Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 448, 2016 г.

Ю. А. Неретин

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УИШАРТА–ПИКРЕЛЯ И ЗАМЫКАНИЯ ГРУППОВЫХ ДЕЙСТВИЙ

§1. Утверждение

1.1. Обозначения. Пусть Herm_∞– пространство всех бесконечных эрмитовых матриц, Herm^0_∞ – пространство бесконечных эрмитовых матриц, имеющих лишь конечное число ненулевых матричных элементов.

Через $\mathrm{U}(\infty)$ обозначим группу бесконечных унитарных матриц g, таких, что $g-1$ имеет лишь конечное число ненулевых матричных элементов. Эта группа действует на Herm_∞ сопряжениями,

$$U : X \mapsto U^{-1}XU. \tag{1}$$

Через $\overline{\mathrm{U}}(\infty)$ обозначим полную унитарную группу пространства ℓ_2, снабженную слабой операторной топологией, через $\mathcal{B}(\infty)$ – полугруппу всех линейных операторов в ℓ_2 с нормой $\leqslant 1$, которая тоже снабжена слабой операторной топологией.

1.2. Распределения Уишарта–Пикреля. Для вероятностной меры μ на Herm_∞ мы определим характеристическую функцию на Herm^0_∞ по формуле

$$\chi(\mu|A) = \int\limits_{\mathrm{Herm}_\infty} e^{i\,\mathrm{tr}\,AX}\, d\mu(X).$$

Очевидно, такая функция определяет меру единственным образом.

Имеет место следующая теорема Пикреля [11] (см. другое доказательство с дополнительными деталями в [9]) в духе теоремы де Финетти.

Любая $\mathrm{U}(\infty)$*-инвариантная мера на* Herm_∞ *может быть единственным образом разложена на эргодические меры. Любая эргодическая* $\mathrm{U}(\infty)$*-инвариантная мера имеет характеристическую функцию*

Ключевые слова: полиморфизм, инвариантная мера, эргодические действия.
Поддержано грантами FWF, P28421, P25142.

вида

$$\chi_{\gamma_1,\gamma_2,\lambda}(A) = e^{-\frac{\gamma_1}{2}\operatorname{tr} A^2 + i\gamma_2 \operatorname{tr} A} \prod_{k=1}^{\infty} \Bigl(\det \frac{e^{-i\lambda_k A}}{1 - i\lambda_k A}\Bigr), \tag{2}$$

где $\gamma_1 \geqslant 0$, γ_2 *и* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *– вещественные числа, а* $\sum \lambda_k^2 < \infty$.

Обозначим эту меру через $\mu_{\gamma_1,\gamma_2,\lambda}$.

Характеристическая функция является произведением, поэтому соответствующая мера разлагается в (бесконечную) свертку. Экспоненциальный множитель $e^{-\frac{\gamma_1}{2}\operatorname{tr} A^2 + i\gamma_2 \operatorname{tr} A}$ соответствует гауссовой мере на Herm_∞. Объясним смысл множителей $\det(1 - i\lambda_k A)^{-1}$. Рассмотрим комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с гауссовой мерой $\pi^{-1} e^{-|u|^2}\, d\,\mathrm{Re}\, u\, d\,\mathrm{Im}\, u$. Возьмем пространство $\mathbb{C}^\infty$, снабженное произведением мер ν. Рассмотрим отображение $\mathbb{C}^\infty \to \mathrm{Herm}_\infty$, заданное формулой

$$u \mapsto \lambda_k u^* u,$$

и образ μ меры ν относительно этого отображения. Характеристическая функция меры μ равна

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathrm{Herm}_\infty} e^{i \operatorname{tr} AX} d\mu(X) &= \int\limits_{\mathbb{C}^\infty} e^{i \operatorname{tr} \lambda_k A u^* u}\, d\nu(u) \\ &= \int\limits_{\mathbb{C}^\infty} e^{i\lambda_k u A u^*}\, d\nu(u) = \det(1 - i\lambda_k A)^{-1}.\end{aligned}$$

Если $\sum |\lambda_k| < \infty$, то мы можем преобразовать выражение (2) к виду

$$\chi_{\gamma_1,\gamma_2,\lambda}(A) = e^{-\frac{\gamma_1}{2}\operatorname{tr} A^2 + i(\gamma_2 - \sum \lambda_k)\operatorname{tr} A} \prod_{k=1}^{\infty} \det(1 - i\lambda_k A)^{-1}.$$

Если ряд $\sum \lambda_k$ расходится, мы получаем расходящийся ряд в показателе экспоненты и расходящееся произведение.

