Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 448, 2016 г.

А. Р. Минабутдинов

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ КРИВЫХ ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ АДИЧЕСКИХ АВТОМОРФИЗМОВ

§1. Введение

Рассмотрим эргодический автоморфизм T, заданный на пространстве X с инвариантной мерой μ. Для функции $g \in L^1(X,\mu)$ представляет интерес исследование поведения ее частичных сумм, позволяющее уточнить эргодическую теорему. Т. де ла Рю, Э. Жанврес и И. Веленик в работе [15] предложили рассмотреть предельные в sup-метрике точки последовательностей случайных мостов. Напомним основное определение. Для суммируемой функции g и точки $x \in X$ рассмотрим последовательность частичных сумм

$$\bigl(S_x^g(j)\bigr)_{j=0}^{\infty}, \quad S_x^g(j) = \sum_{k=0}^{j-1} g\bigl(T^k x\bigr),$$

вдоль (односторонней) траектории точки x. В силу классической эргодической теоремы для п.в. $x \in X$ последовательность $\frac{1}{j}S_x^g(j)$ сходится к среднему значению функции g. Считая функцию g и точку x фиксированными, мы обозначим через $F(j)$, $j \geqslant 0$, линейно интерполированную частичную сумму $S_x^g(j)$. Для заданной последовательности натуральных чисел $(l_n)_{n=1}^{\infty}$ рассмотрим непрерывные на интервале $[0,1]$ функции $\varphi_n(t) = \frac{F(t\cdot l_n(x)) - t\cdot F(l_n)}{R_n}\bigl(\equiv \varphi_{x,l_n}^g(t)\bigr)$, где нормирующий коэффициент R_n канонически выбирается равным максимуму модуля числителя.

Определение 1. Если для выбранных функции g и точки $x \in X$ существует такая последовательность $l_n^g(x) \in \mathbb{N}$, что последовательность непрерывных функций $\varphi_{x,l_n^g(x)}^g$ сходится к (непрерывной) функции φ_x^g в равномерной метрике на $[0,1]$, то функцию $\varphi = \varphi_x^g$ называют *предельной функцией*, ее график – *предельной кривой*, последовательность

Ключевые слова: полиномиальные адические системы, эргодическая теорема, уточнения к эргодической теореме.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 14-01-00373.

"моментов времени" $l_n = l_n^g(x)$ – *стабилизирующей последовательностью*, а последовательность $R_n = R^g_{x,l_n^g(x)}$ – нормирующей последовательностью. *Непрерывным предельным мостом* автоморфизма (X, T) для функции g в точке x называется четверка $\left(x, \left(l_n\right)_{n=1}^{\infty}, \left(R_n\right)_{n=1}^{\infty}, \varphi\right)$.

В этой работе мы будем предполагать, что динамика задана некоторым *адическим автоморфизмом.* Адические автоморфизмы введены в эргодическую теорию А. М. Вершиком в работе [1], их рассмотрение не является ограничивающим предположением в силу следующей важной теоремы.

Теорема (Вершик [2]). *Всякий эргодический автоморфизм, заданный на пространстве Лебега–Рохлина, изоморфен некоторому адическому автоморфизму. Более того, изоморфизм может быть построен таким образом, что всякая счетная плотная инвариантная подалгебра измеримых множеств перейдет в алгебру цилиндрических множеств.*

В работах [2, 3, 5] отмечалась важность различных подходов к исследованию комбинаторики марковских компактов (множеств путей на диаграммах Браттели адического автоморфизма). В связи с этим представляется важным построить класс адических автоморфизмов и класс функций, непрерывные предельные мосты для которых почти всюду существуют, описать соответствующие предельные кривые и соотношение между ростом стабилизирующей и нормирующей последовательностей.

В данной работе мы ограничимся проверкой существования непрерывных предельных мостов для класса полиномиальных адических автоморфизмов, определенных в работе [11] (и, в частном случае, в [18]), заданных на самоподобных диаграммах Браттели, и для цилиндрических функций g. Наш подход аналогичен тому, который использовался в [15] для автоморфизма Паскаля. Для общего случая произвольного эргодического автоморфизма и произвольной суммируемой функции g мы приводим необходимое условие существования предельной кривой, заключающееся в ограниченности последовательности нормирующих коэффициентов R_n, и показываем, что оно эквивалентно тому, что функция g когомологична константе.

§2. Индивидуальные непрерывные мосты и когомологичные константе функции

В этой части показано, что необходимым условием существования предельной кривой (непрерывного индивидуального предельного моста) является неограниченность последовательности нормирующих коэффициентов. Доказано, что ограниченность нормирующих коэффициентов эквивалентна тому, что функция когомологична константе. С помощью этого условия показано, что в случае классического одометра рассмотрение цилиндрических функций не приводит к предельным кривым.

