Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 448, 2016 г.

С. Ю. Славянов, О. Л. Стесик

СИМВОЛЬНАЯ ГЕНЕРАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ

Введение

Уравнения Пенлеве являются основным примером из теории интегрируемых нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Некоторые результаты теории уравнений Пенлеве представлены в книгах [1, 2]. Линейные уравнения из класса Гойна играют важную роль в теории дифференциальных уравнений второго порядка с полиномиальными коэфициентами [1]. Антиквантование позволяет установить взаимно однозначное соотношение между линейными уравнениями из класса Гойна и нелинейными уравнениями Пенлеве. Впервые это было продемонстрировано в работе [3], а позднее подробнее описано в [1]. Предложенный метод был основан на эвристических предположениях. Недавно более обоснованное рассмотрение данного вопроса было представлено в работе [4]. Изложенная в этой статье теория позволяет разработать программный пакет для символьной генерации уравнений Пенлеве, а также является альтернативой к методу изомонодромических деформаций [5].

Мы разработали программный пакет на базе CAS Maple. Входными данными для нашего пакета являются уравнения класса Гойна, из которых на выходе пользователь получает уравнения Пенлеве. Набор возможных данных ввода и вывода охватывает все уравнения Гойна и Пенлеве, представленные в проекте NIST [6].

Уравнения класса Гойна

Уравнение Гойна – это дифференциальное уравнение Фукса с четырьмя регулярными особыми точками, которые без ограничения общности можно расположить на комплексной плоскости следующим образом: $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = t$, $z_4 = \infty$. В наиболее краткой форме уравнение Гойна можно записать так:

Ключевые слова: уравнения класса Гойна, деформированныен уравнения, уравнения Пенлеве, ложные особенности, система Maple.

$$\sigma(z,t)w'' + \tau(z,t)w' + \omega(z)w - f(t)hw = 0. \qquad (1)$$

Коэффициенты σ, τ и ω являются полиномами третьего, второго и первого порядка по z соответственно:

$$\begin{aligned}
&\sigma(z) = z(z-1)(z-t),\\
&\tau(z) = \sigma(z)\sum_{j=1}^{3}\frac{1-\theta_j}{z-z_j} = \sum_{j=1}^{3}\sigma_j(z)(1-\theta_j),\\
&\omega(z) = \alpha\beta z.
\end{aligned}$$

Функция $f(t)$ – полином второй степени по t. Конкретный выбор функции $f(t)$ является ключевым при выводе соответствующего уравнения Пенлеве.

Уравнение Гойна характеризуется шестью параметрами: $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ – характеристические показатели для решений в точках z_1, z_2, z_3, а α и β – характеристические показатели на бесконечности. Заметим, что один из этих пяти параметров является зависимым, что следует из условия Фукса:

$$\sum_{j=1}^{3}\theta_j + \alpha + \beta = 2.$$

Выбор зависимого параметра произволен: например, фиксируем θ_j и α, а β выбираем согласно условию Фукса. Параметр h в уравнении (1) называется акцессорным, а функция $f(t)$ определяет его нормировку.

Таким образом, следующие шесть параметров характеризуют уравнение Гойна: четыре локальных параметра $\theta_1, \theta_2, \alpha$ и β, расположение третьей особой точки $z_3 = t$, которое мы назовем временем, и акцессорный параметр h, который мы назовём энергией.

Применяя процедуру конфлюэнции особых точек [1], мы можем получить различные типы конфлюэнтных уравнений Гойна: конфлюэнтное, биконфлюэнтное, дважды конфлюэнтное и триконфлюэнтное уравнение Гойна. Процедура слабой конфлюэнции [1] приводит к более специальным редуцированным конфлюэнтным уравнениям Гойна: редуцированному конфлюэнтному уравнению Гойна, редуцированному биконфлюэнтному уравнению Гойна и другим редуцированным конфлюэнтным уравнениям.

