

Ф. В. Петров, В. В. Соколов

АСИМПТОТИКА ЖОРДАНОВОЙ ФОРМЫ
СЛУЧАЙНОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ МАТРИЦЫ

§1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ДИАГРАММА ЮНГА, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ
ЖОРДАНОВОЙ ФОРМЕ

Напомним основные определения.

Ориентированным графом мы будем называть пару множеств $(V; E \subset V \times V)$, где V – множество вершин, E – множество ребер, и будем говорить, что из вершины $u \in V$ в вершину $v \in V$, $u \neq v$, есть ребро (или, иначе, стрелка), если $(u, v) \in E$.

Ориентированный граф называется *транзитивным*, если для любых трех вершин $u, v, w \in V$ из того, что $(u, v) \in E$ и $(v, w) \in E$, следует, что $(u, w) \in E$.

Циклом в ориентированном графе будем называть набор вершин (не обязательно различных) $(v_1, \dots, v_n, v_{n+1} = v_1)$, такой, что для любого $i = 1, \dots, n$ выполнено соотношение $(v_i, v_{i+1}) \in E$.

Ориентированный граф называется *ациклическим*, если в нем нет циклов.

Частично упорядоченное множество (M, \prec) будем рассматривать как ациклический транзитивный ориентированный граф, в котором стрелки соответствуют отношению порядка: $a \prec b$, если есть стрелка из a в b . Будем также писать $a \preceq b$, если $a \prec b$ или $a = b$.

Замечание 1. Вершинам конечного ациклического ориентированного графа можно таким образом сопоставить числа $1, \dots, n$, где $n = |V|$, что если есть стрелка из вершины с индексом i в вершину с индексом j , то $i < j$. Такое сопоставление называется *топологической сортировкой* ориентированного графа.

Будем называть $(x - y)$ -цепью длины ℓ в частично упорядоченном множестве путь из вершины x в вершину y , содержащий ℓ вершин.

Ключевые слова: жорданова форма, случайное частично упорядоченное множество, наибольшая возрастающая подпоследовательность, предельная форма.

Работа поддержана грантами СПбГУ 6.38.223.2014, 6.37.208.2016 и грантом РФФИ 14-01-00373а.

Антицепью размера m частично упорядоченного множества будем называть его подмножество из m попарно несравнимых элементов (т.е. таких элементов, что ни один из них не меньше другого).

Важным примером служит частичный порядок, построенный по перестановке A именно,

если (π_1, \dots, π_n) – перестановка чисел $1, \dots, n$, то определим отношение $i \ll_\pi j$ на множестве $\{1, \dots, n\}$ так: $i \ll_\pi j$ тогда и только тогда, когда одновременно $i < j$ и $\pi_i < \pi_j$.

Цепям здесь соответствуют возрастающие подпоследовательности, антицепям – убывающие последовательности.

Следуя [1], *дзета-функцией* $\zeta(A)$ конечного частично упорядоченного множества (A_n, \prec) , заданного на множестве $\{1, \dots, n\}$ и топологически отсортированного, будем называть верхнюю унитреугольную матрицу M , заданную следующим образом: $M_{i,j} = 1$ при $i \preceq j$, иначе $M_{i,j} = 0$.

Для перестановки $\pi \in S_n$ будем также писать $\zeta(\pi)$, подразумевая $\zeta(A)$, где A – частично упорядоченное множество, построенное по перестановке π .

Строго говоря, матрица $\zeta(A)$ зависит также от выбора кольца с единицей, над которым она рассматривается.

Название обусловлено тем, что для отношения делимости на множестве натуральных чисел эта матрица есть матрица оператора умножения ряда Дирихле $\sum x_n n^{-s}$ на дзета-функцию Римана $\zeta(s) = \sum n^{-s}$.