1.3. Полиморфизмы. См. [3, 10], [5, §VIII.4]. Рассмотрим лебеговское пространство M, снабженное непрерывной вероятностной мерой μ. Обозначим через $\mathrm{Ams}(M)$ группу биективных п.в. преобразований M, сохраняющих меру.

Полиморфизм пространства M – это мера π на $M \times M$, образы которой при обеих проекциях $M \times M \to M$ совпадают с μ. Обозначим через $\mathrm{Pol}(M)$ множество всех полиморфизмов пространства M. Мы скажем, что последовательность $\pi_j \in \mathrm{Pol}(M)$ сходится к π, если для любых измеримых подмножеств A, $B \subset M$ имеет место сходимость $\pi_j(A \times B) \to \pi(A \times B)$. Пространство $\mathrm{Pol}(M)$ компактно, а группа $\mathrm{Ams}(M)$ плотна в $\mathrm{Pol}(M)$.

Полиморфизмы могут рассматриваться как отображения, размазывающие точки из M в вероятностные меры на M. А именно, для $\pi \in \mathrm{Pol}(M)$ рассмотрим систему условных мер π_m на множествах $m \times M \subset M \times M$, где m пробегает M. Мы считаем, что "отображение" π переводит точку m в меру π_m. Если π, $\varkappa \in \mathrm{Pol}(M)$, то произведение $\rho = \varkappa \circ \pi$ определяется из условия

$$\rho_m = \int\limits_M \varkappa_n \, d\pi_m(n).$$

Мы получаем полугруппу с раздельно непрерывным отображением.

Пусть $g \in \mathrm{Ams}(M)$. Рассмотрим отображение из M в $M \times M$, определенное по формуле $m \mapsto (m, g(m))$, и возьмем образ меры μ при этом отображении. Мы получаем полиморфизм с носителем на графике отображения g. Группа $\mathrm{Ams}(M)$ плотна в $\mathrm{Pol}(M)$.

Марковский оператор R в $L^2(M)$ – это ограниченный оператор, удовлетворяющий следующим свойствам:

– если $f \geqslant 0$, то $Rf \geqslant 0$;

– $R \cdot 1 = 1$, $R^* \cdot 1 = 1$.

Напомним, что автоматически $\|R\| = 1$. Есть взаимно однозначное сответствие между множеством $\mathrm{Mar}(M)$ марковских операторов и $\mathrm{Pol}(M)$. А именно, для произвольного марковского оператора R мы определим полиморфизм π по формуле

$$\pi(A \times B) = \langle RI_A, I_B \rangle_{L^2(M)},$$

где A, $B \subset M$ – измеримые множества, а I_A, I_B – их индикаторные функции. Слабая сходимость в $\mathrm{Mar}(M)$ соответствует сходимости в $\mathrm{Pol}(M)$, произведение марковских операторов соответствует произведению полиморфизмов.

1.4. Замыкание действий. Пусть группа G действует на M преобразованиями, сохраняющими меру. Иными словами, мы имеем гомоморфизм $G \to \mathrm{Ams}(M)$, для определенности предположим, что это вложение. Тогда замыкание группы G в $\mathrm{Pol}(M)$ является компактной полугруппой $\Delta \supset G$. Описание такого замыкания не очень интересно для связных групп Ли (например, для линейных полупростых групп Ли мы получаем одноточечную компактификацию, это следует из [2, теорема 5.3]). Однако вопрос о подобных замыканиях интересен для бесконечномерных групп.

