 1, \dots, p,$ – все нули полинома P с учетом их кратности. Если при этом $|P(z)| \leqslant 1$ для всех z с $P'(z) = 0$, то

$$\prod_{k=1}^{p} |P'(z_k)| \leqslant |pc_p|^p$$

Ключевые слова: полиномы, полином Чебышева, критические значения, симметризация.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-11-00022).

[4, теорема 10]. Ответ на поставленный выше вопрос содержится в следующей более общей теореме.

Теорема 1. *Предположим, что модули всех критических значений полинома*

$$P(z) = c_p \prod_{k=1}^{p}(z - z_k), \quad c_p \neq 0,\ p \geqslant 2,$$

не превосходят единицы, и пусть ν_k, $k = 1, \dots, p$, *– произвольные неотрицательные числа, удовлетворяющие условию* $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_p = p$. *Тогда*

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{p} |P'(z_k)|^{\nu_k^2}}{|c_p|^p \prod\limits_{k=1}^{p} \prod\limits_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^{p} |z_k - z_l|^{\nu_k\nu_l}} \leqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{p} |T_p'(z_k^*)|^{(\nu_k^*)^2}}{(2^{p-1})^p \prod\limits_{k=1}^{p} \prod\limits_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^{p} |z_k^* - z_l^*|^{\nu_k^*\nu_l^*}}, \tag{2}$$

где $z_k^* = -\cos[(2k-1)\pi/(2p)]$, $k = 1, \dots, p$, *– нули полинома Чебышева* T_p, *а числа* ν_k^* *такие, что* $\{\nu_k^*\}_{k=1}^{p} = \{\nu_k\}_{k=1}^{p}$ *и* $\nu_k^* \geqslant \nu_{k+1}^*$, $k = 1, \dots, p-1$.

Условие $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_p = p$ необходимо лишь для придания неравенству (2) симметричной формы. Если все числа ν_k, $k = 1, \dots, p$, равны единице, то неравенство (2) представляет собой равенство для любого полинома P. В общем случае равенство в (2) достигается для полиномов вида $T_p(az + b)$ с произвольными a, $b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, и подходящими значениями ν_k^*, $k = 1, \dots, p$. Неравенство (1) вытекает из неравенства (2) при $\nu_1 = p$, $\nu_i = 0$, $i = 2, \dots, p$.

Доказательство теоремы 1 приводится в третьем параграфе данной статьи. Для удобства читателя во втором параграфе представлены вспомогательные утверждения, связанные с симметризацией [5] и асимптотикой емкостей обобщенных конденсаторов [6].

§2. Емкости конденсаторов и круговая симметризация

Всюду ниже под римановой поверхностью понимается поверхность $\mathscr{R}$, склеенная из конечного или счетного числа областей замкнутой комплексной плоскости таким образом, чтобы выполнялись условия: проекция каждой точки поверхности $\mathscr{R}$ совпадает с точкой склеиваемой области; окрестность каждой точки $\mathscr{R}$ представляет собой или однолистный круг, или конечнолистный круг с единственной точкой разветвления в его центре. *Конденсатором на поверхности* $\mathscr{R}$ называют упорядоченную пару множеств $\mathscr{C} = (\mathscr{B}, \mathscr{E})$, где $\mathscr{B}$ – открытое подмножество $\mathscr{R}$, а $\mathscr{E}$ – компакт в $\mathscr{B}$. Множество $\mathscr{B}\backslash\mathscr{E}$ назовем *полем конденсатора* $\mathscr{C}$. *Емкость* $\operatorname{cap}\mathscr{C}$ конденсатора $\mathscr{C} = (\mathscr{B}, \mathscr{E})$ определяется равенством

$$\operatorname{cap}\mathscr{C} = \inf \int\limits_{\mathscr{B}} |\nabla \mathscr{V}|^2 \, d\sigma,$$

где нижняя грань берется по всем вещественнозначным функциям $\mathscr{V}$, финитным в $\mathscr{B}$, равным единице на $\mathscr{E}$ и удовлетворющим условию Липшица локально в $\mathscr{B}$. Если существует функция $\mathscr{P}$, непрерывная в $\overline{\mathscr{B}}$, равная нулю на $\partial\mathscr{B}$, единице на $\mathscr{E}$ и гармоническая в поле $\mathscr{B}\backslash\mathscr{E}$, то ее называют *потенцальной функцией* конденсатора $\mathscr{C}$. Из принципа Дирихле следует, что в этом случае

$$\operatorname{cap}\mathscr{C} = \int\limits_{\mathscr{B}\backslash\mathscr{E}} |\nabla \mathscr{P}|^2 \, d\sigma.$$

