Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 449, 2016 г.

М. В. Бабушкин, В. В. Жук

О СИЛЬНОЙ ФОРМЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ТИПА ВОРОНОВСКОЙ–БЕРНШТЕЙНА С ПОТОЧЕЧНОЙ ОЦЕНКОЙ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА

§1. Введение

1.1. В дальнейшем $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ суть соответственно множества вещественных, неотрицательных вещественных, целых, неотрицательных целых, натуральных чисел. Запись $k = \overline{a, b}$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$, означает, что k пробегает все целые числа между a и b, включая a и b, если они целые. Все функции предполагаются вещественными. Функции, имеющие в некоторой точке устранимый разрыв, доопределяются в этой точке по непрерывности; в других случаях символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0. Сумма $\sum\limits_a^b$ при $b < a$ считается равной нулю. Если $a \in \mathbb{R}$, то $[a]$ – целая часть числа a.

Через E обозначаем промежуток в $\mathbb{R}$ любого типа (открытый, полуоткрытый или замкнутый, конечный или бесконечный). Через $L_1(E)$ обозначаем пространство измеримых функций f, суммируемых на E, с нормой $\|f\|_1 = \int\limits_E |f|$; $L_\infty(E)$ – пространство измеримых ограниченных на E функций f с нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in E} |f(x)|$; $C(E)$ – множество равномерно непрерывных функций $f \colon E \to \mathbb{R}$,

$$C^r(E) = \left\{ f \in C(E) \colon \exists f^{(r)} \in C(E) \right\}.$$

Возрастающая функция $\omega \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условиям:

a) $\omega(t_1 + t_2) \leqslant \omega(t_1) + \omega(t_2)$, если $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$;
b) $\omega(0) = \lim\limits_{t \to 0+} \omega(t) = 0$;

Ключевые слова: асимптотические формулы типа Вороновской–Бернштейна, сильная аппроксимация, локальные оценки для асимптотических формул, модуль непрерывности.

называется модулем непрерывности. Множество всех модулей непрерывности обозначается Ω. Полагаем $\omega(+\infty) = \lim\limits_{t\to+\infty} \omega(t)$. Модуль непрерывности, который является выпуклой вверх на $\mathbb{R}_+$ функцией, называется выпуклым модулем непрерывности. Множество всех выпуклых модулей непрерывности обозначается Ω^*.

Модулем непрерывности функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется функция

$$\omega(f,h,E) = \sup\left\{|f(t_1) - f(t_2)|\colon t_1, t_2 \in E, |t_1 - t_2| \leqslant h\right\}.$$

В случае, когда ясно, о каком промежутке идёт речь, его обозначение опускаем.

Полагаем

$$\begin{aligned}
p_{n,k}(x) &= C_n^k x^k (1-x)^{n-k},\\
B_n(f,x) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x),\\
C_n(f,x) &= \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!},\\
K_n(f,x) &= \sum_{k=0}^{n} \left((n+1) \int\limits_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)\,dt \right) p_{n,k}(x),\\
D_n(f,x) &= \sum_{k=0}^{n} \left((n+1) \int\limits_{0}^{1} f(t) p_{n,k}(t)\,dt \right) p_{n,k}(x),\\
S_{h,1}(f,x) &= \frac{1}{h} \int\limits_{-h/2}^{h/2} f(x+t)\,dt,\\
S_{h,2}(f,x) &= \frac{1}{h} \int\limits_{-h}^{h} f(x+t)\left(1 - \frac{|t|}{h}\right) dt,\\
V_n(f,x) &= \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos^{2n}\frac{t}{2}\,dt.
\end{aligned}$$

Выражения $B_n(f)$, $C_n(f)$, $K_n(f)$, $D_n(f)$ называются, соответственно, суммами Бернштейна, Саса–Миракьяна, Канторовича, Бернштейна–Дюррмейер функции f; $S_{h,1}(f)$, $S_{h,2}(f)$ – средними Стеклова первого и второго порядков функции f, $V_n(f)$ – интегралом Валле-Пуссена функции f.

1.2. Остановимся кратко на описании предшествующих результатов, которые послужили отправным моментом для исследований, содержащихся в данной работе.

Хорошо известна следующая теорема.

Теорема А (Е. В. Вороновская, см., например, [1, с. 246], [2, с. 307]). *Пусть f ограничена на $[0,1]$ и имеет вторую производную f'' в точке $x \in [0,1]$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(B_n(f,x) - f(x)\right) = \frac{x(1-x)}{2} f''(x).$$

Если $f \in C^2\left([0,1]\right)$, то сходимость равномерная.

Этот результат привлёк внимание С. Н. Бернштейна. Положим

$$S_{r,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^r p_{n,k}(x).$$

Бернштейн (см. [3, с. 155]) установил ряд результатов следующего типа. Если функция f имеет на отрезке $[0,1]$ непрерывную производную порядка $2i$, то справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} n^i \left(B_n(f,x) - \sum_{k=0}^{2i-1} \frac{S_{k,n}(x) f^{(k)}(x)}{k!}\right) = \frac{f^{(2i)}(x)}{i!} \left(\frac{x(1-x)}{2}\right)^i.$$

Упомянутые работы Вороновской и Бернштейна вызвали многочисленные аналогичные исследования в различных направлениях многих математиков (см., например, [4–6] и указанную там литературу). В частности, в работе [4] установлены следующие утверждения, имеющие непосредственное отношение к результатам настоящей работы.

Теорема B. *Пусть функция f ограничена на $[0,1]$, $x_0 \in [0,1]$ и при всех t таких, что точки $x_0 + t$ принадлежат $[0,1]$, имеет место оценка*

$$|f(x_0+t) - f(x_0)| \leqslant \omega(|t|),$$

где $\omega \in \Omega$. *Тогда для приближения функции* f *в точке* x_0 *многочленами Бернштейна справедливо неравенство*

$$|f(x_0) - B_n(f, x_0)| \leqslant 2\omega\left(\sqrt{\frac{x_0(1-x_0)}{n}}\right). \tag{1.1}$$

Теорема C. *Пусть функция* f *ограничена на* $[0, 1]$, *имеет в точке* $x_0 \in [0, 1]$ *производную первого порядка и при всех* t *таких, что точки* $x_0 + t$ *принадлежат* $[0, 1]$, *справедливо представление*

$$f(x_0 + t) = f(x_0) + f'(x_0)t + v(t)t,$$

для функции $v(t)$ *в котором выполняется оценка* $|v(t)| \leqslant \omega(|t|)$, *где* $\omega \in \Omega$. *Тогда для приближения* f *в точке* x_0 *многочленами Бернштейна имеет место неравенство*

$$|f(x_0) - B_n(f, x_0)| \leqslant 2\sqrt{\frac{x_0(1-x_0)}{n}}\,\omega\left(\sqrt{\frac{x_0(1-x_0)}{n}}\right). \tag{1.2}$$

Основная особенность теорем B и C по отношению к ранее известным результатам состоит в том, что оценка для отклонений полиномов Бернштейна даётся посредством модуля непрерывности, связанным с точкой, в которой исследуется точность приближения, а не с помощью модуля непрерывности, взятому по всему отрезку.