Первый результат такого типа был получен Нельсоном [4] в 1973 г. Он показал, что стандартное действие бесконечномерной ортогональной группы на пространстве с гауссовой мерой продолжается до действия полугруппы всех сжимающих операторов полиморфизмами, и получил формулы для соответствующих мер. В настоящее время известен большой набор действий бесконечномерных групп на пространствах с мерой, однако замыкания действий описаны лишь в небольшом числе случаев, см. [6, 7]. В настоящей заметке мы описываем новый (относительно простой) пример.

1.5. Утверждение. Для любого полиморфизма π пространства Herm_∞ определим характеристическую функцию на $\mathrm{Herm}^0_\infty \times \mathrm{Herm}^0_\infty$ по формуле

$$F(\pi|A,B) := \int\limits_{\mathrm{Herm}_\infty \times \mathrm{Herm}_\infty} e^{i \operatorname{tr} AX+BY}\, d\pi(X,Y).$$

Цель настоящей заметки – следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любой эргодической меры* $\mu_{\gamma_1,\gamma_2,\lambda}$ *на* Herm_∞ *действие* (1) *группы* $\mathrm{U}(\infty)$ *продолжается по непрерывности до действия полугруппы* $\mathcal{B}(\infty)$ *полиморфизмами пространства* M. *Замыкание группы* $\mathrm{U}(\infty)$ *в* $\mathrm{Pol}(\mathrm{Herm}_\infty)$ *совпадает с образом полугруппы* $\mathcal{B}(\infty)$. *Если* $S \in \mathcal{B}(\infty)$, *то характеристическая функция соответствующего полиморфизма* π_S *равна*

$$\begin{aligned} &F(\pi_S|A,B) \\ &\quad = \exp\Big\{-\frac{\gamma_1}{2}\operatorname{tr}\Big[\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & S\\ S^* & 1\end{pmatrix}\Big]^2 + i\gamma_2(\operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B)\Big\} \\ &\qquad \times \prod_k \frac{e^{-i\lambda_k(\operatorname{tr} A+\operatorname{tr} B)}}{\det\Big[1 - i\lambda_k \begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & S\\ S^* & 1\end{pmatrix}\Big]}. \end{aligned} \tag{3}$$

Так как характеристическая функция является произведением, мера π_S может быть разложена в свертку мер. Экспоненциальный множитель соответствует гауссовой мере; объясним смысл остальных множителей произведения. Рассмотрим гауссову меру ν_S на $\mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty$, определенную следующим образом в терминах ее характеристической функции:

$$\int\limits_{\mathbb{C}^\infty\times\mathbb{C}^\infty} e^{i\,\mathrm{Re}\,u\overline{z}_1+i\,\mathrm{Re}\,v\overline{z}_2}d\nu_S(z_1,z_2):=\exp\Bigl\{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}u & v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & S\\ S^* & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u^*\\ v^*\end{pmatrix}\Bigr\}.$$

Рассмотрим отображение $\mathbb{C}^\infty\times\mathbb{C}^\infty\to\mathrm{Herm}_\infty\times\mathrm{Herm}_\infty$, заданное формулой

$$(u,v)\mapsto(\lambda u^*u,\lambda v^*v).$$

Тогда образ меры ν_S при этом отображении имеет характеристическую функцию

$$\det\Bigl[1-i\lambda_k\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & S\\ S^* & 1\end{pmatrix}\Bigr]^{-1}.$$

§2. Доказательство

2.1. Априорные замечания.

Теорема 2. *Пусть полная унитарная группа $\overline{\mathrm{U}}(\infty)$ действует сохраняющими меру преобразованиями*[1] *на лебеговском пространстве M с вероятностной мерой. Тогда это действие продолжается по непрерывности до действия полугруппы $\mathcal{B}(\infty)$ полиморфизмами пространства M. Замыкание группы $\overline{\mathrm{U}}(\infty)$ в $\mathrm{Pol}(M)$ изоморфно $\mathcal{B}(\infty)$.*

Доказательство. Пусть ρ – унитарное представление группы $\overline{\mathrm{U}}(\infty)$ в гильбертовом пространстве H. Замыкание группы $\rho(\overline{\mathrm{U}}(\infty))$ в группе ограниченных операторов в H в слабой операторной топологии – это полугруппа, изоморфная $\mathcal{B}(\infty)$ (это следует из класификации Кириллова–Ольшанского унитарных предствлений группы $\overline{\mathrm{U}}(\infty)$, см. [8, теорема 1.2]).