2.1. Основные определения и обозначения. Диаграмму Браттели $B(\mathcal{V},\mathcal{E})$, заданную множеством вершин $\mathcal{V}$ и множеством ребер $\mathcal{E}$, мы обозначаем через B. Будем считать, что на уровне n находится $L(n)+1$ вершин, занумерованных индексами k, $0 \leqslant k \leqslant L(n)$. Пространство путей (последовательностей ребер) на диаграмме B обозначим через $X = X(\mathcal{V},\mathcal{E})$. Согласно определению из работы [1], мы предполагаем, что на ребрах, входящих в вершину (n,k), определен линейный порядок $\preceq_{n,k}$. Линейные порядки $\preceq_{n,k}$ индуцируют (ко)лексикографический порядок $\preceq$ на классах кофинитных путей (т.е. путей, лежащих в одном классе хвостового разбиения). Множество максимальных (минимальных) путей обозначим через $X_{\max}$ (соответственно $X_{\min}$).

Определение 2. Адический автоморфизм T на пространстве $X \setminus \left(X_{\max} \cup X_{\min}\right)$ задан переходом от точки этого пространства (пути в графе) к следующему пути относительно порядка $\preceq$.

Для пути ω обозначим через $k_n(\omega)$ номер вершины уровня n, через которую он проходит. Для конечного пути $c = (c_1,\dots,c_n)$ положим $k(c)$ равным $k_n(c)$. Цилиндрическое множество ранга n вида $C = [c_1c_2\dots c_n] = \{\omega \in X | \omega_1 = c_1, \omega_2 = c_2, \dots, \omega_n = c_n\}$ определяется *конечным* путем $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, ведущим из начальной вершины $(0,0)$ в вершину $(n,k) = (n,k(c))$. Число таких путей (размерность вершины) (n,k) мы будем обозначать через $\dim(n,k)$ или, короче, $H_{n,k}$. Множеству $\pi_{n,k}$ конечных путей $c = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$, где $k(c) = n$, упорядоченных в лексикографическом порядке, соответствует башня $\tau_{n,k}$, составленная из соответствующих цилиндров, которые удобно обозначать через $\tau_{n,k}(j)$, $1 \leqslant j \leqslant \dim(n,k)$. Номера этажей башни –

это номера путей в лексикографическом порядке. Номер пути $\omega \in \pi_{n,k}$ обозначим через $\mathrm{Num}(\omega)$. Очевидно, что номер $\mathrm{Num}(\omega)$ пути $\omega \in \pi_{n,k}$ лежит в пределах от 1 до $\dim(n,k)$. Множество башен $\{\tau_{n,k}\}$ фиксированного уровня n определяет аппроксимацию автоморфизма T, см. [3].

Зафиксируем вершину (n,k) диаграммы Браттели B. Можно рассматривать заданную вершину (n,k) как исходную в новой диаграмме $B'_{n,k} = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$. Множества вершин $\mathcal{V}'$, ребер $\mathcal{E}'$ и путей $X(B'_{n,k})$ определяются естественным образом. Как и выше, частичный порядок $\preceq'$ на путях диаграммы B' индуцируется с линейных порядков $\preceq_{n',k'}$, $n' > n$, на множествах входящих ребер.

Определение 3. Диаграмма Браттели B называется *самоподобной*, если диаграммы B и $B'_{n,k}$ изоморфны для $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant L(n)$.

Пусть $\mathscr{F}$ – множество всех функций $f : X \to \mathbb{R}$. Пространство цилиндрических функций ранга N (т.е. функций, постоянных на элементах разбиения на цилиндры ранга N) обозначим через $\mathscr{F}_N$.

Линейно-интерполированные частичные суммы $S^g_{x\in\tau^k_n(1)}$ цилиндрической функции g из пространства $\mathscr{F}_N$, $N < n$, будем кратко обозначать через $F^g_{n,k}$. Пусть на этаже N самоподобной диаграммы Браттели находится $L+1$ вершин. Пусть $\omega \in \pi_{n,k}$, $0 \leqslant k \leqslant L(n)$, – конечный путь, такой, что его начальный отрезок $\omega' = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N)$ является максимальным, т.е. $\mathrm{Num}(\omega') = \dim(N, k(\omega'))$, а $\partial^{N,l}_{n,k}(\omega)$ – число путей из вершины (N,l) в вершину (n,k), не превосходящих пути $(\omega_{N+1}, \omega_{N+2}, \ldots, \omega_n) \in X(B'_{N,l})$. Легко показать, что для частичной суммы $F^g_{n,k}$ в точке $j = \mathrm{Num}(\omega)$ справедливо следующее выражение:

$$F^g_{n,k}(j) = \sum_{l=0}^{L} h^g_{N,l} \partial^{N,l}_{n,k}(\omega), \tag{1}$$

где коэффициенты $h^g_{N,l}$ равны суммам $F^g_{N,l}(H_{N,l})$, $0 \leqslant l \leqslant L(n)$.