Пусть $\gamma(\rho) = \{w : |w| = \rho\}$, $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$. Обозначим через $\mathfrak{R}_p$, $p \geqslant 2$, совокупность всех римановых поверхностей $\mathscr{R}$, лежащих над комплексной w-сферой и удовлетворяющих следующим условиям:

(1) линейная мера всех дуг на поверхности $\mathscr{R}$, лежащих над любой окружностью $\gamma(\rho)$, с учетом кратности не превосходит $2\pi p\rho$, $0 < \rho < \infty$;

(2) для всех ρ, $1 \leqslant \rho < \infty$, любая замкнутая жорданова кривая на поверхности $\mathscr{R}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$ и не проходящая через точки разветвления $\mathscr{R}$, p-кратно покрывает эту окружность.

Важным для нас частным случаем поверхности класса $\mathfrak{R}_p$ является риманова поверхность $\mathscr{R}(T_p)$ функции, обратной полиному Чебышева $T_p(z)$. Приведем описание этой поверхности в случае $p \geqslant 2$. Пусть D_1 есть w-плоскость с разрезом по лучу $L^- = [-\infty, -1]$, области $D_2, \dots, D_{p-1}$ суть w-плоскости с разрезами и вдоль лучей L^- и $L^+ = [1, +\infty]$ и D_p – w-плоскость с разрезом по лучу L^- в случае четного p и по лучу L^+ в случае, когда p нечетное. Риманову поверхность $\mathscr{R}(T_p)$ можно получить склеиванием областей D_k, $k = 1, \dots, p$, следующим образом (подробнее см. [5]). Область D_1 склеивается "крест на крест," с областью D_2 по берегам разрезов вдоль луча L^-. Область D_2 склеивается с областью D_3 по берегам разрезов вдоль луча L^+ и т.д.

Область D_{p-1} склеивается с областью D_p по берегам разрезов вдоль луча L^- в случае четного p и луча L^+ в случае, когда p нечетное. Склеиваемые области D_k, рассматриваемые как подмножества поверхности $\mathscr{R}(T_p)$, будем обозначать буквами $\mathscr{D}_k$ соответственно, $k = 1, \dots, p$. Обозначим через $\mathscr{L}$ луч, лежащий на листе $\mathscr{D}_1$ над лучом $[0, +\infty]$.

Рассмотрим теперь произвольную поверхность $\mathscr{R}$ класса $\mathfrak{R}_p$, $p \geqslant 2$. Пусть $\mathscr{B}$ – открытое множество на $\mathscr{R}$. Симметризация Sym преобразует множество $\mathscr{B}$ в множество $\operatorname{Sym}\mathscr{B}$, лежащее на поверхности $\mathscr{R}(T_p)$ и обладающее следующими свойствами. Если при данном ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$, над “окружностью,” $\gamma(\rho)$ нет точек множества $\mathscr{B}$, то над ней нет также и точек множества $\operatorname{Sym}\mathscr{B}$. Если множество $\mathscr{B}$ покрывает окружность $\gamma(\rho)$, $1 \leqslant \rho \leqslant \infty$, p-кратно, то множество $\operatorname{Sym}\mathscr{B}$ также покрывает $\gamma(\rho)$ p-кратно. Если $\mathscr{B}$ покрывает $\gamma(\rho)$, $0 \leqslant \rho < 1$, l-кратно, $l \leqslant p$, то часть множества $\operatorname{Sym}\mathscr{B}$, лежащая над $\gamma(\rho)$, состоит из l окружностей на листах $\mathscr{D}_1, \dots, \mathscr{D}_l$. В остальных случаях при $1 \leqslant \rho < \infty$ часть множества $\operatorname{Sym}\mathscr{B}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$, является открытой дугой на $\mathscr{R}(T_p)$ с центром на луче $\mathscr{L}$ и линейной меры, равной мере множества $\mathscr{B}(\rho) := \{W \in \mathscr{B} : |\mathrm{pr}W| = \rho\}$. При $0 < \rho < 1$ часть $\operatorname{Sym}\mathscr{B}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$, представляет собой совокупность из m окружностей $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ и открытой дуги Γ_{m+1}, $\Gamma_k = \Gamma_k(\mathscr{B}, \rho) \subset \mathscr{D}_k$, $k = 1, \dots, m+1$, $0 \leqslant m \leqslant p-1$, суммарная линейная мера которых равна мере множества $\mathscr{B}(\rho)$, а центр дуги Γ_{m+1} расположен над точкой $(-1)^m\rho$. Здесь количество окружностей m зависит от меры множества $\mathscr{B}(\rho)$. Если указанная мера меньше $2\pi\rho$, то необходимо $m = 0$ и множество окружностей пусто.

