Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 449, 2016 г.

**М. В. Бабушкин, В. В. Жук**

# О ДВУСТОРОННИХ ОЦЕНКАХ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ПОСРЕДСТВОМ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Пусть $C$ – пространство непрерывных $2\pi$-периодических функций. В работе устанавливаются в терминах наилучших приближений тригонометрическими полиномами двусторонние оценки для ряда интегралов типа

$$\int_0^\pi \omega_r(f,t)\Phi(t)\,dt,$$

где $\omega_r(f,t)$ – модуль непрерывности функции $f$ порядка $r$ в $C$.

## §1. Введение

**1.1.** Пусть $C$ – пространство непрерывных $2\pi$-периодических функций $f$ с нормой

$$\|f\| = \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|,$$

$E_n(f)$ – наилучшее приближение функции $f$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $n$ в пространстве $C$,

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f),$$

где $S_k(f)$ – частные суммы ряда Фурье функции $f$, суммы Фейера функции $f$ порядка $n$.

С. Б. Стечкин [1], см. также [2, с. 80–91], установил, что

$$\|f-\sigma_n(f)\| \leqslant \frac{B}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E_k(f), \tag{1.1}$$

*Ключевые слова*: модули непрерывности, наилучшее приближение, интегралы Фейера, Джексона, интегралы Фейера–Валле Пуссена, Джексона–Валле Пуссена.

где $B$ – абсолютная постоянная ($B \leqslant 12$) и отметил, что было бы интересно получить аналогичные оценки уклонений для других методов суммирования рядов Фурье.

Эта тематика получила широкое развитие в работах М. Ф. Тимана [3–7], см. также [8, гл. 3]. В частности, им было дано новое доказательство неравенства (1.1), основанное на применении обратных теорем теории приближения периодических функций.

Пусть $\omega_k(f,h)$ – модуль непрерывности функции $f$ порядка $k$ в $C$, $\widetilde{f}$ – функция, тригонометрически сопряжённая с $f$. В [1] было установлено, что для функции $f \in C$, у которой $\widetilde{f}$ также принадлежит $C$, справедливо неравенство

$$\|f-\sigma_n(f)\| \leqslant B_1\left(E_n(f)+\omega_1\left(\widetilde{f},\frac{1}{n}\right)\right). \tag{1.2}$$

Также было отмечено, что рассуждения, применённые для доказательства (1.2), носят совершенно общий характер. В. В. Жук [9, см. также 10, с. 261–262] получил двусторонние оценки для величины $\|f-\sigma_n(f)\|$ в терминах модулей непрерывности, совпадающие с точностью до постоянных. Именно, было установлено, что для функции $f \in C$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned}\omega_2\left(f,\frac{1}{n}\right)+n\omega_2\left(\widetilde{F},\frac{1}{n}\right) &\leqslant C_1\,\|f-\sigma_n(f)\|\\ &\leqslant C_2\left(\omega_2\left(f,\frac{1}{n}\right)+n\omega_2\left(\widetilde{F},\frac{1}{n}\right)\right),\end{aligned}$$

где $C_1$ и $C_2$ – абсолютные постоянные, а $\widetilde{F}$ – функция, тригонометрически сопряжённая с первообразной для функции $f-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f$.

В [1] было также отмечено, что нахождение точной постоянной в неравенстве (1.1), по-видимому, является трудной задачей.

Г. И. Натансон [11] показал, что если $f \in C$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$\|f-\sigma_n(f)\| \leqslant \frac{3{,}539862}{n}\sum_{k=0}^{n-1} E_k(f).$$

В настоящей работе в терминах наилучших приближений устанавливаются некоторые двусторонние оценки для ряда интегралов, связанных с обсуждаемой темой.

**1.2.** В дальнейшем $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ суть соответственно множества вещественных, неотрицательных вещественных, неотрицательных целых, натуральных чисел; $E = [0, \pi]$. Через $C_\alpha(\cdot)$ обозначаем конечные положительные постоянные, зависящие только от выписанных аргументов. Все функции предполагаются вещественными. Функции, имеющие в некоторой точке устранимый разрыв, доопределяются в этой точке по непрерывности.

Через $C$ обозначается пространство непрерывных $2\pi$-периодических функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\| = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, $L_1(A)$ – множество измеримых, суммируемых на множестве $A$ функций. Через $H_n$ обозначаем множество тригонометрических полиномов порядка не выше $n$.

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in C$. Тогда

$$E_n(f) = \inf_{T\in H_n} \|f - T\|$$

– наилучшее приближение функции $f$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $n$ в пространстве $C$.

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тогда

$$\delta_t^r(f, x) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k f\left(x + \frac{rt}{2} - kt\right)$$

– центральная конечная разность $r$-го порядка функции $f$ с шагом $t$.

Пусть $f \in C$, $h \geqslant 0$. Тогда

$$\omega_r(f, h) = \sup_{|t|\leqslant h} \|\delta_t^r(f)\|$$

– модуль непрерывности порядка $r$ функции $f$ с шагом $h$.