Конфлюэнтные и редуцированные конфлюэнтные уравнения, описанные в работах [1] и [4], образуют класс уравнений Гойна, который можно использовать для генерации уравнений Пенлеве.

Любое уравнение из класса Гойна (кроме некоторых редуцированных) может быть представлено в виде (1), где $\sigma(z,t)$, $\tau(z,t)$, $\omega(z)$ – полиномы третьей, второй и первой степени или ниже по z, а $f(t)$ – полином второй (или ниже) степени по t.

Антиквантование деформированных уравнений Гойна

Деформированное уравнение Гойна – это уравнение с дополнительной ложной особой точкой. В общем виде оно записывается следующим образом:

$$\sigma(z)w'' + \left(\tau(z) - \frac{\sigma(z)}{z-q}\right) w' + (\omega(z) + \mu \frac{\sigma_1(q) z}{z-q} - f(t)h) w = 0, \qquad (2)$$

где возникают параметры q и μ, характеризующие положение ложной особенности и значение производной $(\ln w(z))'|_{z=q}$ соответственно.

Необходимое условие для того, чтобы точка $z = q$ являлась ложной особенностью,

$$\mu^2 \sigma(q) + (\tau q - \sigma(q))\mu + \omega(q) - f(t)h = 0, \qquad (3)$$

следует из разрешимости системы для коэффициентов разложения в ряд решения $w(z)$ в окрестности ложной особой точки $z = q$. Соотношение (3) позволяет исключить слагаемое $f(t)h$ из уравнения (2):

$$\begin{aligned} \sigma(z)w'' + \tau(z)w' + \omega(z)w(z) - (\sigma(q)\mu^2 + \mu\tau(q) + \omega(q))w(z) \\ - \frac{\sigma(z)}{z-q} w'(z) + \mu \frac{\sigma(q)}{z-q} w(z) = 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Уравнение (4) можно представить в терминах симметричных операторов:

$$(H(p,z) - H(\mu,q))w(z) + \frac{1}{f(t)} \frac{\mu\sigma(q)w(z) - \sigma(z)w'(z)}{z-q} = 0, \qquad (5)$$

где p – квантовый оператор дифференцирования $p = d/dz$. Функция

$$H(\mu,q) = \frac{1}{f(t)} [\sigma(q)\mu^2 + \tau(q)\mu + \omega(q)] \qquad (6)$$

рассматривается в виде классического гамильтониана.

Классический гамильтониан при подходящем выборе функции $f(t)$ генерирует различные уравнения Пенлеве.

Антиквантование уравнения (5) заключается в подстановке p вместо μ и z вместо q в квантовый гамильтониан $H(p, z)$, который превращается в классический гамильтониан $H(\mu, q)$. Тем самым, уравнение (5) при наложении дополнительного условия $w''(z)|_{z=q} = 0$ на решение уравнения становится тождеством.

Генерация уравнений Пенлеве

Гамильтониан $H(\mu, q)$, задаваемый формулой (6), является гамильтонианом для уравнения Пенлеве. Соответствующий ему лагранжиан $\mathcal{L}(\dot{q}, q)$ получается с помощью преобразования Лежандра

$$\mathcal{L} = \frac{(f(t)^{1/2}\dot{q} - f(t)^{-1/2}\tau)^2}{4\sigma} - \frac{\omega}{f(t)}. \tag{7}$$

Уравнение Эйлера–Лагранжа для лагранжиана (7) принимает вид

$$\begin{aligned} \ddot{q} - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \sigma}{\partial q}\dot{q}^2 + \frac{\partial(\ln f - \ln \sigma)}{\partial t}\dot{q} \\ - \frac{\sigma}{f^2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\tau^2}{\sigma}\right) + f\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) - 2\frac{\partial \omega}{\partial q}\right] = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Уравнение (8) представляет всё многообразие уравнений Пенлеве.