2.2. Необходимое условие существования предельных функций. Покажем, что необходимым условием существования предельной кривой является неограниченный рост нормирующих коэффициентов.

Пусть (X, T, μ) – эргодический автоморфизм. Пусть для суммируемой функции g и точки $x \in X$ последовательность индивидуальных

мостов φ^g_{x,l_n} и нормирующих коэффициентов R^g_{x,l_n} заданы соотношением

$$\varphi^g_{x,l_n(x)}(t) = \frac{S^g_x([t \cdot l_n(x)]) - t \cdot S^g_x(l_n(x))}{R^g_{x,l_n(x)}}.$$

Не умаляя общности, будем считать, что предел $g^*(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} S^g_x$ в точке x существует. Следующее утверждение обобщает лемму 2.1 работы [15] на случай произвольной суммируемой функции.

Теорема 1. *Если непрерывные предельные кривые $\varphi_x = \lim_n \varphi^g_{x,l_n}$, заданные согласно определению 1, существуют для п.в. x, то соответствующие нормирующие коэффициенты R^g_{x,l_n} неограничены по n.*

Доказательство. Пусть, напротив, $|R^g_{x,l_n}| \leqslant K$. Положим для краткости $S = S^g_x$, $\varphi_n = \varphi^g_{x,l_n}$, $R_n = R^g_{x,l_n}$ и $\varphi = \varphi_x$. Так как $\varphi \neq 0$, найдется число $j \in \mathbb{N}$, для которого $\frac{1}{j} S(j) \neq g^*$. Тогда $\liminf_n \left|\varphi_n(\frac{j}{l_n})\right| = \liminf_n \frac{1}{R_n}\left|S(j) - \frac{jS(l_n)}{l_n}\right| \geqslant \frac{1}{K}|S(j) - jg^*| = \frac{j}{K}\left|\frac{1}{j}S(i) - g^*\right| > 0$, что противоречит непрерывности функции φ в нуле. □

Определение 4. Функция $g \in L^\infty(X, \mu)$, удовлетворяющая μ-п.в. тождеству $g = c + h \circ T - h$ для некоторой постоянной c и функции $h \in L^\infty(X, \mu)$, называется *когомологичной константе.*

Теорема 2. *Последовательность нормирующих коэффициентов R^g_{x,l_n} п.в. ограничена тогда и только тогда, когда функция g когомологична константе.*

Доказательство. Суммы $\sum\limits_{j=0}^{n-1} (g - g^*) \circ T^j$ когомологичной константе функции ограничены, следовательно, μ-п.в. ограничены нормирующие коэффициенты R^g_{x,l_n}.

В доказательстве обратного утверждения используется результат А. Г. Качуровского из работы [7]. Пусть нормирующие коэффициенты R^g_{x,l_n} п.в. ограничены. Тогда для п.в. $x \in X$ для всякого $j \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $|S^g_x(j) - \frac{j}{l_n} S^g_x(l_n)| \leqslant C$. Переходя к пределу по n, получаем, что $|\sum\limits_{i=1}^{j} f \circ T^i(x)| \leqslant C$, где $f = g - g^*$. Согласно теореме 19 работы [7], неравенство $|S^f_x| \leqslant C$ эквивалентно существованию функции $h \in L^\infty$, такой, что $f = h \circ T - h$. Следовательно, $g = h \circ T - h + g^*$. □

Замечание. В силу эргодичности когомологичность константе функции g следует уже из ограниченности нормирующей последовательности на множестве положительной меры.

В силу теорем 1 и 2 во всех теоремах существования предельной кривой предполагается некогомологичность константе рассматриваемой функции.

Определение 5. Пусть диаграмма Браттели B имеет на каждом уровне единственную вершину, а порядок входящих ребер возрастает слева направо. Будем также считать, что автоморфизм отображает (единственный) максимальный путь в (единственный) минимальный. Такой адический автоморфизм называется *классическим одометром* или *одометром Вершика.* Классический одометр называется *стационарным*, если число ребер, соединяющих вершины соседних уровней, постоянно.

Рис. 1. Пример диаграммы Браттели классического одометра.

Теорема 3. *Пусть (X, T, μ) – классический одометр. Тогда всякая цилиндрическая функция $g \in \mathscr{F}_N$ когомологична константе. Следовательно, предельной кривой для такой функции не существует.*

Доказательство. На каждом уровне $n > N$ диаграммы Браттели находится единственная вершина $(n, 0)$, поэтому сумма $F^g_{n,0}(i)$, заданная выражением (1), определяется единственным коэффициентом

$h^g_{N,0}$, а значит, пропорциональна размерности H_N вершины $(N,0)$. Можно вычесть из функции g такую константу C, чтобы выполнялось равенство $h^{g-C}_{N,0} = 0$. Это условие эквивалентно тому, что функция $g-C$ принадлежит линейному пространству, натянутому на функции $f_j - f_j \circ T$, $1 \leqslant j \leqslant H_N$, где f_j – индикатор j-го этажа башни $\tau_{N,0}$. $\square$

§3. Существование предельных кривых для полиномиальных адических систем

В этой части доказано существование непрерывных предельных мостов для цилиндрических некогомологичных константе функций в полиномиальной адической системе.