Результат симметризации $\operatorname{Sym}\mathscr{E}$ замкнутого множества $\mathscr{E} \subset \mathscr{R}$ также лежит на поверхности $\mathscr{R}(T_p)$ и определяется следующим образом. Если при данном ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$, над окружностью $\gamma(\rho)$ нет точек множества $\mathscr{E}$, то над ней нет также и точек множества $\operatorname{Sym}\mathscr{E}$. Если множество $\mathscr{E}$ покрывает окружность $\gamma(\rho)$, $1 \leqslant \rho \leqslant \infty$, p-кратно, то множество $\operatorname{Sym}\mathscr{E}$ покрывает $\gamma(\rho)$ также p-кратно. Если $\mathscr{E}$ покрывает $\gamma(\rho)$, $0 \leqslant \rho < 1$, l-кратно, $l \leqslant p$, то часть множества $\operatorname{Sym}\mathscr{E}$, лежащая над $\gamma(\rho)$, состоит из l окружностей на листах $\mathscr{D}_1, \dots, \mathscr{D}_l$. В остальных случаях часть множества $\operatorname{Sym}\mathscr{E}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$, $1 \leqslant \rho < \infty$, является замкнутой дугой (т.е. дугой, содержащей свои концы) на $\mathscr{R}(T_p)$ с центром на луче $\mathscr{L}$ и линейной меры, равной мере множества $\mathscr{E}(\rho) := \{W \in \mathscr{E} : |\mathrm{pr}W| = \rho\}$ (в случае, когда данная мера равна нулю, соответствующая дуга является точкой на луче $\mathscr{L}$). Часть $\operatorname{Sym}\mathscr{E}$ над $\gamma(\rho)$, $0<\rho<1$, представляет собой совокупность из m окружностей $\Gamma_1,\dots,\Gamma_m$ и замкнутой дуги Γ_{m+1}, $\Gamma_k\subset\mathscr{D}_k$, $k=1,\dots,m+1$, $0\leqslant m\leqslant p-1$, суммарная линейная мера которых равна мере множества $\mathscr{E}(\rho)$, а центр дуги Γ_{m+1} расположен над точкой $(-1)^m\rho$ (если указанная мера равна $2\pi\rho m$, где m – целое неотрицательное число, то дуга Γ_{m+1} является точкой).

Симметризация конденсатора $\mathscr{C}=(\mathscr{B},\mathscr{E})$ определяется равенством

$$\operatorname{Sym}\mathscr{C}=(\operatorname{Sym}\mathscr{B},\operatorname{Sym}\mathscr{E}).$$

Имеет место следующий принцип симметризации для емкостей конденсаторов.

Утверждение 1 ([5, теорема 1.1]). *Для любого конденсатора $\mathscr{C}$ на поверхности $\mathscr{R}$ класса $\mathfrak{R}_p$ справедливо неравенство*

$$\operatorname{cap}\mathscr{C}\geqslant\operatorname{cap}\operatorname{Sym}\mathscr{C}. \tag{3}$$

Если, дополнительно, поле конденсатора $\mathscr{C}=(\mathscr{B},\mathscr{E})$ связное и существует потенциальная функция этого конденсатора, то равенство в (3) *достигается только в следующих случаях*:
(i) *поле конденсатора $\mathscr{C}$ совпадает с полем конденсатора* $\operatorname{Sym}\mathscr{C}$ *с точностью до поворота вокруг начала координат*;
(ii) *при некоторых s,t и l, $0<s<t<\infty$, $1<l\leqslant p$, поле конденсатора $\mathscr{C}$ l-кратно накрывает круговое кольцо $s<|w|<t$ так, что над каждой граничной окружностью этого кольца расположены либо только граничные точки множества $\mathscr{B}$, либо только граничные точки $\mathscr{E}$.*