Дзета-функция частично упорядоченного множества является унипотентной матрицей, поэтому жорданова форма дзета-функции определяется рангами степеней нильпотентной матрицы $\zeta - I_n$ (где I_n – единичная матрица). Поскольку $(\zeta - I_n)_{i,j}^k$ – это количество цепей длины k из i в j , эти ранги связаны с наличием цепей данной длины между парами элементов. Однако, поскольку элементами матрицы ζ являются единицы, появляются многочисленные “необязательные” зависимости между элементами степеней матрицы $\zeta - I_n$. Наличие таких зависимостей влечёт уменьшение ранга и, тем самым, влияет на жорданову форму. Эти эффекты исчезают, если ненулевые элементы матрицы $\zeta - I_n$ сделать алгебраически независимыми.

Обобщенной дзета-функцией $\bar{\zeta}$ конечного ациклического ориентированного графа (V, E) с $|V| = n$ будем называть следующий элемент M кольца матриц $M_n(R[x_i^j | i, j \in 1, \dots, n])$: $M_{i,j} = x_i^j \iff (i, j) \in E$, $M_{i,i} = 1$, и $M_{i,j} = 0$ иначе.

Для изучения жордановой формы удобнее рассматривать нильпотентные матрицы $\zeta - I_n$ и $\bar{\zeta} - I_n$. Обозначим их ζ_0 и $\bar{\zeta}_0$ соответственно.

Заметим, что жорданова форма нильпотентной матрицы задается диаграммой Юнга, длины строк которой суть размеры жордановых клеток. Таким образом, каждому (конечному) частично упорядоченному множеству соответствуют диаграммы Юнга, построенные по его дзета-функции и обобщённой дзета-функции.

С частично упорядоченным множеством связаны также следующие диаграммы Юнга.

Диаграммой цепей частично упорядоченного множества A (ациклического ориентированного графа $G = (V, E)$) будем называть диаграмму Юнга, построенную по A (соответственно G) следующим образом: суммарный размер первых k строк равен максимальному количеству элементов множества A (вершин), которые можно покрыть k непересекающимися цепями (k непересекающимися путями).

Априори неочевидно, почему получится именно диаграмма Юнга, т.е. почему очередная строка будет не длиннее предыдущих. Тем не менее это так. Имеет место следующая важная теорема.

Теорема 1 ([5]). *Диаграмма Юнга, соответствующая жордановой форме обобщенной дзета-функции произвольного ациклического ориентированного графа, совпадает с диаграммой цепей этого ориентированного графа.*

Отметим также, что по теореме двойственности Грина–Клейтмана–Фомина [8, 9] диаграмма цепей сопряжена диаграмме антицепей: сумма длин k первых столбцов диаграммы цепей равна наибольшему числу элементов, которые можно покрыть k антицепями. При $k = 1$ это утверждение известно как теорема Дилуорса.

Равномерное распределение на перестановках индуцирует так называемую меру Планшереля на диаграммах Юнга (диаграммах цепей этих перестановок). Мера диаграммы пропорциональна квадрату размерности соответствующего неприводимого представления симметрической группы. Предельное поведение этой меры изучено в работах Вершика–Керова [3] и Логана–Шеппа [4]. В [2] также решена старая проблема Улама: установлено, что длина максимальной цепи в случайной перестановке n элементов (и, в силу симметричности, максимальной антицепи) при расположении элементов перестановки в обратном порядке возрастающие последовательности переходят в

убывающие) растет как $2\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$. Подробно об этой задаче и ее многочисленных связях написано, например, в обзоре [7].

Упомянутые результаты показывают, что и размер старшей клетки, и количество клеток (т.е. коранг) жордановой формы обобщенной дзета-функции случайной перестановки растет как $2\sqrt{n}$.

Здесь, однако, являлось существенным то, что элементы матрицы были алгебраически независимы. Какова ситуация для диаграммы Юнга, построенной по жордановой форме матрицы ζ_0 , а не $\bar{\zeta}_0$? Мы доказываем, что для некоторого конечного или бесконечного C частное $\frac{\text{corank}(\bar{\zeta}_0(\pi))}{\sqrt{n}}$ концентрируется около C , но $C > 2$. Вычисления дают значения для C не больше 3, однако позволяют предположить, что в действительности $C = \infty$, см. подробности далее.