3.1. Полиномиальные адические системы. Рассмотрим полином $p(x) = a_0 + a_1 x \cdots + a_d x^d$ степени $d \in \mathbb{N}$ с натуральными коэффициентами $\{a_i\}_{i=0}^d$. Диаграмму Браттели $B_p = (\mathcal{V}, \mathcal{E})_p$, заданную полиномом $p(x)$, определим следующим образом:

(1) число вершин растет линейно: $|\mathcal{V}_0| = 1$, и $|\mathcal{V}_n| = |\mathcal{V}_{n-1}| + d = nd + 1$, $n \in \mathbb{N}$;
(2) при $0 \leqslant j \leqslant d$ вершины (n,k) и $(n+1, k+j)$ соединены a_j ребрами.

Полином $p(x)$ называется *производящим полиномом* диаграммы Браттели B_p, см. [11].

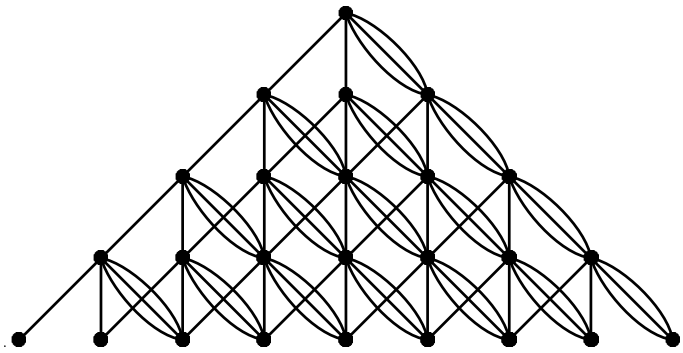

Рис. 2. Диаграмма Браттели, заданная производящим полиномом $1 + x + 3x^2$.

Так как число исходящих из каждой вершины ребер равно $p(1) = a_0 + a_1 + \cdots + a_d$, для индексации ребер естественно использовать алфавит $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, a_0 + a_1 + \cdots + a_d - 1\}$. Как и в работе [11] С. Бэйли, мы будем использовать следующий способ нумерации ребер: ребра, соединяющие вершины $(0,0)$ и $(1,d)$, занумерованы (слева направо) индексами от 0 до $a_d - 1$; ребра, соединяющие вершины $(0,0)$ и $(1,d-1)$, занумерованы индексами от a_d до $a_d + a_{d-1} - 1$; и так далее. Ребра, соединяющие вершины $(0,0)$ и $(1,0)$, занумерованы индексами от $a_0 + a_1 + \cdots + a_{d-1}$ до $a_0 + a_1 + \cdots + a_d$. Таким же образом нумеруем ребра, исходящие из произвольной вершины (n,k). Пространство путей в графе Браттели обозначим через X_p. Пути в графе однозначно определяются данной индексацией и могут рассматриваться как бесконечные односторонние последовательности в $A^{\mathbb{N}}$.

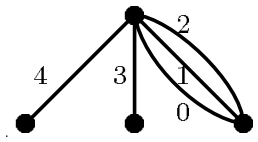

Рис. 3. Индексация ребер на диаграмме, заданной производящим полиномом $1 + x + 3x^2$.

Соответствующий адический автоморфизм (см. определение 2 выше) обозначим через T_p.

Диаграмма Браттели B_p является самоподобной (инвариантна относительно сдвигов корневой вершины в любую из нижележащих вершин, см. определение 3 выше).

Замечание. Можно считать, что всякая самоподобная диаграмма Браттели является либо диаграммой некоторого классического стационарного одометра, либо диаграммой некоторой полиномиальной адической системы.

Размерность вершины (n,k) диаграммы Браттели B_p равна $C_p(n,k)$, где $C_p(n,k)$ – коэффициент при k-й степени многочлена $\big(p(x)\big)^n$, называемый *обобщенным биномиальным коэффициентом.* Коэффициенты $C_p(n,k)$ при $n > 1$ можно вычислить по рекуррентной формуле $C_p(n,k) = \sum\limits_{j=0}^{d} a_j C_d(n-1, k-j)$.

В работах К. Мела и С. Бейли [18] и [11] доказано, что невырожденные (т.е. с носителем, равным X_p) инвариантные эргодические меры системы (X_p, T_p) образуют однопараметрическое семейство бернуллиевских мер.