Нам понадобится также асимптотическая формула для интеграла Дирихле от потенциальной функции обобщенного конденсатора в случае вырождения всех его пластин [6]. Пусть $z_0\in\mathbb{C}$. Семейство замкнутых множеств $\{E(z_0,r)\}_r$, $0<r<r_0$, называется *асимптотически круговым*, если выполняются включения

$$\{z:\ |z-z_0|\leqslant c(r)\}\subset E(z_0,r)\subset\{z:\ |z-z_0|\leqslant d(r)\}$$

для некоторых положительных функций $c(r)$, $d(r)$, удовлетворяющих условию $c(r)\sim d(r)\sim r$, $r\to0$. Элемент асимптотически кругового семейства $E(z_0,r)$ будем называть *почти кругом* с центром в точке z_0 и радиусом r. Заменяя в приведенном выше определении z_0 на ∞ и $|z-z_0|$ на $1/|z|$, получим определение почти кругов $E(\infty,r)$ с центром в ∞ радиуса r.

Утверждение 2. (см. [6, теорема 2.5]) *Пусть* $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ *– совокупность различных точек сферы* $\overline{\mathbb{C}}$, $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ *– совокупность вещественных чисел,* $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^n$, $\psi_k = \mu_k r^{\nu_k}$, μ_k, ν_k, $k = 1, \ldots, n$, *– положительные числа и пусть* $E(z_k, \psi_k)$, $k = 1, \ldots, n$, *– замкнутые почти круги с центрами в точках* z_k *радиусов* ψ_k, *ограниченные гладкими кривыми. Обозначим через* u *функцию, гармоническую в* $B(r) := \overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} E(z_k, \psi_k)$, *непрерывную в* $\overline{B}(r)$ *и равную* δ_k *на* $\partial E(z_k, \psi_k)$, $k = 1, \ldots, n$. *Справедлива формула*

$$\int\limits_{B(r)} |\bigtriangledown u|^2 \, d\sigma = -2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{(\delta_k - \delta)^2}{\nu_k \log r} + R(Z, \Delta, \Psi) \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right), \quad r \to 0,$$

где

$$\delta = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\delta_k}{\nu_k} \right) \Big/ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\nu_k},$$

$$R(Z, \Delta, \Psi) = 2\pi \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{(\delta_k - \delta)^2}{\nu_k^2} \log \mu_k + \sum_{k=1}^{n} \sideset{}{'}\sum_{\substack{l=1, \\ l \neq k}}^{n} \frac{(\delta_k - \delta)(\delta_l - \delta)}{\nu_k \nu_l} \log |z_k - z_l| \right\}$$

и штрих у знака суммы означает, что при $z_k = \infty$ $(z_l = \infty)$ *под соответствующим слагаемым понимается нуль.*

§3. Доказательство теоремы 1

Можно считать, что все нули полинома P простые и, кроме того, числа $\nu_k \neq 0$, $k = 1, \ldots, n-1$, а остальные ν_k (если таковые имеются) равны нулю, $n - 1 \leqslant p$. Полином P отображает сферу $\overline{\mathbb{C}}$ на риманову поверхность $\mathscr{R}(P)$, лежащую над w-плоскостью. Обозначим через W_k, $W_k \in \mathscr{R}(P)$, образ точки z_k при таком отображении, $k = 1, \ldots, n-1$. Для достаточно малого $r > 0$ и каждого $k = 1, \ldots, n-1$ рассмотрим на поверхности $\mathscr{R}(P)$ замкнутый однолистный круг $\mathscr{U}_k(r)$, лежащий над кругом $|w| \leqslant r^{1/\nu_k}$ так, что $W_k \in \mathscr{U}_k(r)$, и пусть $\mathscr{U}_n(r)$ означает замкнутый p-листный круг на поверхности