§2. КОЛИЧЕСТВО КЛЕТОК ЖОРДАНОВОЙ ФОРМЫ МАТРИЦЫ СЛУЧАЙНОЙ ПЕРЕСТАНОВКИ

Нам понадобится следующая версия известной леммы Фекете.

Лемма 1 (Фекете). *Для любой вещественной неотрицательной функции $f(x)$, удовлетворяющей неравенству $f(x) \geq f(y) + f(x - y)$ при $0 < y < x$, существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \sup_{x > 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что нижний предел не меньше супремума, то есть не меньше любого конкретного выражения $f(a)/a$. Это следует из того, что $f(x) \geq [x/a] \cdot f(a)$. \square

Теорема 2. *Обозначим через $\pi(n)$ случайную перестановку n элементов (в соответствии с равномерным распределением на симметрической группе S_n). Тогда существует конечный или бесконечный предел отношения $E\left(\frac{\text{corank}(\zeta_0(\pi(n)))}{\sqrt{n}}\right)$.*

Доказательство. Заметим, что n точек в единичном квадрате задают перестановку длины n следующим образом: упорядочим точки по координате x , тогда y -координаты образуют перестановку, причем равномерному распределению точек в квадрате отвечает равномерное распределение на перестановках. Обозначим через E_λ математическое ожидание величины $\text{corank } \zeta_0(\pi(\lambda))$, где $\pi(\lambda)$ – перестановка, получаемая следующим образом: сначала выбирается число элементов t

согласно распределению Пуассона $P(\lambda)$, после чего в единичном квадрате выбирается m точек согласно равномерному распределению на этом квадрате. Иными словами, рассматривается пуассоновский точечный процесс интенсивности λ в единичном квадрате. Зачем нужно делать количество точек переменным, будет ясно чуть позднее. Докажем, что для всех λ и $0 < p < 1$ имеет место следующее неравенство:

$$E_\lambda \geq E_{p^2\lambda} + E_{(1-p)^2\lambda}.$$

Разобьем квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ на четыре области. Первая область: $[0, p] \times [0, 1 - p]$; вторая область: $[0, p] \times [1 - p, 1]$; третья область: $[p, 1] \times [0, 1 - p]$; четвертая область: $[p, 1] \times [1 - p, 1]$. Заметим, что из точек, попавших во вторую область, не может быть стрелок в точки, попавшие в третью область, и наоборот; из этих областей не может быть стрелок в точки, попавшие в первую область; и из точек, попавших в четвертую область, не может быть стрелок во все остальные области. Тем самым, если мы перенумеруем элементы так, чтобы они шли в порядке “сначала элементы из первой области, потом из второй, потом из третьей, потом из четвертой”, и посмотрим на матрицу ζ_0 , то она окажется блочно верхнетреугольной, причем будет выполняться неравенство

$$\text{corank}(\zeta_0) \geq \text{corank}(\zeta_0^{2,2}) + \text{corank}(\zeta_0^{3,3}),$$

где $\zeta_0^{i,j}$ – часть матрицы ζ_0 , образованная строками группы i и столбцами группы j . В самом деле, правая часть есть коранг подматрицы, построенной по точкам второй и третьей областей. Продолжим эту матрицу нулями (ее ранг не изменится). Добавление матриц $\zeta_0^{1,1234}$ и $\zeta_0^{1234,4}$ увеличит ранг не более, чем на общее количество точек в первой и четвертой областях, что дает требуемое неравенство на коранг.

После взятия математического ожидания получаем требуемое неравенство, поскольку сужение пуассоновского процесса на область площади p^2 есть снова пуассоновский процесс с математическим ожиданием количества точек $p^2\lambda$. Аналогично и с третьей областью, причем, что важно, имеет место независимость от второй области. По лемме Фекете существует предел $E\left(\frac{\text{corank}(\zeta_0(\pi(\lambda)))}{\sqrt{\lambda}}\right)$. \square

Переход от пуассоновского процесса к фиксированному количеству точек достигается применением следующей стандартной леммы.