Теорема 4 (Бейли [11], Мела [18]). 1. *Пусть* $q \in (0, \frac{1}{a_0})$ *– параметр, а* t_q *– единственное на* $[0,1]$ *решение уравнения*

$$a_0 q^d + a_1 q^{d-1} t + \dots + a_d t^d - q^{d-1} = 0;$$

тогда множество инвариантных невырожденных эргодических мер автоморфизма T_p *является однопараметрическим семейством* μ_q, $q \in (0, \frac{1}{a_0})$, *бернуллиевских мер вида*

$$\prod_0^\infty \Big(\underbrace{q, \dots, q}_{a_0}, \underbrace{t_q, \dots, t_q}_{a_1}, \underbrace{\frac{t_q^2}{q}, \dots, \frac{t_q^2}{q}}_{a_2}, \dots, \underbrace{\frac{t_q^d}{q^{d-1}}, \dots, \frac{t_q^d}{q^{d-1}}}_{a_d} \Big).$$

2. *Вырожденными мерами являются только бернуллиевские меры*

$$\prod_0^\infty \Big(\underbrace{\frac{1}{a_0}, \dots, \frac{1}{a_0}}_{a_0}, 0, \dots, 0 \Big) \quad \text{и} \quad \prod_0^\infty \Big(0, \dots, 0, \underbrace{\frac{1}{a_d}, \dots, \frac{1}{a_d}}_{a_d}, \Big).$$

Определение 6. *Полиномиальной эргодической адической системой, заданной полиномом* $p(x)$, называется тройка (X_p, T_p, μ_q), $q \in (0, \frac{1}{a_0})$.

В частном случае $p(x) = 1 + x$ система (X_p, T_p, μ_q), $q \in (0,1)$, является замечательным *автоморфизмом Паскаля.* Он был определен[1] А. М. Вершиком в [2] и изучался в ряде работ; см., например, [19, 14, 4, 6], более полный список приведен в последних двух работах. Пространство X_p есть бесконечномерный куб $I = \{0,1\}^\infty$, меры μ_q являются классическими мерами Бернулли $\prod_1^\infty (q, 1-q)$, а автоморфизм $T_p = P$ задан одним соотношением

$$x \mapsto Px, \quad P(0^{m-l} 1^l \mathbf{10} \dots) = 1^l 0^{m-l} \mathbf{01} \dots, \quad l \geqslant 0, \tag{2}$$

где запись подразумевает, что координаты x_i с номерами $i \geqslant m+3$ остаются неизменными.

Кратко перечислим основные известные свойства систем из класса $(\mathcal{S}_\mathcal{L})_p$.

[1]Ранее этот автоморфизм (без упоминания данного термина и связи с графом Паскаля) использован в [12] и [16].

(1) Системы являются слабо бернуллиевскими (доказательство аналогично доказательству для автоморфизма Паскаля из работы [14] и содержится в работах [18] и [11]).
(2) Функция сложности полиномиальна (для автоморфизма Паскаля, более того, точно известен первый член асимптотики, который, как было показано в работе [19], равен $\frac{n^3}{6}$).
(3) Для системы (X_p, T_p, μ_q), заданной полиномом $p(x) = a_0 + a_1 x$ с $a_0 a_1 > 1$, можно построить собственные функции, а значит, спектр не является чисто непрерывным.

В работе [15] изучались предельные кривые для цилиндрических функций в случае автоморфизма Паскаля (I, P, μ_q), $q \in (0,1)$.

Теорема 5 ([15, теорема 2.4]). *Пусть (I, P, μ_q), $q \in (0,1)$, – автоморфизм Паскаля, а g – цилиндрическая функция, принадлежащая пространству $\mathscr{F}_N$. Тогда для μ_q-п.в. x предельная функция $\varphi_x^g \in C[0,1]$ существует тогда и только тогда, когда функция g не когомологична константе.*

Представляет интерес вид предельных кривых.

Теорема 6 ([10, теорема 1]). *Пусть P – автоморфизм Паскаля пространства с мерой $(I, \mathcal{B}, \mu_q)$, пусть $N \in \mathbb{N}$ и $g \in \mathscr{F}_N$ – некогомологичная константе цилиндрическая функция. Тогда для μ_q-п.в. x стабилизирующая последовательность $l_n(x)$ может быть выбрана так, что предельной функцией будет функция $\alpha_{g,x}\mathcal{T}_q^1$, где $\alpha_{g,x} \in \{-1, 1\}$, а функция $\mathcal{T}_q^1$ задана равенством*

$$\mathcal{T}_q^1(x) = \frac{\partial F_{\mu_q}}{\partial q} \circ F_{\mu_q}^{-1}(x), \quad x \in [0,1];$$

здесь функция F_{μ_q} является функцией распределения[2] *меры F_{μ_q}.*

График функции $\frac{1}{2}\mathcal{T}_{1/2}^1$ является знаменитой кривой Такаги [21].