**1.3.** Нам понадобятся следующие известные результаты.

**Теорема A** (обобщённая теорема Джексона, см., например, [13, с. 274]). *Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$E_n(f) \leqslant C(r)\omega_r\left(f, \frac{\pi}{n+2}\right). \tag{1.3}$$

**Теорема B.** *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in C$. Тогда*

$$\omega_r\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \leqslant \frac{(3+2\sqrt{2})\pi^r}{n^r} \sum_{k=0}^{n-1} \left((k+1)^r - k^r\right) E_k(f).$$

Без указания постоянных эта теорема хорошо известна (см., например, [13, с. 344]). Вопрос о постоянных изучался М. Д. Стерлиным [14]. В [12] она сформулирована для $r = 1, 2$, но из приведённого доказательства легко видеть её справедливость и при любом $r \in \mathbb{N}$.

## §2. Вспомогательные результаты

**2.1.** Устанавливаемые ниже вспомогательные результаты имеют и определённый самостоятельный интерес.

**Лемма 2.1.** *Пусть* $\omega\colon E \to \mathbb{R}_+$ *возрастающая ограниченная функция,* $\alpha > 1$, $\delta \in (0,\pi)$; *неотрицательная функция* $\Phi \in L_1(E)$ *такова, что* $\Phi(t)t^\alpha \leqslant M < +\infty$ *при* $t \in E$. *Положим* $K(\delta) = \int_0^\delta \Phi$. *Тогда*

$$\int_E \omega(t)\Phi(t)\,dt \leqslant \left(\frac{K(\delta)(\alpha-1)(\pi\delta)^{\alpha-1}}{\pi^{\alpha-1}-\delta^{\alpha-1}} + M\right)\int_\delta^\pi \frac{\omega(t)}{t^\alpha}\,dt.$$

**Доказательство.** Имеем

$$\int_0^\pi \omega(t)\Phi(t)\,dt = \left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi\right)\omega(t)\Phi(t)\,dt \leqslant \omega(\delta)K(\delta) + M\int_\delta^\pi \frac{\omega(t)}{t^\alpha}\,dt.$$

Так как

$$\int_\delta^\pi \frac{\omega(t)}{t^\alpha}\,dt \geqslant \omega(\delta)\int_\delta^\pi \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{\omega(\delta)}{\alpha-1}\cdot\frac{\pi^{\alpha-1}-\delta^{\alpha-1}}{(\pi\delta)^{\alpha-1}},$$

то

$$\int_0^\pi \omega(t)\Phi(t)\,dt \leqslant K(\delta)\frac{(\alpha-1)(\pi\delta)^{\alpha-1}}{\pi^{\alpha-1}-\delta^{\alpha-1}}\int_\delta^\pi \frac{\omega(t)}{t^\alpha}\,dt + M\int_\delta^\pi \frac{\omega(t)}{t^\alpha}\,dt$$
$$= \left(K(\delta)\frac{(\alpha-1)(\pi\delta)^{\alpha-1}}{\pi^{\alpha-1}-\delta^{\alpha-1}} + M\right)\int_\delta^\pi \frac{\omega(t)}{t^\alpha}\,dt. \qquad \square$$

**Следствие 2.1.** *Пусть выполнены условия леммы 2.1,* $m-1 \in \mathbb{N}$, $K = \int\limits_0^\pi \Phi$. *Тогда*

$$\int\limits_0^\pi \omega(t)\Phi(t)\,dt \leqslant \left(\frac{K(\alpha-1)\pi^{\alpha-1}}{m^{\alpha-1}-1} + M\right) \int\limits_{\pi/m}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^\alpha}\,dt.$$

Для доказательства следствия 2.1 достаточно положить $\delta = \frac{\pi}{m}$ в лемме 2.1.

**Замечание 2.1.** В связи с леммой 2.1 уместно отметить лемму 4 на с. 43 в [12].

**Лемма 2.2.** *Пусть* $r, m-1 \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$, $f \in C$. *Тогда*

$$\int\limits_{\pi/m}^{\pi} \frac{\omega_r(f,t)}{t^\alpha}\,dt \leqslant \frac{(3+2\sqrt{2})\pi^{r-\alpha+1}}{\alpha-1}$$
$$\times \sum_{l=0}^{m-2} \left((l+1)^r - l^r\right) \left(\sum_{k=l+1}^{m-1} \frac{(k+1)^{\alpha-1}-k^{\alpha-1}}{k^r}\right) E_l(f).$$