В работах [7,8]] были рассмотрены вопросы, относящиеся к сильному приближению функций (значение этого термина становится ясным хотя бы из неравенства (3.1)) посредством положительных операторов в том плане, как они изучались до работы [4].

В данной работе получены результаты в указанном выше направлении, но при этом приближение исследуется в индивидуальной точке с привлечением модуля непрерывности, связанным с ней.

§2. Вспомогательные результаты

2.1. Нам понадобятся следующие известные утверждения.

Теорема D (см., например, [9, с. 69], [10, с. 5]). *Для любого модуля непрерывности* ω *существует выпуклый модуль непрерывности* ω^* *такой, что при всех неотрицательных* t *и* λ

$$\omega(\lambda t) \leqslant \omega^*(\lambda t) \leqslant (\lambda + 1)\omega(t).$$

Лемма A. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$(n+1)\sum_{k=0}^{n}\left(\int\limits_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}(t-x)^2\,dt\right)p_{n,k}(x)=\frac{(n-1)x(1-x)+\frac{1}{3}}{(n+1)^2}, \tag{2.1}$$

$$(n+1)\sum_{k=0}^{n}\left(\int\limits_{0}^{1}(t-x)^2p_{n,k}(t)\,dt\right)p_{n,k}(x)=\frac{2(n-3)x(1-x)+2}{(n+2)(n+3)}. \tag{2.2}$$

При $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2p_{n,k}(x)=\frac{x(1-x)}{n}, \tag{2.3}$$

$$e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\frac{(nx)^k}{k!}=\frac{x}{n}. \tag{2.4}$$

2.2. Следующие утверждения приведём с доказательствами.

Лемма B. *Пусть* $\omega \in \Omega^*$, $p \geqslant 1$, $\lambda(t)=\omega\left(t^{\frac{1}{p}}\right)^p$. *Тогда* $\lambda \in \Omega^*$.

Доказательство. Очевидно, что λ – непрерывная, возрастающая на $\mathbb{R}_+$ функция, причём $\lambda(0)=0$. Покажем, что λ выпукла вверх. Отсюда будет следовать (см., например, [10, с. 4]), что λ – выпуклый модуль непрерывности.

Пусть $0 \leqslant x < y$. Положим

$$l(t)=\frac{\omega(y)-\omega(x)}{y-x}t+\frac{y\omega(x)-x\omega(y)}{y-x}=\alpha t+\beta.$$

В силу возрастания $\omega(t)$

$$\alpha=\frac{\omega(y)-\omega(x)}{y-x}\geqslant 0.$$

Так как ω выпукла вверх, то функция $\frac{\omega(t)}{t}$ убывает на $(0,\infty)$. Поэтому

$$\begin{aligned}\beta=\frac{y\omega(x)-x\omega(y)}{y-x}&=\frac{y}{y-x}\left(\omega(x)-x\frac{\omega(y)}{y}\right)\\&\geqslant\frac{y}{y-x}\left(\omega(x)-\frac{x\omega(x)}{x}\right)=0.\end{aligned}$$

Поскольку ω выпукла вверх,

$$l(x) = \omega(x), \quad l(y) = \omega(y),$$

$$x \leqslant \left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant y,$$

то

$$l\left(\left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right) \leqslant \omega\left(\left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

Принимая во внимание неравенство Минковского, получаем

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\omega^p(x) + \omega^p(y)}{2}\right)^{\frac{1}{p}} &= 2^{-\frac{1}{p}} \left(l^p(x) + l^p(y)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 2^{-\frac{1}{p}} \left((\alpha x + \beta)^p + (\alpha y + \beta)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
\leqslant 2^{-\frac{1}{p}} \left(((\alpha x)^p + (\alpha y)^p)^{\frac{1}{p}} + (\beta^p + \beta^p)^{\frac{1}{p}}\right) &= \alpha\left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} + \beta \\
&= l\left(\left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right) \leqslant \omega\left(\left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right).
\end{aligned}$$

Таким образом, для любых $0 \leqslant x < y$

$$\frac{\omega^p(x) + \omega^p(y)}{2} \leqslant \omega\left(\left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p.$$

Полагая здесь $x = t_1^{\frac{1}{p}}$, $y = t_2^{\frac{1}{p}}$, получаем, что для любых $0 \leqslant t_1 < t_2$

$$\frac{\lambda(t_1) + \lambda(t_2)}{2} \leqslant \lambda\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right),$$

что и означает выпуклость вверх функции λ. □

Лемма C. *Пусть* $r \in \mathbb{Z}_+$, $f \in C^r(E)$, $\omega \in \Omega^*$, $x \in E$, *для всех* u *таких, что* $x + u \in E$, *справедлива оценка*

$$\left|f^{(r)}(x+u) - f^{(r)}(x)\right| \leqslant \omega(|u|).$$

Тогда при $x + t \in E$

$$\left|f(x+t) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} t^l\right| \leqslant \frac{|t|^r}{r!} \omega\left(\frac{|t|}{r+1}\right).$$

Доказательство. Очевидно, что лемма верна при $r = 0$. Пусть $r \in \mathbb{N}$, тогда, в силу формулы Тейлора с интегральным остаточным членом

$$f(x+t)-\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}t^l = \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^t \left(f^{(r)}(x+u)-f^{(r)}(x)\right)(t-u)^{r-1}\,du.$$

Пусть $t > 0$. Применяя интегральное неравенство Иенсена, получаем

$$\begin{aligned}&\left|f(x+t)-\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}t^l\right| \\ &\qquad\leqslant \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^t \left|f^{(r)}(x+u)-f^{(r)}(x)\right|(t-u)^{r-1}\,du \\ &\qquad\leqslant \frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^t \omega(u)(t-u)^{r-1}\,du = \frac{t^r}{r!}\int\limits_0^t \omega(u)\frac{r}{t^r}(t-u)^{r-1}\,du \\ &\qquad\leqslant \frac{t^r}{r!}\omega\left(\int\limits_0^t \frac{ur}{t^r}(t-u)^{r-1}\,du\right).\end{aligned}$$

Интегрируя по частям аргумент модуля непрерывности ω, находим

$$\int\limits_0^t \frac{ur}{t^r}(t-u)^{r-1}\,du = \frac{r}{t^r}\left(\frac{1}{r}\int\limits_0^t (t-u)^r\,du\right) = \frac{t}{r+1}.$$

Аналогично рассматривается случай, когда $t < 0$. □

В связи с леммой C укажем на теорему 2.1 из работы [5].