В частном случае функций g, коррелирующих с индикаторными функциями i-й координаты $\mathbb{1}_{\{x_i=0\}}$, $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X$, теорема 6 была доказана в работе [15].

[2]Точнее, функция F_{μ_q} есть функция распределения меры $\tilde{\mu}_q$, являющейся образом меры μ_q под действием канонического отображения $\phi : I \to [0,1]$, $\phi(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}$.

3.2. Комбинаторика конечных путей полиномиальных адических систем. В этой части мы получим вариант формулы (1) для случая полиномиальной адической системы.

Для конечного пути $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ положим $k^1(\omega)$ равным $nd - k(\omega)$. Пользуясь самоподобием диаграммы B_p, по индукции можно найти явное выражение для номера $\mathrm{Num}(\omega)$ пути $\omega \in \pi_{n,k}$.

Предложение 1. *Номер* $\mathrm{Num}(\omega)$ *конечного пути* $\omega = (\omega_j)_{j=1}^n$ *в лексикографическом порядке на множестве* $\pi_{n,k(\omega)}$ *задается выражением*

$$\mathrm{Num}(\omega) = \sum_{j=2}^{r} \sum_{i=0}^{\omega_{a_j}-1} C_P(a_j - 1; k^1(\omega) - k^1(i) - m_j) + \mathrm{Num}(\omega_1), \qquad (3)$$

где $m_j = \sum\limits_{t=j}^{r-1} k^1(\omega_{a_t})$, $2 \leqslant j \leqslant r-1$, $m_r = 0$, *а полином* $P(x)$ *задан равенством* $P(x) = x^d p(x^{-1})$.

Замечание. Если начало $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$ пути ω является максимальным путем, ведущим в некоторую вершину (N, l) уровня N, то выражение (3) можно упростить, записав его следующим образом:

$$\mathrm{Num}(\omega) = \sum_{j=N+1}^{r} \sum_{i=0}^{\omega_{a_j}-1} C_P(a_j - 1; k^1(\omega) - k^1(i) - m_j) + C_P(a_N; k^1(\omega) - m_l). \qquad (4)$$

Для заданных натуральных чисел N и l, где $0 \leqslant l \leqslant Nd$, на конечном пути $\omega \in \pi_{n,k}$ определим функцию $\partial_{k^1}^{N,l}(\cdot)$, $k^1 = nd - k$, следующим равенством:

$$\partial_{k^1}^{N,l}\omega = \sum_{j=N+1}^{r} \sum_{i=0}^{\omega_{a_j}-1} C_P(a_j - 1 - N; k^1 - k^1(i) - m_j - l), \qquad (5)$$

где все натуральные числа $a_j, k^1(i), m_j$ определены так же, как в формуле (4). Параметры N и l отвечают за перенос корневой вершины $(0,0)$ в вершину (N, l) в соответствии с выражением (1). Таким образом, функция $\partial_{k^1}^{N,l}\omega$, $k^1 = k^1(\omega)$, задает число путей из вершины (N, l) в вершину (n, k), $k = nd - k^1$, не превосходящих пути $(\omega_{N+1}, \dots, \omega_n)$.

Пусть $K_{M,n,k}$, $1 \leqslant M \leqslant n$, – подмножество целочисленного интервала $[1, H_{n,k}]$, состоящее из номеров таких путей $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \pi_{n,k}$,

что путь $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M)$, составленный из первых M координат пути ω, является максимальным путем, ведущим в некоторую вершину (M, l) уровня M.

Для функции $g \in \mathscr{F}_N$ определим семейство (индексированное натуральными числами M, где $N \leqslant M \leqslant n$) функций $\tilde{F}^{g,M}_{n,k}$ на подмножестве $K_{M,n,k}$ целочисленного интервала $[1, H_{n,k}]$ (интервала номеров путей из множества $\pi_{n,k}$) следующим равенством:

$$\tilde{F}^{g,M}_{n,k}(j) = \sum_{l=0}^{Nd} h^g_{M,l} \partial^{M,l}_{nd-k}\, \omega, \tag{6}$$

где ω есть j-й путь, $j \in K_{M,n,k}$, в наборе $\pi_{n,k}$. На множестве $[1, H_{n,k}] \setminus K_{M,n,k}$ доопределим функцию $\tilde{F}^{g,M}_{n,k}$ с помощью линейной интерполяции. Для натуральных аргументов $j \in K_{M,n,k}$ в силу представления (1) выполнено точное равенство $\tilde{F}^{g,M}_{n,k}(j) = F^g_{n,k}(j)$. Нестрого говоря, при увеличении параметра M, большего N, функции $\tilde{F}^{g,M}_{n,k}$ становятся все "более грубой" кусочно-линейной аппроксимацией функции $F^g_{n,k}$ с узлами в точках из множества $K_{M,n,k}$.