Лемма 2 (депуассонизация). Пусть (x_n) – возрастающая последовательность неотрицательных чисел, причем $x_n = O(n)$. Тогда если $f(\lambda) := \sum_n \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} x_n \sim c\lambda^p$ при $\lambda \rightarrow +\infty$, то $x_n \sim cn^p$.

Доказательство. Распределение Пуассона сосредоточено в окрестности своего среднего. Это обстоятельство и монотонность последовательности (x_n) позволяют оценить x_n через $f(n \pm o(n))$ с обеих сторон. \square

§3. ЖОРДАНОВА ФОРМА СЛУЧАЙНОЙ ВЕРХНЕТРЕУГОЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

Здесь мы обсудим случай жордановой формы матрицы случайного ациклического ориентированного графа.

В работе [6] установлено поведение жордановой формы случайной верхнетреугольной матрицы $n \times n$ над конечным полем \mathbb{F}_q . Оказывается, что k -я по величине клетка имеет размер порядка $(q^{1-k} - q^{-k})n$. Мы доказываем, что (с другими константами) аналогичное явление имеет место для верхнетреугольной матрицы общего вида, построенной по случайному ациклическому графу.

Рассмотрим n пронумерованных вершин $1, \dots, n$. Построим на них случайный ациклический граф, где каждое ребро (i, j) , $1 \leq i < j \leq n$, проводится случайно независимо от других с вероятностью p . Обозначим получившийся граф $G_p(n)$.

Теорема 3. При каждом k существует предел $\varphi_k(p) = \lim_n E \frac{s_k}{n}$, где s_k – размер k -й по величине клетки жордановой формы матрицы $\bar{\zeta}_0(G_p(n))$.

Доказательство. Как мы уже знаем, размер k -й по величине клетки жордановой формы матрицы $\bar{\zeta}_0(G_p(n))$ равен размеру k -й строки диаграммы путей. Удобнее говорить о суммарном размере первых k клеток, то есть о наибольшем количестве вершин, которые могут покрыть k непересекающихся путей. Обозначим эту случайную величину $t_p(k, n)$. Введем немного другую случайную величину $w_p(k, n)$, определяемую как наибольшее количество ребер в графе $G_p(n+k)$, покрываемых k путями с началами в вершинах $1, \dots, k$ (число вершин в этих путях ровно на k больше). Математические ожидания этих величин несложно оценить друг через друга. Во-первых, ясно, что $E(w_p(k, n)) + k \leq E(t_p(k, n+k))$. Для оценки в другую сторону в

графе на вершинах $k+1, \dots, k+n$ выберем k путей максимального суммарного размера и соединим вершину i с ближайшей возможной вершиной i -го из этих путей ($i = 1, \dots, k$). Так мы получим k путей в $G_p(n+k)$ с началами $1, \dots, k$, суммарное количество ребер в которых будет отличаться от $t_p(k, n)$ в среднем на константу, зависящую от p и k .

Для величины $w_p(k, n)$ имеет место супераддитивность математического ожидания: $E(w_p(k, n+m)) \geq E(w_p(k, n)) + E(w_p(k, m))$. Это следует из возможности строить k путей в $G_p(k+n+m)$ так: сначала построить их в $G(k, k+n)$ из вершин $1, \dots, k$, а затем продолжить из концов в вершины $n+k+1, \dots, n+k+m$.

Из леммы Фекетеса получаем, что существует (очевидно, конечно) предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(w_p(k, n))}{n}$, равный пределу $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(t_p(k, n))}{n}$. \square

§4. КОНЦЕНТРАЦИЯ

Супераддитивность позволяет установить концентрацию около среднего. Например, теорема 3 допускает следующее усиление.