§3. Основные результаты

Теорема 3.1. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $p \geqslant 1$, $\omega \in \Omega^*$, ограниченная функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ имеет в точке $x \in E$ производную r-го порядка, при всех t таких, что $x + t \in E$, справедливо представление*

$$f(x+t) = \sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}t^l + \frac{\varepsilon(t)}{r!}t^r,$$

где $|\varepsilon(t)| \leqslant \omega(|t|)$. *Пусть, далее,* $Q \subset \mathbb{Z}$, *при всех* $k \in Q$ *будет* $x_k \in E$, $p_k \geqslant 0$, $\sum\limits_{k\in Q} p_k = 1$. *Положим*

$$L(f) = \sum_{k\in Q} f(x_k)p_k, \quad \alpha_s = \sum_{k\in Q} |x_k - x|^s \, p_k.$$

Тогда, если $0 < \alpha_{pr} \leqslant M$, $\alpha_{p(r+1)} < +\infty$, *то*

$$\begin{aligned} &\left|L(f) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \sum_{k\in Q} (x_k - x)^l p_k\right| \\ &\qquad \leqslant \left(\sum_{k\in Q} \left|f(x_k) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}(x_k - x)^l\right|^p p_k\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\qquad \leqslant \frac{\alpha_{pr}^{\frac{1}{p}}}{r!}\omega\left(\left(\frac{\alpha_{p(r+1)}}{\alpha_{pr}}\right)^{\frac{1}{p}}\right) \leqslant \frac{M^{\frac{1}{p}}}{r!}\omega\left(\left(\frac{\alpha_{p(r+1)}}{M}\right)^{\frac{1}{p}}\right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} &\left|L(f) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \sum_{k\in Q} (x_k - x)^l p_k\right| \\ &\qquad = \left|\sum_{k\in Q} f(x_k)p_k - \sum_{k\in Q}\sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}(x_k - x)^l p_k\right| \\ &\qquad = \left|\sum_{k\in Q} \left(f(x_k) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}(x_k - x)^l\right) p_k\right| \\ &\qquad\qquad \leqslant \sum_{k\in Q} \left|f(x_k) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}(x_k - x)^l\right| p_k. \end{aligned}$$

Теперь, применяя неравенство Гёльдера для сумм, находим

$$\left|L(f)-\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}\sum_{k\in Q}(x_k-x)^l p_k\right|$$
$$\leqslant\left(\sum_{k\in Q}\left|f(x_k)-\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}(x_k-x)^l\right|^p p_k\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Используя представление для f, лемму B и неравенство Иенсена для сумм, получаем

$$\begin{aligned}\sum_{k\in Q}\left|f(x_k)-\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}(x_k-x)^l\right|^p p_k &= \sum_{k\in Q}\left|\frac{\varepsilon(x_k-x)}{r!}\right|^p |x_k-x|^{pr}p_k\\
&\leqslant \sum_{k\in Q}\left(\frac{\omega\left(|x_k-x|\right)}{r!}\right)^p |x_k-x|^{pr}p_k\\
&= \frac{\alpha_{pr}}{(r!)^p}\sum_{k\in Q}\omega\left(\left(|x_k-x|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p\frac{|x_k-x|^{pr}p_k}{\alpha_{pr}}\\
&\leqslant \frac{\alpha_{pr}}{(r!)^p}\omega\left(\left(\sum_{k\in Q}|x_k-x|^p\frac{|x_k-x|^{pr}p_k}{\alpha_{pr}}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p\\
&= \frac{\alpha_{pr}}{(r!)^p}\omega\left(\left(\frac{\alpha_{p(r+1)}}{\alpha_{pr}}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left(\sum_{k\in Q}\left|f(x_k)-\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}(x_k-x)^l\right|^p p_k\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{\alpha_{pr}^{\frac{1}{p}}}{r!}\omega\left(\left(\frac{\alpha_{p(r+1)}}{\alpha_{pr}}\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

Осталось принять во внимание, что функция $t\omega\left(\frac{1}{t}\right)$ возрастает при $t>0$. □

Замечание 3.1. Если в условиях теоремы 3.1 отказаться от требования, чтобы модуль непрерывности был выпуклым, то, считая $\lambda>0$, с помощью теоремы D получаем

$$\left(\sum_{k\in Q}\left|f(x_k)-\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}(x_k-x)^l\right|^p p_k\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\lambda+1)\frac{M^{\frac{1}{p}}}{r!}\omega\left(\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\alpha_{p(r+1)}}{M}\right)^{\frac{1}{p}}\right),$$

где $\omega\in\Omega$.

Аналогичные замечания можно сделать и ко многим неравенствам, устанавливаемым ниже, но на этом, как правило, мы не будем останавливаться.

Следствие 3.1. *Пусть $p\geqslant 1$, $\omega\in\Omega^*$, $x\in E$, для ограниченной функции $f\colon E\to\mathbb{R}$ при всех t таких, что $x+t\in E$, справедливо неравенство*

$$|f(x+t)-f(x)|\leqslant\omega(|t|).$$

Пусть, далее, $Q\subset\mathbb{Z}$, при всех $k\in Q$ будет $x_k\in E$, $p_k\geqslant 0$, $\sum\limits_{k\in Q}p_k=1$. Положим

$$L(f)=\sum_{k\in Q}f(x_k)p_k.$$

Тогда

$$|L(f)-f(x)|\leqslant\left(\sum_{k\in Q}|f(x_k)-f(x)|^p p_k\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\omega\left(\left(\sum_{k\in Q}|x_k-x|^p p_k\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

В частности, при $p=2$

$$\left(\sum_{k\in Q}(f(x_k)-f(x))^2 p_k\right)^{\frac{1}{2}}=\Big((L(f)-f(x))^2+L(f^2)-L^2(f)\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant\omega\left(\left(\sum_{k\in Q}(x_k-x)^2p_k\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Для доказательства следствия 3.1 достаточно положить $r = 0$ в теореме 3.1. Равенство при $p = 2$ проверяется непосредственными вычислениями.