Лемма 1. *При $1 \leqslant j \leqslant H_{n,k}$ верна оценка $|\tilde{F}^{g,N}_{n,k}(j) - F^g_{n,k}(j)| \leqslant C$ для некоторой константы C, зависящей только от функции g.*

Замечание. В случае, если функция g является тождественной единицей и $\mathrm{Num}(\omega) = \dim(n,k) \equiv C_P(n, k^1(\omega))$, формула (6) (как и более общая формула (1)) сводится к тождеству

$$C_P(n,k) = \sum_{l=0}^{N} C_P(N,l) C_P(n-N, k-l),$$

которое является обобщением тождества Вандермонда.

3.3. Обобщенная r-адическая система счисления на интервале $[0,1]$. Пусть $\omega \in X_p$ – бесконечный путь, параметр $q \in (0, 1/a_0)$ и число t_q заданы как в теореме 4, а $r = p(1)$ – мощность алфавита. Для пути $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots) \in X$ через $\bar{s}_n = (s^0_n, \dots, s^{r-1}_n)^T$ обозначим r-мерный вектор с j-й компонентой, $0 \leqslant j \leqslant r-1$, равной количеству букв j среди $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$. Через $\bar{a}_i$, $0 \leqslant i \leqslant r-1$, обозначим r-мерный вектор $(\underbrace{0,0,\dots,0}_{\sum_{j=0}^{i-1} a_j}, \underbrace{1,1,\dots,1}_{a_i}, \underbrace{0,0,\dots,0}_{\sum_{j=i+1}^{d} a_j})$, а через e_i, $0 \leqslant i \leqslant r-1$, обозначим r-мерный стандартный орт. Через $u \cdot v$

обозначим скалярное произведение векторов. Зададим отображение $\theta_q : X \to [0,1]$ следующим равенством:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} I_q(\omega_j) q^j \left(\frac{t_q}{q}\right)^{\bar{a}_1 \cdot \bar{s}_j + 2\bar{a}_2 \cdot \bar{s}_j + \dots + d\,\bar{a}_d \cdot \bar{s}_j}, \tag{7}$$

где

$$I_q(w) = a_0 \frac{q^{h+1}}{t_q^{h+1}} + a_1 \frac{t_q q^h}{t_q^{h+1}} + \dots + a_h \frac{q}{t_q} + s$$

при $w = \sum\limits_{i=0}^{h} a_i + s$, $0 \leqslant s < a_{h+1}, 0 \leqslant h < d$.

Обозначим через X_0 объединение $X_{\max} \cup X_{\min}$ множеств максимальных и минимальных путей. Функция $\theta_{1/r}$ задает каноническую биекцию $\phi = \theta_{1/r} : X \setminus X_0 \to [0,1] \setminus G$, где $G = \phi(X_0)$, переводящую путь $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots) \in X$ в точку интервала $[0,1]$. Отображение ϕ переносит меру μ_q, $q \in (0,1)$, заданную на пространстве X, в меру $\tilde{\mu}_q$ на $[0,1]$, а семейство башен $\{\tau_{n,k}\}_{k=0}^{nd}$ переводит в набор $\{\tilde{\tau}_{n,k}\}_{k=0}^{nd}$ семейств дизъюнктных интервалов. Это позволяет задать (изоморфную) реализацию $\tilde{T}_p$ полиномиального автоморфизма T_p на множестве $[0,1] \setminus G$. Отметим, что интервалы, составляющие башни $\tilde{\tau}_{n,k}$, кодируются конечными путями из множеств $\pi_{n,k}$. Как показано А. М. Вершиком, каноническое представление автоморфизма на подмножестве полной меры интервала $[0,1]$ может быть получено для любого адического автоморфизма (хотя возможность получения явного регулярного выражения, аналогичного выражению (7), является, конечно, следствием самоподобия диаграммы Браттели полиномиальной системы). В англоязычной литературе такое представление автоморфизма часто называют конструкцией "*cutting and stacking*".

Обратно, всякую точку $x \in [0,1]$ можно представить в виде (7), который мы назовем обобщенной q-r-адической записью, заданной полиномом $p(x)$. (В частном случае $r = 2$ и $q = 1/2$ оно является обычным диадическим представлением числа на отрезке $[0,1]$.) Обозначим через G_q^m множество рациональных чисел ранга m в такой записи, т.е. чисел, имеющих представление вида

$$x = \sum_{j=1}^{m} I(\omega_j) \prod_{i=0}^{r-1} p_i^{s_j^i}$$

для некоторого $m \in \mathbb{N}$, а через G_q – множество всех q-r-рациональных чисел.

Замечание. Множество G_q можно получить и несколько иным способом – из множества рациональных чисел $G_{1/r}$ для симметричного случая $1/r$. Пусть $F_{\tilde{\mu}_q}$ – функция распределения меры $\tilde{\mu}_q$ на интервале $[0,1]$. Тогда $G_q = \{y | \, y = F_{\tilde{\mu}_q}(x), x \in G_{1/r}\}$.