Теорема 4. *В терминах теоремы 3 для всякого $\varepsilon > 0$ вероятность события $|s_k(n) - \varphi_k(p) \cdot n| > \varepsilon n$ стремится к 0 с ростом n .*

Доказательство. Вновь сведём дело к аналогичному утверждению о величине $w_p(k, n)$. Рассмотрим такое большое число M , что $\frac{E(w_p(k, M))}{M}$ почти равно соответствующему пределу $\psi_k(p) := \sum_{i \leq k} \varphi_i(p)$. Теперь для каждого $n \gg M$ разобьем вершины $k+1, \dots, n+k$ графа $G_p(n+k)$ на $[n/M]$ групп по M последовательных вершин (возможно, несколько вершин останется). Будем строить пути из вершин $1, \dots, k$, выбирая сначала их концы в первой группе, потом продолжая из этих концов во вторую группу и так далее. Суммарная длина полученных путей будет иметь среднее значение $[n/M]E(w_p(k, M))$, и по закону больших чисел вероятность отклонения хотя бы на $\varepsilon n/2$ будет стремиться к 0. Таким образом, вероятность отклонения значения величины $w_p(k, n)$ от ее математического ожидания вниз хотя бы на $\varepsilon n/2$ стремится к 0. Но тогда то же делает и вероятность отклонения вверх. \square

Аналогичное усиление допускает теорема 2.

Теорема 5. *Пусть C – предел в теореме 2. Для любых констант $C_1 < C < C_2$ (или $C = C_2 = \infty$) вероятность того, что коранг матрицы $\zeta_0(\pi(n))$ лежит вне интервала $(C_1, C_2) \cdot \sqrt{n}$, стремится к 0.*

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 4, надо только вместо разбиения строки на куски брать разбиение квадрата на прямоугольники (и рассматривать квадратики вдоль побочной диагонали).

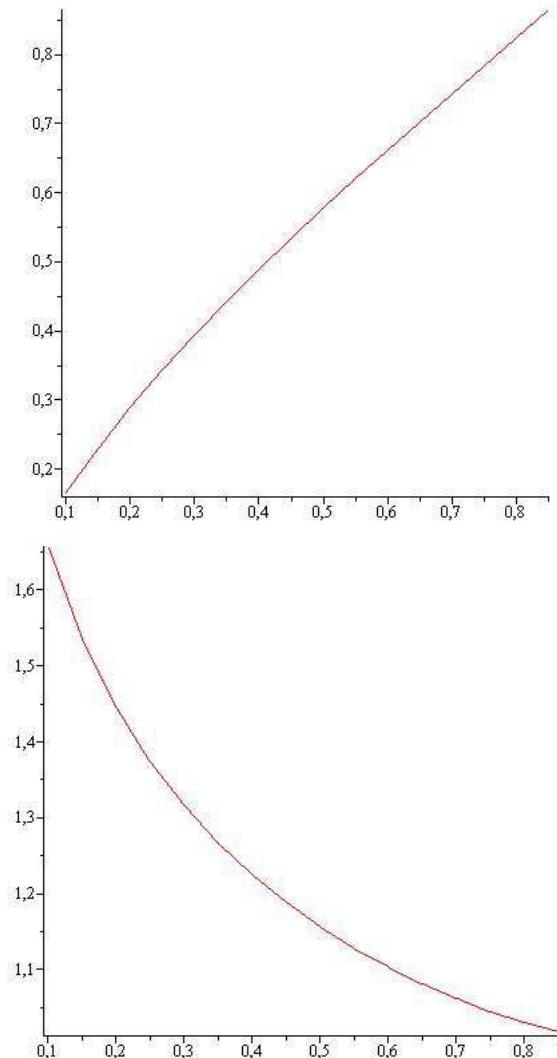
Замечание 2. Теоремы 2 и 5 остаются верны над произвольным полем (конечно, предельная константа может зависеть от поля). Более того, вместо единиц можно заполнять соответствующие стрелкам элементы матрицы независимыми одинаково распределенными в поле случайными величинами.