Мы применяем это высказывание к действию группы $\overline{\mathrm{U}}(\infty)$в $L^2(M)$. Группа $\overline{\mathrm{U}}(\infty)$ действует марковскими операторами, слабые пределы марковских операторов – марковские операторы. Поэтому рассматриваемое действие группы $\overline{\mathrm{U}}(\infty)$ продолжается до действия полугруппы $\mathcal{B}(\infty)$ марковскими операторами. □

Лемма 3. *Для любой $\mathrm{U}(\infty)$-эргодической меры на Herm_∞ действие группы $\mathrm{U}(\infty)$ непрерывно продолжается до действия полной унитарной группы $\overline{\mathrm{U}}(\infty)$.*

---

[1]Такое действие не может быть поточечным; преобразования определены лишь почти всюду, и равенства $g_1(g_2m)=(g_1g_2)m$ верны лишь для почти всех $m\in M$, см. [1].

Доказательство. Согласно [9, следствие 2.14], представление группы $\mathrm{U}(\infty)$ в пространстве $L^2(\mathrm{Herm}_\infty, \mu)$ непрерывно продолжается на группу $\overline{\mathrm{U}}(\infty)$. В силу непрерывности группа $\overline{\mathrm{U}}(\infty)$ действует марковскими операторами $\rho(g)$. Мы имеем $\|\rho(g)\| \leqslant 1$, $\|\rho(g)^{-1}\| \leqslant 1$. Следовательно, $\rho(g)$ – унитарный оператор. Поэтому он соответствует преобразованию, сохраняющему меру. $\square$

2.2. Вычисление. Рассмотрим меру μ с характеристической функцией (2). Пусть $g \in \mathrm{U}(\infty)$, рассмотрим соответствующий полиморфизм π_g пространства Herm_∞. Характеристическая функция полиморфизма π_g равна

$$\begin{aligned} F(\pi_g|A,B)& \\ &= \exp\Bigl\{-\frac{\gamma_1}{2}\operatorname{tr}(A+UBU^{-1})^2 + i\gamma_2(\operatorname{tr}A+\operatorname{tr}UBU^{-1})\Bigr\} \\ &\quad\times\prod_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-i\lambda_k\operatorname{tr}(A+UBU^{-1})}}{\det\bigl[1-i\lambda_k(A+UBU^{-1})\bigr]}. \end{aligned} \tag{4}$$

В силу теоремы 2 для любого оператора $R \in \mathcal{B}(\infty)$ определен полиморфизм π_R пространства $(\mathrm{Herm}_\infty, \mu)$. Если последовательность операторов $R_j \in \mathcal{B}(\infty)$ слабо сходится к R, то мы имеем слабую сходимость соответствующих полиморфизмов, $\pi_{R_j} \to \pi_R$. Она эквивалентна поточечной сходимости характеристических функций. Если нам дан оператор $R \in \mathcal{B}(\infty)$ и последовательность $g_j \in \mathrm{U}(\infty)$, слабо сходящаяся к R, мы можем найти $F(\pi_R|A,B)$ как поточечный предел последовательности $F(\pi_{g_j}|A,B)$.

Пусть S – финитный оператор с нормой $\leqslant 1$, и пусть S представим как $(\alpha+\infty)$-блочная матрица вида

$$S = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда мы можем встроить u как блок в унитарную $(\alpha+\alpha)$-блочную матрицу $\begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix}$ (см., например, [5, теорема VIII.3.2]). Пусть $U = U_m$

– унитарная блочная $(\alpha+m+m+\alpha+\infty)$-матрица вида

$$U_m=\begin{pmatrix} u&0&0&v&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ w&0&0&z&0\\ 0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Очевидно, мы имеем слабую сходимость

$$U_m\to S,$$

и мы хотим отследить сходимость характеристических функций $F(\pi_{U_m}|A,B)$. На самом деле мы покажем, что при любых фиксированных A, B эта последовательность стабилизируется с некоторого места.