$\mathscr{R}(P)$, лежащий над множеством $|w| \geqslant 1/r$. Пара множеств

$$\mathscr{C}(r) = \left(\mathscr{R}(P) \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} \mathscr{U}_k(r),\ \mathscr{U}_n(r)\right)$$

образует конденсатор на поверхности $\mathscr{R}(P)$. Рассматривая полином T_p как отображение сферы $\overline{\mathbb{C}}$ на риманову поверхность $\mathscr{R}(T_p)$, введем обозначения $W_k^* = T_p(z_k^*),\ k = 1, \dots, n-1$. Из построения поверхности $\mathscr{R}(T_p)$ во втором параграфе видно, что точка W_k^* принадлежит листу $\mathscr{D}_{p-k+1},\ k = 1, \dots, n-1$. Обозначим $\mathscr{U}_k^*(r)$ замкнутый однолистный круг на поверхности $\mathscr{R}(T_p)$, лежащий над кругом $|w| \leqslant r^{1/\nu_k^*}$ так, что $W_k^* \in \mathscr{U}_k^*(r),\ k = 1, \dots, n-1$, и пусть $\mathscr{U}_n^*(r)$ – замкнутый p-листный круг на поверхности $\mathscr{R}(T_p)$, лежащий над множеством $|w| \geqslant 1/r$. Пара множеств

$$\mathscr{C}^*(r) = \left(\mathscr{R}(T_p) \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} \mathscr{U}_k^*(r),\ \mathscr{U}_n^*(r)\right)$$

является конденсатором на поверхности $\mathscr{R}(T_p)$.

Поверхность $\mathscr{R}(P)$ принадлежит классу $\mathfrak{R}_p$. Действительно, условие (1) в определении этого класса очевидно выполняется. Второе условие вытекает из формулы Гурвица [7, гл. VII, п. 32]. В самом деле, при фиксированном $\rho > 1$ проектирование поверхности $\mathscr{G} = \{W \in \mathscr{R}(P) :\ |\mathrm{pr} W| > \rho\}$ на w-плоскость осуществляет полное накрытие степени p области $|w| > \rho$, ограниченной одной окружностью. В силу условия теоремы 1, поверхность $\mathscr{G}$ содержит только одну точку разветвления порядка $p-1$ в бесконечности. Поэтому $\mathscr{G}$ ограничена только одной кривой, что влечет условие (2). Принадлежность поверхности $\mathscr{R}(P)$ классу $\mathfrak{R}_p$ позволяет проводить симметризацию из §2. Напомним, что $\nu_k^* \geqslant \nu_{k+1}^*,\ k = 1, \dots, n-1$. Поэтому при малых значениях r выполняются включения

$$\mathrm{pr}\,\mathscr{U}_{k+1}^*(r) \subset \mathrm{pr}\,\mathscr{U}_k^*(r), \quad k = 1, \dots, n-2.$$

Учитывая это обстоятельство, по определению симметризации Sym заключаем, что

$$\mathscr{C}^*(r) = \mathrm{Sym}\,\mathscr{C}(r)$$

при достаточно малых r. Утверждение 1 дает

$$\mathrm{cap}\,\mathscr{C}(r) \geqslant \mathrm{cap}\,\mathscr{C}^*(r). \tag{4}$$

Введем обозначения:

$\mathscr{P}$ – потенциальная функция конденсатора $\mathscr{C}$,
$\mathscr{P}^*$ – потенциальная функция конденсатора $\mathscr{C}^*$,

$$u(z) = \mathscr{P}(P(z)), \quad u^*(z) = \mathscr{P}^*(T_p(z)),$$

$$E_k(r) = P^{-1}(\mathscr{U}_k(r)), \quad E_k^*(r) = T_p^{-1}(\mathscr{U}_k^*(r)),\ k = 1, \ldots, n,$$

$$B(r) = \overline{\mathbb{C}} \Big\backslash \bigcup_{k=1}^{n} E_k(r), \quad B^*(r) = \overline{\mathbb{C}} \Big\backslash \bigcup_{k=1}^{n} E_k^*(r).$$

Здесь P и T_p понимаются как отображения сферы $\overline{\mathbb{C}}$ на соответствующую риманову поверхность.