§5. Вычисления

Длины максимальных путей в случайных графах могут быть вычислены за в среднем линейное по количеству вершин время, что позволяет искать математические ожидания размеров первой жордановой клетки в графах $G(n, p)$ для n порядка 10^8 . График соответствующей функции $\varphi_1(p)$ приведен на рисунке; на другом рисунке приведен более выразительный график функции $\varphi_1(p)/p$. Вычисление второй и последующей строк алгоритмически сложнее, но оно подсказывает, что феномен из работы Бородина (первая клетка занимает ту же долю от порядка матрицы, что вторая — от всех клеток кроме первой, и так далее) не имеет места. Иными словами, поиск двух путей, покрывающих наибольшее число вершин, жадным алгоритмом (строим первый путь как самый длинный, отбрасываем его, снова ищем самый длинный путь) не является асимптотически оптимальным. Так, $\varphi_1(1/2) = 0.578\dots$,

$$\varphi_2(1/2) = 0.288\dots \neq 1 - (1 - \varphi_1(1/2))^2.$$

Что касается коранга матрицы, построенной по случайной перестановке, то здесь вычисления более трудоёмки, получается проводить их для матриц порядка не выше 1000. В таблице приведены (вычисленные методом Монте-Карло для тысячи случайных перестановок) гипотетические средние коранги для перестановок размеров от 50 до 1000.



n	$n^{-1/2}$. (средний коранг)
50	1.994183
100	2.1948
200	2.35212
400	2.500
500	2.5321
800	2.627
1000	2.652202

Если обозначить величину справа через $F(n)$, то можно заметить, что выражение $e^{F(2n)} - e^{F(n)}$ для $n = 50, 100, 200, 400, 500$ принимает примерно одинаковые значения от 1.5 до 1.7. Это соответствует росту функции $F(n)$ со скоростью $\log \log n$. Отметим, что аналогичные величины в задаче Улама довольно быстро убывают, что указывает на существенное различие поведения коранга и максимальной антицепи для случайной перестановки. Для корангов над полем характеристики 2 также можно предположить скорость $\sqrt{n} \cdot \log \log n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Стенли, Перечислительная комбинаторика, т. 1, любое издание.
2. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Асимптотика максимальной и типичної размерностей неприводимых представлений симметрической группы*. — Функц. анал. и его прил. **19**, вып. 1 (1985), 25–36.
3. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Асимптотика меры Планшереля симметрической группы и предельная форма таблиц Юнга*. — ДАН СССР **233**, вып. 6 (1977), 1024–1027.
4. B. F Logan, L. A. Shepp, *A variational problem for random Young tableaux*. — Adv. Math. **26** (1977), 206–222.
5. S. Poljak, *Maximum rank of powers of a matrix of a given pattern*. — Proc. Amer. Math. Soc. **106**, No. 4 (1989), 1137–1144.
6. А. М. Бородин, *Предельная жорданова нормальная форма больших треугольных матриц над конечным полем*. — Функц. анал. и его прил. **29**, вып. 4 (1995), 72–75.
7. R. P. Stanley, *Increasing and decreasing subsequences and their variants*. — In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid, Spain, 2006.
8. C. Greene, D. J. Kleitman, *The structure of Sperner k -families*. — J. Combin. Theory Ser. A **20** (1976), 41–68.
9. С. В. Фомин, *Конечные частично упорядоченные множества и диаграммы Юнга*. — ДАН СССР **243**, вып. 5 (1978), 1144–1147.

Petrov F. V., Sokolov V. V. Asymptotics of the Jordan normal form of a random nilpotent matrix.

We study the Jordan normal form of an upper triangular matrix constructed from a random acyclic graph or a random poset. Some limit theorems and concentration results for the number and sizes of Jordan blocks

are obtained. In particular, we study a linear algebraic analog of Ulam's longest increasing subsequence problem.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
С.-Петербург, Россия
E-mail: fedyapetrov@gmail.com

Поступило 19 сентября 2016 г.

С.-Петербургский государственный
университет
С.-Петербург, Россия
E-mail: visoksok@gmail.com