**Доказательство.** Пусть функция $\omega\colon E \to \mathbb{R}_+$ возрастает и ограничена. Тогда

$$\int\limits_{\pi/m}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^\alpha}\,dt = \sum_{k=1}^{m-1} \int\limits_{\frac{\pi}{k+1}}^{\frac{\pi}{k}} \frac{\omega(t)}{t^\alpha}\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{m-1} \omega\left(\frac{\pi}{k}\right) \int\limits_{\frac{\pi}{k+1}}^{\frac{\pi}{k}} \frac{dt}{t^\alpha}$$
$$= \frac{1}{\pi^{\alpha-1}(\alpha-1)} \sum_{k=1}^{m-1} \omega\left(\frac{\pi}{k}\right)\left((k+1)^{\alpha-1} - k^{\alpha-1}\right). \tag{2.1}$$

Положим $\omega(t) = \omega_r(f,t) = \omega_r(t)$ в (2.1) и воспользуемся теоремой В. Имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\pi/m}^{\pi} \frac{\omega_r(t)}{t^\alpha}\,dt &\leqslant \frac{1}{\pi^{\alpha-1}(\alpha-1)}\sum_{k=1}^{m-1}\omega_r\left(\frac{\pi}{k}\right)\left((k+1)^{\alpha-1}-k^{\alpha-1}\right)\\ &\leqslant \frac{1}{\pi^{\alpha-1}(\alpha-1)}\sum_{k=1}^{m-1}\left((k+1)^{\alpha-1}-k^{\alpha-1}\right)\\ &\times(3+2\sqrt{2})\left(\frac{\pi}{k}\right)^r\sum_{l=0}^{k-1}\left((l+1)^r-l^r\right)E_l(f)\\ &= \frac{(3+2\sqrt{2})\pi^{r-\alpha+1}}{\alpha-1}\sum_{l=0}^{m-2}\left((l+1)^r-l^r\right)\\ &\times\left(\sum_{k=l+1}^{m-1}\frac{(k+1)^{\alpha-1}-k^{\alpha-1}}{k^r}\right)E_l(f). \qquad \square\end{aligned}$$

## §3. Основные результаты

**Теорема 3.1.** *Пусть $r, m-1 \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$, $f \in C$, неотрицательная функция $\Phi \in L_1(E)$ такова, что $\Phi(t)t^\alpha \leqslant M < +\infty$ при $t \in E$, $K = \int\limits_E \Phi$. Тогда*

$$\begin{aligned}\int\limits_E \omega_r(f,t)\Phi(t)\,dt &\leqslant (3+2\sqrt{2})\pi^r\left(\frac{K}{m^{\alpha-1}-1}+\frac{M}{(\alpha-1)\pi^{\alpha-1}}\right)\\ &\times\sum_{l=0}^{m-2}\left((l+1)^r-l^r\right)\left(\sum_{k=l+1}^{m-1}\frac{(k+1)^{\alpha-1}-k^{\alpha-1}}{k^r}\right)E_l(f).\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 3.1 получается из сопоставления следствия 2.1 с леммой 2.2.

Пусть $r \in \mathbb{N}$. Полагаем

$$I_r(f,x) = \frac{2(-1)^{r+1}}{C_{2r}^r}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{r} C_{2r}^{r+k}(-1)^{r+k} f(x+kt)\right)\Phi(t)\,dt.$$

**Следствие 3.1.** *Пусть $r, m-1 \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$, функция $\Phi\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}_+$ такова, что $\Phi \in L_1([-\pi,\pi])$, при $t \in E$ имеем: $\Phi(t) = \Phi(-t)$, $t^\alpha\Phi(t) \leqslant$*

$M < +\infty$; $\int\limits_E \Phi = \frac{1}{2}$. *Тогда для любой* $f \in C$

$$\|f - I_r(f)\| \leqslant \frac{2}{C_{2r}^r} \int\limits_E \omega_{2r}(f,t)\Phi(t)\,dt = \frac{2}{C_{2r}^r}\alpha_r(f),$$

*где*

$$\alpha_r(f) \leqslant (3+2\sqrt{2})\pi^{2r}\left(\frac{1}{2(m^{\alpha-1}-1)} + \frac{M}{\pi^{\alpha-1}(\alpha-1)}\right)$$
$$\times \sum_{l=0}^{m-2}\left((l+1)^{2r} - l^{2r}\right)\left(\sum_{k=l+1}^{m-1}\frac{(k+1)^{\alpha-1}-k^{\alpha-1}}{k^{2r}}\right)E_l(f).$$

Пусть $\lambda > 0$. Положим

$$B_{\lambda,\alpha} = \int\limits_E \left|\frac{\sin\frac{\lambda t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right|^\alpha dt, \quad D_{\lambda,\alpha}(t) = \frac{1}{2B_{\lambda,\alpha}}\left|\frac{\sin\frac{\lambda t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right|^\alpha,$$

$$A_{\lambda,\alpha,r}(f,x) = \frac{2(-1)^{r+1}}{C_{2r}^r}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^r C_{2r}^{r+k}(-1)^{k+r}f(x+kt)\right)D_{\lambda,\alpha}(t)\,dt.$$

В частности, при $n \in \mathbb{N}$

$$A_{n,2,1}(f,x) = \frac{1}{2\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt$$

– интеграл Фейера,

$$A_{n,4,1}(f,x) = \frac{3}{2\pi n(2n^2+1)}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4 dt$$

– интеграл Джексона.