Фиксируем A, $B\in\mathrm{Herm}^0_\infty$. Пусть на самом деле A, $B\in\mathrm{Herm}_{\alpha+\beta}$. Пусть m достаточно велико (нам нужно $m\geqslant\beta$). Представим матрицы A, B как блочные матрицы размера $\alpha+\beta+(m-\beta)+\beta+(m-\beta)+\infty$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}&a_{12}&0&\dots&0\\ a_{21}&a_{22}&0&\dots&0\\ 0&0&0&\dots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&0&\dots&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} b_{11}&b_{12}&0&\dots&0\\ b_{21}&b_{22}&0&\dots&0\\ 0&0&0&\dots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\dots\\ 0&0&0&\dots&0\end{pmatrix}.$$

Мы хотим посчитать

$$\det\bigl[1-i\lambda_k(A+U_mBU_m^{-1})\bigr]\qquad\text{и}\qquad\mathrm{tr}(A+U_mBU_m^{-1})^2.$$

Прямое вычисление дает

$$A+U_mBU_m^{-1}=\begin{pmatrix} a_{11}+ub_{11}u^*&a_{12}&0&ub_{12}&ub_{11}w^*&0&0\\ a_{21}&a_{22}&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ b_{21}u^*&0&0&b_{22}&b_{21}w^*&0&0\\ wb_{11}u^*&0&0&wb_{12}&wb_{11}w^*&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Понятно, что мы можем убрать нулевые столбцы и нулевые строки из матриц. Формально,

$$\det\bigl(1-i\lambda_k(A+U_mBU_m^{-1})\bigr)=\det(1-i\lambda_kH),$$

где

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} + ub_{11}u^* & a_{12} & ub_{12} & ub_{11}w^* \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ b_{21}u^* & 0 & b_{22} & b_{21}w^* \\ wb_{11}u^* & 0 & wb_{12} & wb_{11}w^* \end{pmatrix}.$$

Пусть Δ – блочно-диагональная матрица с блоками 1, 1, 1, w. Представим H в виде $H = \Delta Z$ (где выражение для Z понятно). Применим формулу

$$\det(1 - i\lambda_k \Delta Z) = \det(1 - i\lambda_k Z\Delta).$$

Обозначим $H' := Z\Delta$,

$$H' = \begin{pmatrix} a_{11} + ub_{11}u^* & a_{12} & ub_{12} & ub_{11}w^*w \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ b_{21}u^* & 0 & b_{22} & b_{21}w^*w \\ b_{11}u^* & 0 & b_{12} & b_{11}w^*w \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Так как матрица $\begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix}$ унитарна, мы имеем $w^*w = 1 - uu^*$. Подставим это выражение для w^*w в 4-й столбец матрицы (5) и, запомнив результат, продолжим наше вычисление. Обозначим

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$H' = \begin{pmatrix} a_{11} + ub_{11}u^* & a_{12} & ub_{12} & a_{11}u + ub_{11} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{21}u \\ b_{21}u^* & 0 & b_{22} & b_{21} \\ b_{11}u^* & 0 & b_{12} & b_{11} \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$= T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{11}u \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{21}u \\ b_{21}u^* & 0 & b_{22} & b_{21} \\ b_{11}u^* & 0 & b_{12} & b_{11} \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Следовательно,

$$\det(1-i\lambda_k H') = \det\left[1-i\lambda_k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{11}u \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{21}u \\ b_{21}u^* & 0 & b_{22} & b_{21} \\ b_{11}u^* & 0 & b_{12} & b_{11}\end{pmatrix}\right]$$
$$= \det\left[1-i\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}u & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}u & 0 \\ b_{11}u^* & 0 & b_{11} & b_{12} \\ b_{21}u^* & 0 & b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\right] \tag{6}$$
$$= \det\left[1-i\lambda\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & S \\ S^* & 1\end{pmatrix}\right],$$

и мы получаем желаемое выражение.