Следствие 3.2. *Пусть $p \geqslant 1$, $\omega \in \Omega^*$, ограниченная функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ имеет в точке $x \in E$ производную, при всех t таких, что $x+t \in E$, справедливо представление*

$$f(x+t) = f(x) + f'(x)t + \varepsilon(t)t,$$

где $|\varepsilon(t)| \leqslant \omega(|t|)$. Пусть, далее, $Q \subset \mathbb{Z}$, при всех $k \in Q$ будет $x_k \in E$, $p_k \geqslant 0$, $\sum\limits_{k\in Q} p_k = 1$. Положим

$$L(f) = \sum_{k\in Q} f(x_k)p_k, \quad \alpha_s = \sum_{k\in Q} |x_k - x|^s p_k.$$

Тогда, если

$$\sum_{k\in Q}(x_k - x)p_k = 0, \quad 0 < \alpha_p \leqslant M, \quad \alpha_{2p} < +\infty,$$

то

$$|L(f) - f(x)| \leqslant \left(\sum_{k\in Q} |f(x_k) - f(x) - f'(x)(x_k - x)|^p\, p_k\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant M^{\frac{1}{p}}\omega\left(\left(\frac{\alpha_{2p}}{M}\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

Для доказательства достаточно положить $r = 1$ в теореме 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $p \geqslant 1$, $\omega \in \Omega^*$, функция $f \in L_\infty(E)$ в точке $x \in E$ имеет производную r-го порядка, при всех t таких, что $x + t \in E$, справедливо представление*

$$f(x+t) = \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}t^l + \frac{\varepsilon(t)}{r!}t^r,$$

где $|\varepsilon(t)| \leqslant \omega(|t|)$. Пусть, далее, $Q \subset \mathbb{Z}$, при всех $k \in Q$ будет $p_k \geqslant 0$, $\varphi_k \in L_1(E)$, $\varphi_k(t) \geqslant 0$ для всех $t \in E$, $\int\limits_E \varphi_k = 1$, $\sum\limits_{k\in Q} p_k = 1$. Положим

$$U(f) = \sum_{k\in Q}\left(\int\limits_E f(t)\varphi_k(t)\,dt\right)p_k, \quad \beta_s = \sum_{k\in Q}\left(\int\limits_E |t-x|^s\varphi_k(t)\,dt\right)p_k.$$

Тогда, если $\beta_{pr} \leqslant M$, $\beta_{p(r+1)} < +\infty$, *то*

$$\left| U(f) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \sum_{k \in Q} \left(\int_E (t-x)^l \varphi_k(t)\, dt \right) p_k \right|$$
$$\leqslant \left(\sum_{k \in Q} \left(\int_E \left| f(t) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l \right|^p \varphi_k(t)\, dt \right) p_k \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant \frac{\beta_{pr}^{\frac{1}{p}}}{r!} \omega \left(\left(\frac{\beta_{p(r+1)}}{\beta_{pr}} \right)^{\frac{1}{p}} \right) \leqslant \frac{M^{\frac{1}{p}}}{r!} \omega \left(\left(\frac{\beta_{p(r+1)}}{M} \right)^{\frac{1}{p}} \right).$$

Доказательство. Имеем

$$U(f) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \sum_{k \in Q} \left(\int_E (t-x)^l \varphi_k(t)\, dt \right) p_k$$
$$= \sum_{k \in Q} \left(\int_E f(t)\varphi_k(t)\, dt \right) p_k - \sum_{k \in Q} \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \left(\int_E (t-x)^l \varphi_k(t)\, dt \right) p_k$$
$$= \sum_{k \in Q} \left(\int_E f(t)\varphi_k(t)\, dt - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \int_E (t-x)^l \varphi_k(t)\, dt \right) p_k$$
$$= \sum_{k \in Q} \left(\int_E f(t)\varphi_k(t)\, dt - \int_E \left(\sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l \right) \varphi_k(t)\, dt \right) p_k$$
$$= \sum_{k \in Q} \left(\int_E \left(f(t) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l \right) \varphi_k(t)\, dt \right) p_k.$$

Отсюда, применяя неравенство Гёльдера сначала для интегралов, а затем для сумм, получаем

$$\left|U(f) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \sum_{k\in Q} \left(\int\limits_E (t-x)^l \varphi_k(t)\,dt\right) p_k\right|$$
$$\leqslant \sum_{k\in Q} \left(\int\limits_E \left|f(t) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l\right| \varphi_k(t)\,dt\right) p_k$$
$$\leqslant \sum_{k\in Q} \left(\int\limits_E \left|f(t) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l\right|^p \varphi_k(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}} p_k$$
$$\leqslant \left(\sum_{k\in Q} \left(\int\limits_E \left|f(t) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l\right|^p \varphi_k(t)\,dt\right) p_k\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теперь, принимая во внимание представление для f, находим

$$\sum_{k\in Q} \left(\int\limits_E \left|f(t) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l\right|^p \varphi_k(t)\,dt\right) p_k$$
$$= \sum_{k\in Q} \left(\int\limits_E \left|\frac{\varepsilon(t-x)}{r!}\right|^p |t-x|^{pr} \varphi_k(t)\,dt\right) p_k$$
$$\leqslant \sum_{k\in Q} \left(\int\limits_E \left(\frac{\omega\left(|t-x|\right)}{r!}\right)^p |t-x|^{pr} \varphi_k(t)\,dt\right) p_k. \quad (3.2)$$