Приведём хорошо известные оценки для величины $B_{\lambda,\alpha}$, которые сформулируем в виде леммы.

**Лемма A.** *Пусть* $\alpha > 1$. *Тогда при* $\lambda \geqslant 1$

$$2\lambda^{\alpha-1}\int\limits_0^{\pi/2}\left|\frac{\sin u}{u}\right|^\alpha du \leqslant B_{\lambda,\alpha}.$$

*Если* $\lambda > 0$, *то*

$$B_{\lambda,\alpha} \leqslant \frac{\pi^\alpha \lambda^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}} \int\limits_0^{+\infty} \left|\frac{\sin u}{u}\right|^\alpha du.$$

**Доказательство.** Имеем при $\lambda \geqslant 1$

$$B_{\lambda,\alpha} \geqslant \int\limits_0^{\pi} \left|\frac{\sin\frac{\lambda t}{2}}{\frac{t}{2}}\right|^\alpha dt = \int\limits_0^{\pi\lambda/2} \left|\frac{\lambda \sin t}{t}\right|^\alpha \frac{2}{\lambda}\, dt \geqslant 2\lambda^{\alpha-1} \int\limits_0^{\pi/2} \left|\frac{\sin u}{u}\right|^\alpha du.$$

С другой стороны, при $\lambda > 0$

$$B_{\lambda,\alpha} \leqslant \int\limits_0^{\pi} \left|\frac{\sin\frac{\lambda t}{2}}{\frac{t}{\pi}}\right|^\alpha dt = \pi^\alpha \int\limits_0^{\pi\lambda/2} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^\alpha \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\alpha-1} dt$$

$$= \frac{\pi^\alpha \lambda^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}} \int\limits_0^{\pi\lambda/2} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^\alpha dt \leqslant \frac{\pi^\alpha \lambda^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}} \int\limits_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^\alpha dt. \qquad \square$$

**Следствие 3.2.** *Пусть* $r, m-1 \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$, $\lambda > 0$, $f \in C$. *Тогда*

$$\int\limits_E \omega_r(f,t) D_{\lambda,\alpha}(t)\, dt \leqslant \frac{(3+2\sqrt{2})\pi^r}{2} \left(\frac{1}{m^{\alpha-1}-1} + \frac{\pi}{B_{\lambda,\alpha}(\alpha-1)}\right)$$

$$\times \sum_{l=0}^{m-2} \left((l+1)^r - l^r\right) \left(\sum_{k=l+1}^{m-1} \frac{(k+1)^{\alpha-1} - k^{\alpha-1}}{k^r}\right) E_l(f).$$

Для доказательства достаточно заметить, что

$$D_{\lambda,\alpha}(t) \leqslant \frac{\pi^\alpha}{2B_{\lambda,\alpha} t^\alpha}$$

и воспользоваться теоремой 3.1.

**Следствие 3.3.** *Пусть* $r, m-1 \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$, $\lambda > 0$, $f \in C$. *Тогда*

$$\int\limits_E \omega_r(f,t) \left| \frac{\sin \frac{\lambda t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right|^\alpha dt$$

$$\leqslant (3+2\sqrt{2})\pi^r \left( \frac{\pi^\alpha \lambda^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}(m^{\alpha-1}-1)} \int\limits_0^\infty \left| \frac{\sin u}{u} \right|^\alpha du + \frac{\pi}{\alpha-1} \right)$$

$$\times \sum_{l=0}^{m-2} ((l+1)^r - l^r) \left( \sum_{k=l+1}^{m-1} \frac{(k+1)^{\alpha-1} - k^{\alpha-1}}{k^r} \right) E_l(f).$$

Для доказательства достаточно сопоставить теорему 3.1 и лемму A.

**Следствие 3.4.** *Пусть* $r, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \geqslant 2$, $f \in C$. *Тогда*

$$\int\limits_E \omega_r(f,t) D_{n,\alpha}(t)\, dt$$

$$\leqslant \frac{(3+2\sqrt{2})\pi^r}{2n^{\alpha-1}} \left( 1 + \frac{\pi}{2(\alpha-1)} \left( \int\limits_0^{\pi/2} \left| \frac{\sin u}{u} \right|^\alpha du \right)^{-1} \right)$$

$$\times \sum_{l=0}^{n-1} ((l+1)^r - l^r) \left( \sum_{k=l+1}^{n} \frac{(k+1)^{\alpha-1} - k^{\alpha-1}}{k^r} \right) E_l(f).$$

Для доказательства достаточно в следствии 3.2 положить $m = n+1$, $\lambda = n$ и воспользоваться леммой A.