Из конформной инвариантности интеграла Дирихле получаем

$$\operatorname{cap}\mathscr{C}(r) = \int\limits_{B(r)} |\nabla u|^2\, d\sigma, \quad \operatorname{cap}\mathscr{C}^*(r) = \int\limits_{B^*(r)} |\bigtriangledown u^*|^2\, d\sigma. \tag{5}$$

Множество $E_k(r)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, представляет собой замкнутый почти круг с центром в точке z_k радиуса $(1/|P'(z_k)|)r^{1/\nu_k}$, а множество $E_n(r)$ есть почти круг с центром в бесконечности радиуса $(r|c_p|)^{1/p}$. Аналогично, $E_k^*(r)$ – почти круг с центром в точке z_k^* радиуса $(1/|T_p'(z_k^*)|)r^{1/\nu_k^*}$, $k = 1, \ldots, n-1$, а $E_n^*(r)$ – почти круг с центром в бесконечности радиуса $(r2^{p-1})^{1/p}$. Применение утверждения 2, где $\delta_k = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$, $\delta_n = 1$, $\delta = \dfrac{p}{p + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \nu_k}$ и $\nu_k \mapsto 1/\nu_k$, $k = 1, \ldots, n-1$, $\nu_n = 1/p$, приводит к соотношению

$$\begin{aligned}\int\limits_{B(r)} |\nabla u|^2\, d\sigma = &-\frac{2\pi}{\log r}\biggl[\delta^2 \sum_{k=1}^{n-1} \nu_k + (1-\delta)^2 p\biggr] \\ &+ \frac{2\pi}{(\log r)^2}\biggl\{ -\delta^2 \sum_{k=1}^{n-1} \nu_k^2 \log|P'(z_k)| + (1-\delta)^2 p \log|c_p| \\ &+ \delta^2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^{n-1} \nu_k \nu_l \log|z_k - z_l| \biggr\} + o\biggl(\Bigl(\frac{1}{\log r}\Bigr)^2\biggr), \quad r \to 0.\end{aligned}$$

Аналогично

$$\int\limits_{B^*(r)} |\nabla u^*|^2\, d\sigma = -\frac{2\pi}{\log r}\left[\delta^2 \sum_{k=1}^{n-1} \nu_k^* + (1-\delta)^2 p\right]$$
$$+ \frac{2\pi}{(\log r)^2}\left\{- \delta^2 \sum_{k=1}^{n-1} (\nu_k^*)^2 \log |T_n'(z_k^*)| + (1-\delta)^2 p \log 2^{p-1}\right.$$
$$\left. + \delta^2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{l=1,\\ l\neq k}}^{n-1} \nu_k^* \nu_l^* \log |z_k^* - z_l^*|\right\} + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right),\ r\to 0.$$

Подставляя выписанные разложения в (5) и применяя (4), получаем неравенство (2). Теорема доказана.

Литература

1. В. Н. Дубинин, *Неравенство марковского типа и нижняя оценка модулей критических значений полиномов.* — Доклады РАН **451**, No. 5 (2013), 495–497.
2. V. Dubinin, *Four-point distortion theorem for complex polynomials.* — Complex Variables and Elliptic Equations **59**, No. 1 (2014), 59–66.
3. В. Н. Дубинин, *Об одной экстремальной задаче для комплексных полиномов с ограничениями на их критические значения.* — Сиб. мат. ж. **55**, No. 1 (2014), 79–89.
4. P. Erdös, F. Herzog, G. Piranian, *Metric properties of polynomials.* — J. Anal. Math. **6**, No. 1 (1958), 125–148.
5. В. Н. Дубинин, *Круговая симметризация конденсаторов на римановых поверхностях.* — Мат. сб. **206**, No. 1 (2015), 69–96.
6. В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Владивосток, 2009.
7. С. Стоилов, *Теория функций комплексного переменного*. Т.2., М. 1962.

Dubinin V. N. Critical values and moduli of derivative of a complex polynomial at its zeros.

Under some restrictions on critical values of an algebraic polynomial with complex coefficients, a sharp inequality for the product of certain powers of moduli of its derivatives at its zeros is established. The equality is attained for the suitable Chebyshev polynomial of the first kind.

Дальневосточный федеральный университет,
ул. Суханова 8,
Институт прикладной математики ДВО РАН
ул. Радио 7, Владивосток, Россия
E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступило 10 июля 2016 г.