Положим

$$\mu_{s,k} = \int\limits_E |t-x|^s \varphi_k(t)\,dt.$$

Принимая во внимание лемму B, применяя неравенство Иенсена сначала для интегралов, а затем для сумм, имеем

$$\sum_{k\in Q}\left(\int_E\left(\frac{\omega\left(|t-x|\right)}{r!}\right)^p|t-x|^{pr}\varphi_k(t)\,dt\right)p_k$$
$$=\frac{1}{(r!)^p}\sum_{k\in Q}\mu_{pr,k}\left(\int_E\omega\left((|t-x|^p)^{\frac{1}{p}}\right)^p\frac{|t-x|^{pr}\varphi_k(t)}{\mu_{pr,k}}\,dt\right)p_k$$
$$\leqslant\frac{1}{(r!)^p}\sum_{k\in Q}\mu_{pr,k}\omega\left(\left(\int_E|t-x|^p\frac{|t-x|^{pr}\varphi_k(t)}{\mu_{pr,k}}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p p_k$$
$$=\frac{\beta_{pr}}{(r!)^p}\sum_{k\in Q}\omega\left(\left(\frac{\mu_{p(r+1),k}}{\mu_{pr,k}}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p\frac{\mu_{pr,k}p_k}{\beta_{pr}}$$
$$\leqslant\frac{\beta_{pr}}{(r!)^p}\omega\left(\left(\sum_{k\in Q}\frac{\mu_{p(r+1),k}}{\mu_{pr,k}}\frac{\mu_{pr,k}p_k}{\beta_{pr}}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p$$
$$=\frac{\beta_{pr}}{(r!)^p}\omega\left(\left(\sum_{k\in Q}\frac{\mu_{p(r+1),k}p_k}{\beta_{pr}}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p=\frac{\beta_{pr}}{(r!)^p}\omega\left(\left(\frac{\beta_{p(r+1)}}{\beta_{pr}}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p. \quad (3.3)$$

Таким образом, сопоставляя (3.2) и (3.3), получаем

$$\left(\sum_{k\in Q}\left(\int_E\left|f(t)-\sum_{l=0}^r\frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l\right|^p\varphi_k(t)\,dt\right)p_k\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant\frac{\beta_{pr}^{\frac{1}{p}}}{r!}\omega\left(\left(\frac{\beta_{p(r+1)}}{\beta_{pr}}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\leqslant\frac{M^{\frac{1}{p}}}{r!}\omega\left(\left(\frac{\beta_{p(r+1)}}{M}\right)^{\frac{1}{p}}\right). \quad \square$$

Следствие 3.3. *Пусть* $p\geqslant 1$, $\omega\in\Omega^*$, $x\in E$, $f\in L_\infty(E)$, *при всех* t *таких, что* $x+t\in E$, *справедлива оценка*

$$|f(x+t)-f(x)|\leqslant\omega(|t|).$$

Пусть, далее, $Q \subset \mathbb{Z}$, при всех $k \in Q$ будет $p_k \geqslant 0$, $\varphi_k \in L_1(E)$, $\varphi_k(t) \geqslant 0$ для всех $t \in E$, $\int\limits_E \varphi_k(t)\,dt = 1$, $\sum\limits_{k\in Q} p_k = 1$. Положим

$$U(f) = \sum_{k\in Q} \left(\int_E f(t)\varphi_k(t)\,dt \right) p_k.$$

Тогда

$$|U(f) - f(x)| \leqslant \left(\sum_{k\in Q} \left(\int_E |f(t) - f(x)|^p \,\varphi_k(t)\,dt \right) p_k \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \omega \left(\left(\sum_{k\in Q} \left(\int_E |t - x|^p \varphi_k(t)\,dt \right) p_k \right)^{\frac{1}{p}} \right).$$

В частности, при $p = 2$

$$\left(\sum_{k\in Q} \left(\int_E (f(t) - f(x))^2 \,\varphi_k(t)\,dt \right) p_k \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \Big((U(f) - f(x))^2 + U(f^2) - U^2(f) \Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \omega \left(\left(\sum_{k\in Q} \left(\int_E (t - x)^2 \varphi_k(t)\,dt \right) p_k \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Для доказательства достаточно положить $r = 0$ в теореме 3.2.

Теорема 3.3. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $p \geqslant 1$, $\omega \in \Omega^*$, функция $f \in L_\infty(E)$ в точке $x \in E$ имеет производную r-го порядка, при всех t таких, что $x + t \in E$, справедливо представление*

$$f(x+t) = \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} t^l + \frac{\varepsilon(t)}{r!} t^r,$$

где $|\varepsilon(t)| \leqslant \omega(|t|)$. *Пусть, далее,* $\psi \in L_1(E)$, $\psi(t) \geqslant 0$ *для всех* $t \in E$, $\int\limits_E \psi(t)\,dt = 1$. *Положим*

$$V(f) = \int\limits_E f(t)\psi(t)\,dt, \quad \gamma_s = \int\limits_E |t-x|^s \psi(t)\,dt.$$

Тогда, если $\gamma_{pr} \leqslant M$, $\gamma_{p(r+1)} < +\infty$, *то*

$$\begin{aligned} &\left| V(f) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \int\limits_E (t-x)^l \psi(t)\,dt \right| \\ &\qquad \leqslant \left(\int\limits_E \left| f(t) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l \right|^p \psi(t)\,dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\qquad\qquad \leqslant \frac{\gamma_{pr}^{\frac{1}{p}}}{r!}\omega\left(\left(\frac{\gamma_{p(r+1)}}{\gamma_{pr}} \right)^{\frac{1}{p}} \right) \leqslant \frac{M^{\frac{1}{p}}}{r!}\omega\left(\left(\frac{\gamma_{p(r+1)}}{M} \right)^{\frac{1}{p}} \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} &V(f) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \int\limits_E (t-x)^l \psi(t)\,dt \\ &\qquad = \int\limits_E f(t)\psi(t)\,dt - \int\limits_E \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l \psi(t)\,dt \\ &\qquad\qquad = \int\limits_E \left(f(t) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l \right) \psi(t)\,dt. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$
\begin{aligned}
&\left|V(f)-\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}\int\limits_E (t-x)^l\psi(t)\,dt\right| \\
&\qquad\leqslant \int\limits_E \left|f(t)-\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l\right|\psi(t)\,dt \\
&\qquad\qquad\leqslant \left(\int\limits_E \left|f(t)-\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l\right|^p\psi(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Используя представление для f, имеем

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_E \left|f(t)-\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}(t-x)^l\right|^p\psi(t)\,dt \\
&= \int\limits_E \left|\frac{\varepsilon(t-x)}{r!}\right|^p|t-x|^{pr}\psi(t)\,dt \leqslant \int\limits_E \left(\frac{\omega\left(|t-x|\right)}{r!}\right)^p|t-x|^{pr}\psi(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