**Следствие 3.5.** *Пусть* $r, n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$, $f \in C$. *Тогда*

$$\int\limits_E \omega_r(f,t) D_{n,\alpha}(t)\, dt$$

$$\leqslant \frac{C_1(r,\alpha)}{n^{\alpha-1}} \sum_{l=0}^{2n-2} ((l+1)^r - l^r) \left( \sum_{k=l+1}^{2n-1} \frac{(k+1)^{\alpha-1} - k^{\alpha-1}}{k^r} \right) E_l(f).$$

*Если* $1 < \alpha < r+1$, *то*

$$\int\limits_E \omega_r(f,t) D_{n,\alpha}(t)\, dt \leqslant \frac{C_2(r,\alpha)}{n^{\alpha-1}} \sum_{l=0}^{2n-2} (l+1)^{\alpha-2} E_l(f).$$

Для доказательства достаточно сопоставить следствие 3.2 при $m = 2n$ с леммой А.

**Следствие 3.6.** *Пусть* $r, n \in \mathbb{N}$, $f \in C$,

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi n} \left( \frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2$$

*– ядро Фейера,*

$$D_n(t) = \frac{3}{2\pi n(2n^2+1)} \left( \frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^4$$

*– ядро Джексона. Тогда*

$$\int\limits_E \omega_r(f,t)\Phi_n(t)\,dt \leqslant \frac{(3+2\sqrt{2})\pi^r}{n} \sum_{l=0}^{n-1} ((l+1)^r - l^r) \left( \sum_{k=l+1}^{n} \frac{1}{k^r} \right) E_l(f),$$

$$\int\limits_E \omega_r(f,t)D_n(t)\,dt$$

$$\leqslant \frac{3(3+2\sqrt{2})\pi^r}{4n^3} \sum_{l=0}^{n-1} ((l+1)^r - l^r) \left( \sum_{k=l+1}^{n} \frac{(k+1)^3 - k^3}{k^r} \right) E_l(f).$$

Для доказательства достаточно положить в следствии 3.2 соответственно $\alpha = 2$ или $\alpha = 4$, $m = n+1$ и принять во внимание, что

$$B_{n,2} = \pi n, \quad B_{n,4} = \frac{\pi n(2n^2+1)}{3}.$$

**Теорема 3.2.** *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$, $f \in C$. *Тогда*

$$\int\limits_0^\pi \omega_r(f,t)D_{n,\alpha}(t)\,dt$$

$$\geqslant \frac{2^{\alpha/2}}{2C(r)(1+3^r)\pi^{\alpha-1}(\alpha-1)B_{n,\alpha}} \sum_{k=1}^{2n-1} \left((k+1)^{\alpha-1} - k^{\alpha-1}\right) E_{k-1}(f),$$

*где постоянная* $C(r) > 0$ *зависит только от* $r$ *(в качестве неё можно взять, например, постоянную* $C(r)$ *из неравенства* (1.3)).

**Доказательство.** Полагая $\omega_r(t) = \omega_r(f,t)$, имеем

$$\int\limits_0^\pi \omega_r(t) D_{n,\alpha}(t)\,dt = \int\limits_0^\pi \omega_r(t)\frac{1}{2B_{n,\alpha}}\left|\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right|^\alpha dt$$

$$= \frac{1}{B_{n,\alpha}}\int\limits_0^{\pi/2} \omega_r(2t)\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^\alpha dt \geqslant \frac{1}{B_{n,\alpha}}\int\limits_0^{\pi/2} \omega_r(2t)\left|\frac{\sin nt}{t}\right|^\alpha dt$$

$$= \frac{n^{\alpha-1}}{B_{n,\alpha}}\int\limits_0^{\pi n/2} \omega_r\left(\frac{2t}{n}\right)\left|\frac{\sin t}{t}\right|^\alpha dt \geqslant \frac{n^{\alpha-1}}{B_{n,\alpha}}\int\limits_{\pi/4}^{\pi n/2} \omega_r\left(\frac{2t}{n}\right)\left|\frac{\sin t}{t}\right|^\alpha dt.$$

Пусть $p$ – наибольшее целое число, такое что

$$\left(p - \frac{1}{4}\right)\pi \leqslant \frac{\pi n}{2}.$$

Если $n$ чётное, то

$$\int\limits_0^\pi \omega_r(t) D_{n,\alpha}(t)\,dt \geqslant \frac{n^{\alpha-1}}{B_{n,\alpha}}\sum_{l=1}^{p}\int\limits_{(l-3/4)\pi}^{(l-1/4)\pi} \omega_r\left(\frac{2t}{n}\right)\left|\frac{\sin t}{t}\right|^\alpha dt$$

$$\geqslant \frac{n^{\alpha-1}}{2^{\alpha/2}B_{n,\alpha}}\sum_{l=1}^{p}\int\limits_{(l-3/4)\pi}^{(l-1/4)\pi} \omega_r\left(\frac{2t}{n}\right)\frac{dt}{t^\alpha}. \tag{3.1}$$