Программа для генерации уравнений Пенлеве

Подстановка определённых полиномиальных коэффициентов σ, τ, ω вместе с выбором подходящей функции $f(t)$ для различных уравнений из класса Гойна (8) позволяет сгенерировать соответствующее уравнение Пенлеве. Можно подробно проделать все расчёты, что крайне нудно и трудоёмко. Чтобы упростить вычисления, мы разработали пакет, реализованный в CAS Maple и состоящий из двух модулей Maple. Первый из двух модулей содержит набор переменных, описывающих уравнение Гойна. Он включает в себя девять встроенных модулей, которые представляют полиномиальные коэффициенты σ, τ, ω и функцию $f(t)$ для всех уравнений класса Гойна. Две функции внутри модуля под названием "show" и "transform" соответствуют уравнениям (1) и (8). Второй модуль реализует графический интерфейс. Он представляет собой маплет, позволяющий выбирать нужное уравнение из списка уравнений класса Гойна и устанавливать значения параметров.

Как работает пакет Maple "HPTransform".

Вызов функции *HPTransform:-show* (⟨*name-equation*⟩) ведет к выводу выражения для исходного уравнения класса Гойна.

Вызов функции *HPTransform:-trans* (⟨*name-equation*⟩) приводит к получению выражения для соответствующего уравнения Пенлеве.

Список соответствий "Title of Heun class equation" – "name-equation" может быть найден при вызове команды *print*(*HPTransform:-names*).

Пакет HPTransform разработан в виде архивного библиотечного Maple-файла (HPTransform.mla). При помещении этого файла в один из каталогов архивных файлов Maple модуль HPTransforn будет доступен в документах Maple.

Для упрощения использования пакета HPTransform был разработан маплет HPTmaplet. Он осуществляет графический интерфейс к функциям пакета. С его помощью можно выбрать требуемое уравнение из раскрывающегося списка, затем получить изначальное уравнение класса Гойна и соответствующее уравнение Пенлеве в отдельных просмотровых панелях MathML. Кнопка "Set parameters" вызывает появление выбранных значений параметров на нижней панели. Кнопка "Solve" передает управление встроенному в Maple решателю ОДУ с выбранным уравнением в качестве вводимых данных.

На рис. 1 представлен снимок экрана с примером работы разработанной программы.

Обсуждение

Предложенная процедура требует некоторых пояснений.

1) Можно выполнить многие простые преобразования изначальных уравнений класса Гойна. Например, после преобразования $z = tx$ независимой переменной и подстановки $t^* = 1/t$ для параметра уравнение Гойна сохраняется в (x, t^*) лишь только с другим нормирующим множителем $f^*(t^*)$. Ясно, что процедура антиквантования приводит к уравнению Пенлеве, которое выглядит немножко другим нежели $P6$. Такое же замечание справедливо и при использовании простых преобразований других уравнений класса Гойна, примеры которых имеются в [4]. Более усложненные результаты могут быть выведены с использованием интегральных преобразований уравнений класса Гойна (см. [7]). Представленный пакет не содержит такого подхода.

2) Особое внимание требуется уделить редуцированному дважды конфлюэнтному и дважды редуцированному дважды конфлюэнтному уравнениям Гойна. Разложения в окрестностях сингулярностей этих