Принимая во внимание лемму B и неравенство Иенсена для интегралов, находим

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_E \left(\frac{\omega\left(|t-x|\right)}{r!}\right)^p|t-x|^{pr}\psi(t)\,dt \\
&\qquad= \frac{\gamma_{pr}}{(r!)^p}\int\limits_E \omega\left(\left(|t-x|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p\frac{|t-x|^{pr}\psi(t)}{\gamma_{pr}}\,dt \\
&\leqslant \frac{\gamma_{pr}}{(r!)^p}\omega\left(\left(\int\limits_E |t-x|^p\frac{|t-x|^{pr}\psi(t)}{\gamma_{pr}}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p = \frac{\gamma_{pr}}{(r!)^p}\omega\left(\left(\frac{\gamma_{p(r+1)}}{\gamma_{pr}}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p.
\end{aligned}
$$

Остаётся заметить, что функция $t\omega\left(\frac{1}{t}\right)$ возрастает. $\square$

Следствие 3.4. *Пусть $r\in\mathbb{Z}_+$, $p\geqslant 1$, $\omega\in\Omega^*$, 2π-периодическая функция $f\in L_\infty(\mathbb{R})$ в точке $x\in\mathbb{R}$ имеет производную r-го порядка,* *при всех* $t \in \mathbb{R}$ *справедливо представление*

$$f(x+t) = \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} t^l + \frac{\varepsilon(t)}{r!} t^r,$$

где $|\varepsilon(t)| \leqslant \omega(|t|)$. *Пусть, далее,* $\chi \in L_1(\mathbb{R})$, $\chi(t) \geqslant 0$ *для всех* $t \in \mathbb{R}$, $\int\limits_{\mathbb{R}} \chi(t)\,dt = 1$. *Положим*

$$W(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x+t)\chi(t)\,dt, \quad \delta_s = \int\limits_{\mathbb{R}} |t|^s \chi(t)\,dt.$$

Тогда, если $\delta_{pr} \leqslant M$, $\delta_{p(r+1)} < +\infty$, *то*

$$\left| W(f) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} \int\limits_{\mathbb{R}} t^l \chi(t)\,dt \right|$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left| f(x+t) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} t^l \right|^p \chi(t)\,dt \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant \frac{\delta_{pr}^{\frac{1}{p}}}{r!} \omega\left(\left(\frac{\delta_{p(r+1)}}{\delta_{pr}} \right)^{\frac{1}{p}} \right) \leqslant \frac{M^{\frac{1}{p}}}{r!} \omega\left(\left(\frac{\delta_{p(r+1)}}{M} \right)^{\frac{1}{p}} \right).$$

Доказательство. Пусть $g(t) = f(x+t)$. Применим к этой функции теорему 3.3, положив в ней $E = \mathbb{R}$, $x = 0$, $\psi = \chi$. Тогда

$$\left| V(g) - \sum_{l=0}^{r} \frac{g^{(l)}(0)}{l!} \int\limits_{\mathbb{R}} t^l \chi(t)\,dt \right|$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left| g(t) - \sum_{l=0}^{r} \frac{g^{(l)}(0)}{l!} t^l \right|^p \chi(t)\,dt \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant \frac{\delta_{pr}^{\frac{1}{p}}}{r!} \omega\left(\left(\frac{\delta_{p(r+1)}}{\delta_{pr}} \right)^{\frac{1}{p}} \right) \leqslant \frac{M^{\frac{1}{p}}}{r!} \omega\left(\left(\frac{\delta_{p(r+1)}}{M} \right)^{\frac{1}{p}} \right).$$

Возвращаясь к функции f, получаем требуемое. □

Замечание 3.2. Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $f \in C^r(E)$. Положим $g(t) = \omega\left(f^{(r)}, t\right)$. Ясно, что $g \in \Omega$, и потому в силу теоремы D найдётся функция $\omega^* \in \Omega^*$

такая, что при всех $t, \lambda \geqslant 0$

$$g(\lambda t) \leqslant \omega^*(\lambda t) \leqslant (\lambda + 1) g(t).$$

По лемме C при $x, x + t \in E$

$$\left| f(x+t) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} t^l \right| \leqslant \frac{|t|^r}{r!} \omega^* \left(\frac{|t|}{r+1} \right).$$

Таким образом, применяя теоремы 3.1–3.3 к функции f, в качестве ω можно брать функцию

$$\omega(t) = \omega^* \left(\frac{t}{r+1} \right).$$

Мы не станем останавливаться на этом подробно и ограничимся лишь одним примером (см. пример 4.3).

§4. Примеры приложений общих теорем §3 к конкретным методам приближения

Примеры 4.1–4.3 (полиномы Бернштейна).

Пример 4.1. Пусть $p \geqslant 1$, $\omega \in \Omega^*$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, для ограниченной функции $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ при всех t таких, что $x + t \in [0,1]$, справедливо неравенство

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant \omega\left(|t|\right).$$

Тогда

$$|f(x) - B_n(f,x)| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|^p p_{n,k}(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant \omega \left(\left(\sum_{k=0}^{n} \left| \frac{k}{n} - x \right|^p p_{n,k}(x) \right)^{\frac{1}{p}} \right).$$

В частности, при $p = 2$

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)^2 p_{n,k}(x)\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left((B_n(f,x)-f(x))^2 + B_n(f^2,x) - B_n^2(f,x)\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant \omega\left(\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right). \quad (4.1)$$

Для доказательства достаточно воспользоваться следствием 3.1, положив в нём $E = [0,1]$, $Q = \{0,1,\ldots,n\}$, $x_k = \frac{k}{n}$, $p_k = p_{n,k}(x)$. При $p = 2$ также применяется равенство (2.3).

Пример 4.2. Пусть $\omega \in \Omega^*$, $n \in \mathbb{N}$, ограниченная функция $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ имеет в точке $x \in [0,1]$ производную, при всех t таких, что $x + t \in [0,1]$, справедливо представление

$$f(x+t) = f(x) + f'(x)t + \varepsilon(t)t,$$

где $|\varepsilon(t)| \leqslant \omega(|t|)$. Тогда

$$|B_n(f,x) - f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) - f'(x)\left(\frac{k}{n} - x\right)\right| p_{n,k}(x)$$
$$\leqslant \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\,\omega\left(\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right). \quad (4.2)$$

Для доказательства достаточно воспользоваться следствием 3.2, положив в нём $p = 1$, $E = [0,1]$, $Q = \{0,1,\ldots,n\}$, $x_k = \frac{k}{n}$, $p_k = p_{n,k}(x)$,

$$M = \sqrt{\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 p_{n,k}(x)} = \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$$

(см. равенство (2.3)).

В связи с неравенствами (4.1) и (4.2) отметим соотношения (1.1) и (1.2), ранее установленные С. А. Теляковским.