Учитывая неравенство $\omega_r(lt) \leqslant l^r\omega_r(t)$, если $l \in \mathbb{N}$, имеем

$$\int\limits_{(l-3/4)\pi+\pi/2}^{(l-1/4)\pi+\pi/2} \omega_r\left(\frac{2t}{n}\right)\frac{dt}{t^\alpha} = \int\limits_{(l-3/4)\pi}^{(l-1/4)\pi} \omega_r\left(\frac{2}{n}\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)\frac{dt}{\left(t+\frac{\pi}{2}\right)^\alpha}$$

$$\leqslant \int\limits_{(l-3/4)\pi}^{(l-1/4)\pi} \omega_r\left(\frac{2}{n}\left(t+\frac{4t}{2}\right)\right)\frac{dt}{t^\alpha} = \int\limits_{(l-3/4)\pi}^{(l-1/4)\pi} \omega_r\left(\frac{6t}{n}\right)\frac{dt}{t^\alpha}$$

$$\leqslant 3^r\int\limits_{(l-3/4)\pi}^{(l-1/4)\pi} \omega_r\left(\frac{2t}{n}\right)\frac{dt}{t^\alpha}.$$

Следовательно,

$$\left(\int\limits_{(l-3/4)\pi}^{(l-1/4)\pi}+\int\limits_{(l-3/4)\pi+\pi/2}^{(l-1/4)\pi+\pi/2}\right)\omega_r\left(\frac{2t}{n}\right)\frac{dt}{t^\alpha}\leqslant(1+3^r)\int\limits_{(l-3/4)\pi}^{(l-1/4)\pi}\omega_r\left(\frac{2t}{n}\right)\frac{dt}{t^\alpha}.$$

Сопоставляя установленное неравенство с (3.1), находим

$$\int\limits_0^\pi\omega_r(t)D_{n,\alpha}(t)\,dt\geqslant\frac{n^{\alpha-1}}{2^{\alpha/2}B_{n,\alpha}}\sum_{l=1}^{p}\frac{1}{1+3^r}\int\limits_{(l-3/4)\pi}^{(l+1/4)\pi}\omega_r\left(\frac{2t}{n}\right)\frac{dt}{t^\alpha}$$

$$\geqslant\frac{n^{\alpha-1}}{2^{\alpha/2}B_{n,\alpha}(1+3^r)}\int\limits_{\pi/4}^{\pi n/2}\omega_r\left(\frac{2t}{n}\right)\frac{dt}{t^\alpha}.$$

Если же $n$ нечётное, то, повторяя те же рассуждения, имеем

$$\int\limits_0^\pi\omega_r(t)D_{n,\alpha}(t)\,dt$$

$$\geqslant\frac{n^{\alpha-1}}{B_{n,\alpha}}\left(\sum_{l=1}^{p}\int\limits_{(l-3/4)\pi}^{(l-1/4)\pi}\omega_r\left(\frac{2t}{n}\right)\left|\frac{\sin t}{t}\right|^\alpha dt+\int\limits_{\pi n/2-\pi/4}^{\pi n/2}\omega_r\left(\frac{2t}{n}\right)\left|\frac{\sin t}{t}\right|^\alpha dt\right)$$

$$\geqslant\frac{n^{\alpha-1}}{2^{\alpha/2}B_{n,\alpha}(1+3^r)}\left(\sum_{l=1}^{p}\int\limits_{(l-3/4)\pi}^{(l+1/4)\pi}\omega_r\left(\frac{2t}{n}\right)\frac{dt}{t^\alpha}+\int\limits_{\pi n/2-\pi/4}^{\pi n/2}\omega_r\left(\frac{2t}{n}\right)\frac{dt}{t^\alpha}\right)$$

$$=\frac{n^{\alpha-1}}{2^{\alpha/2}B_{n,\alpha}(1+3^r)}\int\limits_{\pi/4}^{\pi n/2}\omega_r\left(\frac{2t}{n}\right)\frac{dt}{t^\alpha}.$$

Таким образом, для любого $n\in\mathbb{N}$

$$\int\limits_0^\pi\omega_r(t)D_{n,\alpha}(t)\,dt\geqslant\frac{n^{\alpha-1}}{2^{\alpha/2}B_{n,\alpha}(1+3^r)}\int\limits_{\pi/4}^{\pi n/2}\omega_r\left(\frac{2t}{n}\right)\frac{dt}{t^\alpha}.\tag{3.2}$$