Далее,

$$\operatorname{tr}(A+U_mBU_m^{-1})^2 = \operatorname{tr} A^2 + \operatorname{tr} B^2 + 2\operatorname{tr} AU_mBU_m^{-1}.$$

Перемножая матрицы, мы видим, что $AU_mBU_m^{-1}$ имеет единственный ненулевой диагональный блок, а именно $a_{11}ub_{11}u^*$. Поэтому

$$\operatorname{tr} AU_mBU_m^{-1} = \operatorname{tr} a_{11}u\, b_{11}u^* = \operatorname{tr} ASBS^*$$

и, следовательно,

$$\operatorname{tr}(A+U_mBU_m^{-1})^2 = \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & S \\ S^* & 1\end{pmatrix}\right]^2.$$

Итак, при $m \geqslant \beta$ значение $F(\pi_{U_m}|A,B)$ дается формулой (3).

Мы видим, что утверждение теоремы выполнено для финитных матриц S. Рассмотрим произвольную матрицу $S \in \mathcal{B}(\infty)$. Обозначим через $S[m]$ ее левый верхний угол размера m. Пусть

$$S_m := \begin{pmatrix} S[m] & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Очевидно, $S_m \to S$ слабо. С другой стороны, мы имеем поточечную сходимость

$$F(\pi_{S_m}|A,B) \to F(\pi_S|A,B)$$

(фактически эта последовательность стабилизируется при любых фиксированных A, B).

Это завершает доказательство теоремы.

Литература

1. E. Glasner, B. Tsirelson, B. Weiss, *The automorphism group of the Gaussian measure cannot act pointwise.* — Israel J. Math. **148** (2005), 305–329.
2. R. E. Howe, C. C. Moore, *Asymptotic properties of unitary representations.* — J. Funct. Anal. **32**, No. 1 (1979), 72–96.
3. U. Krengel, *Ergodic Theorems*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1985.
4. E. Nelson, *The free Markoff field.* — J. Funct. Anal. **12** (1973), 211–227.
5. Ю. А. Неретин, *Категории симметрий и бесконечномерные группы*, УРСС, М., 1998.
6. Yu. A. Neretin, *Spreading maps (polymorphisms), symmetries of Poisson processes, and matching summation.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **292** (2002), 62–91.
7. Yu. A. Neretin, *Symmetries of Gaussian measures and operator colligations.* — J. Funct. Anal. **263**, No. 3 (2012), 782–802.
8. Г. И. Ольшанский, *Унитарные представления бесконечномерных классических групп* $\mathrm{U}(p,\infty)$, $\mathrm{SO}_0(p,\infty)$, $\mathrm{Sp}(p,\infty)$ *и соответствующих групп движений.* — Функц. анализ и его прил. **12**, вып. 3 (1978), 32–44.
9. G. Olshanski, A. Vershik, *Ergodic unitarily invariant measures on the space of infinite Hermitian matrices.* — In: Contemporary Mathematical Physics, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. 175, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, pp. 137–175.
10. А. М. Вершик, *Многозначные отображения с инвариантной мерой (полиморфизмы) и марковские операторы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **72** (1977), 26–61.
11. D. Pickrell, *Mackey analysis of infinite classical motion groups.* — Pacific J. Math. **150**, No. 1 (1991), 139–166.

Neretin Yu. A. Wishart–Pickrell distributions and closures of group actions.

Consider probability distributions on the space of infinite Hermitian matrices $\mathrm{Herm}\,(\infty)$ invariant with respect to the unitary group $U(\infty)$. We describe the closure of $U(\infty)$ in the space of spreading maps (polymorphisms) of $\mathrm{Herm}\,(\infty)$; this closure is a semigroup isomorphic to the semigroup of all contractive operators.

Поступило 6 сентября 2016 г.

University of Vienna,
Vienna, Austria;
ИТЭФ, МГУ, ИППИ РАН,
Москва, Россия
E-mail: neretin@mccme.ru