Пример 4.3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^1([0,1])$, $x \in [0,1]$. Тогда

$$|B_n(f,x) - f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) - f'(x)\left(\frac{k}{n} - x\right)\right| p_{n,k}(x)$$
$$\leqslant 2\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\,\omega\left(f', \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right).$$

Для доказательства достаточно воспользоваться примером 4.2 и принять во внимание замечание 3.2.

В связи с примером 4.3 см., например, [4, с. 167], [11, с. 22–23].

Пример 4.4 (суммы Саса–Миракьяна)**.** Пусть $p \geqslant 1$, $\omega \in \Omega^*$, $x \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, для ограниченной функции $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ при всех t таких, что $x + t \in \mathbb{R}_+$, справедливо неравенство

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant \omega(|t|).$$

Тогда

$$|f(x) - C_n(f,x)| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|^p e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant \omega\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{k}{n} - x\right|^p e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

В частности, при $p = 2$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)^2 e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \Big((C_n(f,x) - f(x))^2 + C_n(f^2,x) - C_n^2(f,x)\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \omega\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right).$$

Для доказательства достаточно в следствии 3.1 положить $E = \mathbb{R}_+$, $Q = \mathbb{Z}_+$,

$$x_k = \frac{k}{n}, \quad p_k = e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!},$$

а при $p = 2$ воспользоваться и равенством (2.4).

Пример 4.5 (суммы Канторовича). Пусть $p \geqslant 1$, $\omega \in \Omega^*$, $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_\infty([0,1])$, при всех t таких, что $x+t \in [0,1]$, справедлива оценка

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant \omega(|t|).$$

Тогда

$$|K_n(f,x) - f(x)| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} \left((n+1) \int\limits_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |f(t) - f(x)|^p \, dt \right) p_{n,k}(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \omega \left(\left(\sum_{k=0}^{n} \left((n+1) \int\limits_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} |t - x|^p \, dt \right) p_{n,k}(x) \right)^{\frac{1}{p}} \right).$$

В частности, при $p = 2$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \left((n+1) \int\limits_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} \left(f(t) - f(x)\right)^2 \, dt \right) p_{n,k}(x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\left(K_n(f,x) - f(x)\right)^2 + K_n(f^2, x) - K_n^2(f,x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \omega \left(\frac{\sqrt{(n-1)x(1-x) + \frac{1}{3}}}{(n+1)} \right).$$

Для доказательства достаточно в следствии 3.3 положить $E = [0,1]$, $Q = \{0, 1, \ldots, n\}$, $p_k = p_{n,k}(x)$,

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} n+1, & \text{если } \frac{k}{n+1} \leqslant t \leqslant \frac{k+1}{n+1}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При $p = 2$ используется и равенство (2.1).

Пример 4.6 (суммы Бернштейна–Дюррмейер). Пусть $p \geqslant 1$, $\omega \in \Omega^*$, $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_\infty([0,1])$, при всех t таких, что $x+t \in [0,1]$, справедлива оценка

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant \omega(|t|).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&|D_n(f,x)-f(x)| \\
&\quad\leqslant \left(\sum_{k=0}^{n}\left((n+1)\int\limits_0^1 |f(t)-f(x)|^p\, p_{n,k}(t)\,dt\right)p_{n,k}(x)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad\quad\leqslant \omega\left(\left(\sum_{k=0}^{n}\left((n+1)\int\limits_0^1 |t-x|^p p_{n,k}(t)\,dt\right)p_{n,k}(x)\right)^{\frac{1}{p}}\right).
\end{aligned}$$

В частности, при $p=2$

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=0}^{n}\left((n+1)\int\limits_0^1 \left(f(t)-f(x)\right)^2 p_{n,k}(t)\,dt\right)p_{n,k}(x)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad= \left(\left(D_n(f,x)-f(x)\right)^2 + D_n(f^2,x) - D_n^2(f,x)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad\quad\leqslant \omega\left(\sqrt{\frac{2(n-3)x(1-x)+2}{(n+2)(n+3)}}\right).
\end{aligned}$$

Для доказательства достаточно в следствии 3.3 положить $E=[0,1]$, $Q=\{0,1,\ldots,n\}$, $p_k=p_{n,k}(x)$, $\varphi_k(t)=(n+1)p_{n,k}(t)$, а при $p=2$ воспользоваться равенством (2.2).

Пример 4.7 (средние Стеклова 1-го порядка)**.** Пусть $r\in\mathbb{Z}_+$, $p\geqslant 1$, $\omega\in\Omega^*$, $h>0$, 2π-периодическая функция $f\in L_\infty(\mathbb{R})$ в точке $x\in\mathbb{R}$ имеет производную r-го порядка, для всех $t\in\mathbb{R}$ справедливо представление

$$f(x+t)=\sum_{l=0}^{r}\frac{f^{(l)}(x)}{l!}t^l+\frac{\varepsilon(t)}{r!}t^r,$$

где $|\varepsilon(t)| \leqslant \omega(|t|)$. Тогда

$$\left| S_{h,1}(f,x) - \sum_{l=0}^{[r/2]} \frac{f^{(2l)}(x)}{(2l+1)!} \left(\frac{h}{2}\right)^{2l} \right| \leqslant \left(\frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left| f(x+t) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} t^l \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{h^r}{r! 2^r (pr+1)^{\frac{1}{p}}} \omega\left(\frac{h}{2} \left(\frac{pr+1}{p(r+1)+1} \right)^{\frac{1}{p}} \right).$$

В частности, при $r = 1$, $p = 1$,

$$\frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} |f(x+t) - f(x) - f'(x)t| \, dt \leqslant \frac{h}{4} \omega\left(\frac{h}{3}\right).$$

Для доказательства достаточно в следствии 3.4 положить

$$\chi(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & \text{если } -\frac{h}{2} \leqslant t \leqslant \frac{h}{2}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и принять во внимание, что при $s \geqslant 0$

$$\delta_s = \int_{\mathbb{R}} |t|^s \chi(t) \, dt = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} |t|^s \, dt \frac{2}{h} \int_0^{\frac{h}{2}} t^s \, dt \frac{h^s}{2^s(s+1)}.$$

Пример 4.8 (средние Стеклова 2-го порядка)**.** Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $p \geqslant 1$, $\omega \in \Omega^*$, $h > 0$, 2π-периодическая функция $f \in L_\infty(\mathbb{R})$ имеет производную r-го порядка в точке $x \in \mathbb{R}$, для всех $t \in \mathbb{R}$ справедливо представление

$$f(x+t) = \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} t^l + \frac{\varepsilon(t)}{r!} t^r,$$