Производя замену переменной

$$x=\frac{\pi n}{2t}$$

в последнем интеграле, получаем

$$\int_{\pi/4}^{\pi n/2} \omega_r\left(\frac{2t}{n}\right)\frac{dt}{t^\alpha} = \int_{2n}^{1} \omega_r\left(\frac{\pi}{x}\right)\left(\frac{2x}{\pi n}\right)^\alpha\left(-\frac{\pi n}{2x^2}\right)dx$$

$$= \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\alpha-1}\int_1^{2n}\omega_r\left(\frac{\pi}{x}\right)x^{\alpha-2}\,dx = \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\alpha-1}\sum_{k=1}^{2n-1}\int_k^{k+1}\omega_r\left(\frac{\pi}{x}\right)x^{\alpha-2}\,dx$$

$$\geqslant \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\alpha-1}\sum_{k=1}^{2n-1}\omega_r\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\int_k^{k+1}x^{\alpha-2}\,dx$$

$$\geqslant \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\alpha-1}\sum_{k=1}^{2n-1}\omega_r\left(\frac{\pi}{k+1}\right)\frac{(k+1)^{\alpha-1}-k^{\alpha-1}}{\alpha-1}.$$

Принимая во внимание теорему A и сопоставляя установленное неравенство с (3.2), имеем

$$\int_0^\pi \omega_r(t)D_{n,\alpha}(t)\,dt$$

$$\geqslant \frac{n^{\alpha-1}}{2^{\alpha/2}B_{n,\alpha}(1+3^r)}\left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\alpha-1}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(k+1)^{\alpha-1}-k^{\alpha-1}}{\alpha-1}\omega_r\left(\frac{\pi}{k+1}\right)$$

$$= \frac{2^{\alpha/2}}{2\pi^{\alpha-1}(\alpha-1)B_{n,\alpha}(1+3^r)}\sum_{k=1}^{2n-1}\left((k+1)^{\alpha-1}-k^{\alpha-1}\right)\omega_r\left(\frac{\pi}{k+1}\right)$$

$$\geqslant \frac{2^{\alpha/2}}{2\pi^{\alpha-1}(\alpha-1)B_{n,\alpha}(1+3^r)}\sum_{k=1}^{2n-1}\left((k+1)^{\alpha-1}-k^{\alpha-1}\right)\frac{E_{k-1}(f)}{C(r)}. \quad \square$$

**Следствие 3.7.** *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$, $f \in C$. Тогда*

$$\int_0^\pi \omega_r(f,t)D_{n,\alpha}(t)\,dt \geqslant \frac{C_3(r,\alpha)}{n^{\alpha-1}}\sum_{l=0}^{2n-2}(l+1)^{\alpha-2}E_l(f).$$

Следствие 3.7 уместно сопоставить со следствием 3.5.

Положим

$$\beta_\alpha = \int\limits_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^\alpha dt,$$

$$d_{\lambda,\alpha}(t) = \frac{1}{4\lambda^{\alpha-1}\beta_\alpha} \left|\frac{\sin\frac{\lambda t}{2}}{\frac{t}{2}}\right|^\alpha,$$

$$U_{\lambda,\alpha,r}(f,x) = \frac{2(-1)^{r+1}}{C_{2r}^r} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=1}^r (-1)^{r+k} C_{2r}^{r+k} f(x+kt)\right) d_{\lambda,\alpha}(t)\, dt.$$

Отметим, что при $n \in \mathbb{N}$

$$U_{n,2,1}(f,x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} f\left(x + \frac{2t}{n}\right) \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$$

– интеграл Фейера–Валле Пуссена, а

$$U_{n,4,1}(f,x) = \frac{3}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} f\left(x + \frac{2t}{n}\right) \left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt$$

– интеграл Джексона–Валле Пуссена.

Приведём ряд утверждений, аналогичных тем, которые были доказаны для случая, когда интеграл брался по отрезку $[0, \pi]$.

**Следствие 3.8.** *Пусть* $r, m-1 \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$, $\lambda > 0$, $f \in C$. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} \omega_r(f,t) d_{\lambda,\alpha}(t)\, dt$$

$$\leqslant (3 + 2\sqrt{2})\pi^r \left(\frac{1}{2(m^{\alpha-1}-1)} + \frac{2^{\alpha-2}}{\lambda^{\alpha-1}\beta_\alpha(\alpha-1)\pi^{\alpha-1}}\right)$$

$$\times \sum_{l=0}^{m-2} ((l+1)^r - l^r) \left(\sum_{k=l+1}^{m-1} \frac{(k+1)^{\alpha-1} - k^{\alpha-1}}{k^r}\right) E_l(f)$$

$$+ \frac{2^{\alpha+r-2} E_0(f)}{\lambda^{\alpha-1}\beta_\alpha(\alpha-1)\pi^{\alpha-1}}.$$

**Доказательство.** Прежде всего заметим, что $\omega_r(f,t) \leqslant 2^r E_0(f)$. Поскольку

$$d_{\lambda,\alpha}(t) \leqslant \frac{2^{\alpha-2}}{\lambda^{\alpha-1}\beta_\alpha}\frac{1}{t^\alpha},$$

то, принимая во внимание теорему 3.1, получаем ($\omega_r(t) = \omega_r(f,t)$)