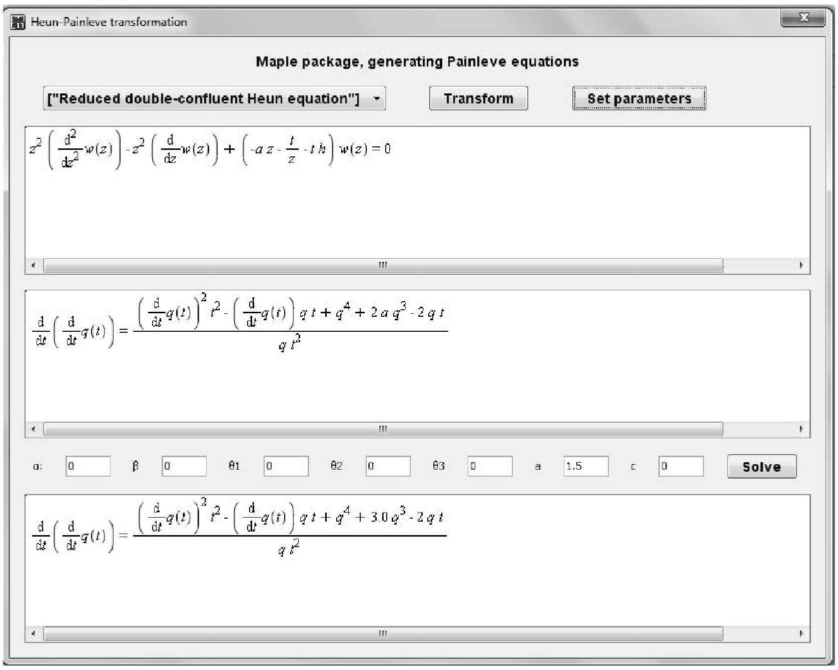

Рис. 1. Результат генерации уравнения Пенлеве.

уравнений используют полуцелые степени независимой переменной. Следовательно, в этих уравнениях естественно перейти к переменной $z = x^2$. Результирующее уравнение более не принадлежит классу Гойна. Дважды редуцированное дважды конфлюэнтное уравнение Гойна может быть представлено в виде

$$z^2 w'' - t\left(z + \frac{1}{z} + h\right) w = 0. \tag{9}$$

Видно, что оно не является уравнением с полиномиальными коэффициентами. Тем не менее процедуры перехода к деформированному уравнению и антиквантования не вызывают трудностей. В результате мы получаем уравнение

$$\ddot{q} - \frac{\dot{q}^2}{q} + \frac{\dot{q}}{t} + \frac{2(1-q^2)}{t} = 0, \tag{10}$$

которое является частным случаем уравнения $P3$.

3) Метод генерации уравнений Пенлеве выстраивает члены в специальном стиле. Средства Maple недостаточны, чтобы достичь такого выстраивания. Поэтому вывод Maple выглядит более сложным. Еще хуже выглядит файл latex, генерируемый Maple.

Тестовую версию пакета HPTransform можно найти по адресу [8].

Литература

1. С. Славянов, В. Лай, *Специальные функции: единая теория, основанная на анализе сингулярностей*, Невский диалект, СПб, 2002.
2. A. D. Bruno, A. B. Batkin (eds.), *Painlevé Equations and Related Topics*, De Gruyter, 2012.
3. S. Yu. Slavyanov, *Painlevé equations as classical analogues of Heun equation.* — J. Phys. A **29** (1996), 7329–7335.
4. С. Ю. Славянов, О. Л. Стесик, *Антиквантование деформированных уравнений класса Гойна.* — Теор. мат. физ. **186**, вып. 1 (2016), 142–151.
5. А. А. Болибрух, *Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений*, МЦНМО, М., 2009.
6. dlmf.nist.gov.
7. А. Я. Казаков, С. Ю. Славянов, *Интегральные симметрии Эйлера для деформированного уравнения Гойна и симметрии уравнения Пенлеве PVI.* — Теор. мат. физ. **155** (2008), 252–264.
8. gr2.phys.spbu.ru/HPTransform.

Slavyanov S. Yu., Stesik O. L. Symbolic generation of Painlevé equations.

Our goal is to simplify the symbolic generation of Painlevé equations from deformed Heun class equations by using CAS Maple. In the developed package, the input data are Heun class equations and the output data are various Painlevé equations.

С.-Петербургский
государственный университет,
С.-Петербург 199034, Россия
E-mail: `slav@ss2034.spb.edu`
E-mail: `o.stesik@spbu.ru`

Поступило 16 сентября 2016 г.