где $|\varepsilon(t)| \leqslant \omega(|t|)$. Тогда

$$\left| S_{h,2}(f,x) - \sum_{l=0}^{[r/2]} \frac{2f^{(2l)}(x)}{(2l+2)!} h^{2l} \right|$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{h} \int_{-h}^{h} \left| f(x+t) - \sum_{l=0}^{r} \frac{f^{(l)}(x)}{l!} t^l \right|^p \left(1 - \frac{|t|}{h}\right) dt \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant \frac{h^r}{r!} \left(\frac{2}{(pr+1)(pr+2)} \right)^{\frac{1}{p}} \omega \left(h \left(\frac{(pr+1)(pr+2)}{(p(r+1)+1)(p(r+1)+2)} \right)^{\frac{1}{p}} \right).$$

В частности, при $r = 1$, $p = 1$

$$\frac{1}{h} \int_{-h}^{h} |f(x+t) - f(x) - f'(x)t| \left(1 - \frac{|t|}{h}\right) dt \leqslant \frac{h}{3} \omega \left(\frac{h}{2} \right).$$

Для доказательства достаточно в следствии 3.4 положить

$$\chi(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}\left(1 - \frac{|t|}{h}\right), & \text{если } -h \leqslant t \leqslant h, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и принять во внимание, что при $s \geqslant 0$

$$\delta_s = \int_{\mathbb{R}} |t|^s \chi(t)\, dt = \frac{1}{h} \int_{-h}^{h} |t|^s \left(1 - \frac{|t|}{h}\right) dt$$
$$\frac{2}{h} \left(\int_0^h t^s\, dt - \frac{1}{h} \int_0^h t^{s+1}\, dt \right) = \frac{2}{h} \left(\frac{h^{s+1}}{s+1} - \frac{h^{s+1}}{s+2} \right) \frac{2h^s}{(s+1)(s+2)}.$$

Примеры 4.9–4.10 (интеграл Валле-Пуссена).

Пример 4.9. Пусть $\omega \in \Omega^*$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, 2π-периодическая функция $f \in L_\infty(\mathbb{R})$, для всех $t \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant \omega(|t|).$$

Тогда

$$|V_n(f,x)-f(x)|$$
$$\leqslant \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-f(x)|\cos^{2n}\frac{t}{2}\,dt \leqslant \omega\left(\frac{2}{\sqrt{\pi n}}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right).$$

Для доказательства достаточно в следствии 3.4 положить $r=0$, $p=1$,

$$\chi(t)=\begin{cases}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{2\pi}\cos^{2n}\frac{t}{2}, & \text{если } -\pi\leqslant t\leqslant\pi,\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

и принять во внимание, что (см. [12, с. 11])

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|t|\chi(t)\,dt\leqslant\frac{2}{\sqrt{\pi n}}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}.$$

Пример 4.10. Пусть $\omega\in\Omega^*$, $n\in\mathbb{N}$, 2π-периодическая функция $f\in L_\infty(\mathbb{R})$ имеет производную в точке $x\in\mathbb{R}$, для всех $t\in\mathbb{R}$ справедливо представление

$$f(x+t)=f(x)+f'(x)t+\varepsilon(t)t,$$

где $|\varepsilon(t)|\leqslant\omega(|t|)$. Тогда

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-f(x)-f'(x)t|\cos^{2n}\frac{t}{2}\,dt$$
$$\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{2(n+1)}}\omega\left(\frac{\pi}{\sqrt{2(n+1)}}\right).$$

Доказательство. Так как $\frac{t}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} \sin \frac{t}{2}$ при $t \in [0, \pi]$, то

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos^{2n} \frac{t}{2}\, dt \leqslant \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{2\pi} \pi^2 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cos^{2n} \frac{t}{2}\, dt$$

$$= \pi^2 \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} \frac{t}{2}\, dt - \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^{2(n+1)} \frac{t}{2}\, dt \right)$$

$$= \pi^2 \left(1 - \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \right) \pi^2 \left(1 - \frac{2n+1}{2n+2} \right) \frac{\pi^2}{2(n+1)}.$$

Полагая в следствии 3.4

$$\chi(t) = \begin{cases} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{2\pi} \cos^{2n} \frac{t}{2}, & \text{если } -\pi \leqslant t \leqslant \pi, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$r = 1$, $p = 1$, $M = \frac{\pi}{\sqrt{2(n+1)}}$, получаем требуемое. □

Литература

1. И. П. Натансон, *Конструктивная теория функций*, М.–Л., 1949.
2. R. A. DeVore, G. G. Lorentz, *Constructive approximation*, Berlin, 1993.
3. С. Н. Бернштейн, *Собрание сочинений, т. II.* М., 1954.
4. С. А. Теляковский, *О скорости приближения функций многочленами Бернштейна.* — Тр. ИММ УрО РАН **14**, No. 3 (2008), 162–169.
5. H. Gonska, *On the degree of approximation in Voronovskaja's theorem.* — Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. **52**, No. 3 (2007), 103–115.
6. J. A. Adell, J. Bustamante, J. M. Quesada *Estimates for the moments of Bernstein polynomials.* — J. Math. Anal. Appl. **432** (2015), 114–128.
7. В. В. Жук, *О сильном приближении функций посредством положительных операторов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **440** (2015), 68–80.
8. В. В. Жук, М. В. Бабушкин, А. А. Пудовкин, *О сильной форме асимптотических формул типа Вороновской–Бернштейна.* — Проблемы мат. анализа **84** (2016), 89–105.
9. И. К. Даугавет, *Введение в классическую теорию приближения функций*, С.-Петербург, 2011.
10. В. В. Жук, *Структурные свойства функций и точность аппроксимации*, Л., 1984.
11. В. С. Виденский, *Многочлены Бернштейна*, Л., 1990.
12. И. П. Натансон, *О приближённом представлении функций, удовлетворяющих условию Липшица, с помощью интеграла Валле–Пуссена.* — Докл. АН СССР **54**, No. 1 (1946), 11–14.

Babushkin M. V., Zhuk V. V. On a strong form of asymptotic formulas of Voronovskaya–Bernstein type with pointwise estimate of the remainder term.

A number of general results is established concerning strong form of asymptotic formulas of Voronovskaya–Bernstein type. Several examples of their application to concrete approximation methods are given.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: maxbabushkin@gmail.com
E-mail: zhuk@math.spbu.ru

Поступило 5 сентября 2016 г.