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} \omega_r(t) d_{\lambda,\alpha}(t)\,dt = \left(\int\limits_0^\pi + \int\limits_\pi^{+\infty}\right) \omega_r(t) d_{\lambda,\alpha}(t)\,dt$$

$$\leqslant (3+2\sqrt{2})\pi^r \left(\frac{1}{2(m^{\alpha-1}-1)} + \frac{2^{\alpha-2}}{\lambda^{\alpha-1}\beta_\alpha(\alpha-1)\pi^{\alpha-1}}\right)$$

$$\times \sum_{l=0}^{m-2} ((l+1)^r - l^r) \left(\sum_{k=l+1}^{m-1} \frac{(k+1)^{\alpha-1} - k^{\alpha-1}}{k^r}\right) E_l(f)$$

$$+ \frac{2^r E_0(f) 2^{\alpha-2}}{\lambda^{\alpha-1}\beta_\alpha(\alpha-1)\pi^{\alpha-1}}. \qquad \square$$

**Следствие 3.9.** *Пусть* $r, n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$, $f \in C$. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} \omega_r(f,t) d_{n,\alpha}(t)\,dt$$

$$\leqslant \frac{C_4(r,\alpha)}{n^{\alpha-1}} \sum_{l=0}^{2n-2} ((l+1)^r - l^r) \sum_{k=l+1}^{2n-1} \frac{(k+1)^{\alpha-1} - k^{\alpha-1}}{k^r} E_l(f).$$

*Если* $1 < \alpha < r+1$, *то*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} \omega_r(f,t) d_{n,\alpha}(t)\,dt \leqslant \frac{C_5(r,\alpha)}{n^{\alpha-1}} \sum_{l=0}^{2n-2} (l+1)^{\alpha-2} E_l(f).$$

Для доказательства достаточно положить $m = 2n$ в следствии 3.8.

**Теорема 3.2$'$.** *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$, $f \in C$. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} \omega_r(f,t) d_{n,\alpha}(t)\,dt \geqslant \frac{C_6(r,\alpha)}{n^{\alpha-1}} \sum_{l=0}^{2n-2} (l+1)^{\alpha-2} E_l(f).$$

Теорему **3.2$'$** уместно сопоставить со следствием 3.9.

Все результаты работы остаются справедливыми для пространств $L_p$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ $2\pi$-периодических функций. Доказательства не меняются.

Авторы благодарны В. М. Буре за оказанную помощь в поготовке данной статьи.

## Литература

1. С. Б. Стечкин, *О приближении периодических функций суммами Фейера.* — Труды МИАН СССР **62** (1961), 48–60.
2. С. Б. Стечкин, *О приближении периодических функций суммами Фейера.* — В кн.: С. Б. Стечкин. Избранные труды: Математика. — М. (1989), 80–91.
3. М. Ф. Тиман, *Некоторые линейные процессы суммирования рядов Фурье и наилучшее приближение.* — Докл. АН СССР **145**, No. 4 (1962), 741–743.
4. М. Ф. Тиман, *Отклонение гармонических функций от их значений на границе и наилучшее приближение.* — Докл. АН СССР **145**, No. 5 (1962), 1008–1009.
5. М. Ф. Тиман, *Наилучшее приближение функции и линейные методы суммирования рядов Фурье.* — Изв. АН СССР. Сер. мат. **29**, No. 3 (1965), 587–604.
6. М. Ф. Тиман, *О приближении непрерывных периодических функций линейными операторами, построенными на базе их рядов Фурье.* — Докл. АН СССР **187**, No. 6 (1968), 1339–1342.
7. М. Ф. Тиман, *Наилучшее приближение периодических функций тригонометрическими полиномами и преобразования типа свёртки.* — Докл. АН СССР **198**, No. 4 (1971), 776–778.
8. М. Ф. Тиман, *Аппроксимация и свойства периодических функций.* Днепропетровск, 2000.
9. В. В. Жук, *О приближении $2\pi$-периодической функции значениями некоторого ограниченного положительного оператора. II.* — Вестн. Ленингр. ун-та, No. 13, сер. матем. мех. астр. (1967), 42–50.
10. В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций.* Л., 1982.
11. Г. И. Натансон, *Об оценке констант Лебега сумм Валле-Пуссена.* — В кн.: Геометрические вопросы теории функций и множеств. Межвузовский тематический сборник научных трудов. Калинин (1986), 102–108.
12. В. В. Жук, Г. И. Натансон, *Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации.* Л., 1983.
13. А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного.* М., 1960.
14. М. Д. Стерлин, *Оценки постоянных в обратных теоремах конструктивной теории функций.* — Докл. АН СССР **209**, No. 6 (1973), 1296–1298.

Babushkin M. V., Zhuk V. V. On two-sided estimates for some functionals in terms of the best approximations.

Two-sided estimates in terms of the best approximations by trigonometric polynomials are established for some functionals connected with approximation theory.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
*E-mail*: maxbabushkin@gmail.com
*E-mail*: zhuk@math.spbu.ru

Поступило 7 ноября 2016 г.