При фиксированном $l \in \mathbb{N}$, пользуясь эргодической теоремой, несложно показать, что точки r^l-элементного множества K_{n-l,n,k_n} после нормировки делением на размерность $H_{n,k_n} = C_p(n,k_n)$ сходятся при $n \to \infty$ к соответствующим точкам подмножества G_q^l, состоящего из q-r-рациональных чисел ранга l интервала $[0,1]$, заданных полиномом $p(x)$.

3.4. Теорема существования непрерывных предельных кривых для полиномиальных систем. В этой части мы обобщим теорему 2.4 работы [15] на случай некогомологичных константе функций g в полиномиальной адической системе (X_p, T_p).

Докажем сначала комбинаторную версию рассматриваемого утверждения. Пусть $x \in X$ – бесконечный путь в диаграмме Браттели X_p, а $(n, k_n(x))$ – последовательность вершин, выбираемая согласно пути x. Мы записываем последовательность $(n, k_n(x))$ просто как (n, k_n), или даже (n,k). Напомним, что размерности вершин $\dim(n,k) = C_p(n,k)$ мы обозначаем через $H_{n,k}$. Функция $\varphi^g_{n,k} = \varphi^g_{x \in \tau_{n,k}(1), H_{n,k}}$ на интервале $[0,1]$ задана равенством

$$\varphi^g_{n,k}(t) = \frac{F^g_{n,k}(tH_{n,k}) - tF^g_{n,k}(H_{n,k})}{R^g_{n,k}}.$$

Для заданной на интервале $[1, H_{n,k}]$ функции F обозначим через $\psi_{F,n,k}$ функцию на интервале $[0,1]$, определенную равенством

$$\psi_F(t) = \frac{F(tH_{n,k}) - tF(H_{n,k})}{R_{n,k}},$$

где нормирующий коэффициент $R_{n,k}$ канонически выбран равным максимуму модуля числителя. Справедливо тождество $\psi_{n,k,F^g_{n,k}} = \varphi^g_{n,k}$.

Пусть некогомологичная константе цилиндрическая функция g принадлежит пространству $\mathscr{F}_N$. В силу теоремы 2 можно считать, что

последовательность $\left(R^g_{n,k_n}\right)_{n\geqslant 1}$ монотонно возрастает, откуда по лемме 1 имеет место сходимость

$$\left|\left|\psi_{F^g_{n,k}} - \psi_{F^{g,N}_{n,k}}\right|\right|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(Это означает, что можно забыть о различиях между функциями $F^g_{n,k}$ и $F^{g,N}_{n,k}$ и считать, что частичные суммы заданы функцией $F^{g,N}_{n,k}$.)

Мы хотим показать, что найдутся такие подпоследовательность $(n_j)_{j\geqslant 1}$ и непрерывная функция $\varphi(t), t\in[0,1]$, что

$$\lim_{j\to\infty}\left|\left|\psi_{F^{g,N}_{n_j,k_{n_j}}} - \varphi\right|\right|_\infty = 0.$$

Следуя работе [15], для этого рассмотрим промежуточный объект: семейство полигональных функций $\psi^M_n = \psi_{F^{g,n-M+N}_{n,k}}$, $N+1\leqslant M\leqslant n$. График каждой из функций ψ^M_n может быть задан r^M-мерным массивом вида $(x^M_i(n), y^M_i(n))^{r^M}_{i=1}$, причем, в силу результатов части 3.3, набор $(x^M_i(n))^{r^M}_{i=1}$ поэлементно сходится к набору G^M_q, состоящему из q-r-рациональных чисел ранга M, заданных полиномом $p(x)$.

Для натуральных чисел l, где $N+1\leqslant l<M<n$, функции $F^{g,n-M}_{n,k}$ и $F^{g,n-l}_{n,k}$ совпадают в точках множества K_{n-l,n,k_n}, поэтому функции ψ^M_n и ψ^l_n совпадают в точках $(x^l_i(n))^{r^l}_{i=1}$. Более того, предложение 2 позволяет получить оценку

$$\left|\left|\psi^M_{n_j} - \psi^l_{n_j}\right|\right|_\infty \leqslant C_1 e^{-C_2(M-l)}, \quad C_1, C_2 > 0.$$

Для фиксированного M выберем подпоследовательность (n_j) и непрерывную полигональную кривую φ^M, такую, что функция $\psi^M_{n_j}$ сходится к функции φ^M в sup-метрике на $[0,1]$ (это возможно в силу компактности по n множеств $(x^M_i(n), y^M_i(n))^{r^M}_{i=1}\subset\mathbb{R}^{2r^M}$). Стандартная диагональная процедура позволяет выбрать подпоследовательность (которую мы снова обозначим через $(n_j)_j$) так, чтобы имела место сходимость для всех M,

$$\lim_{M\to\infty}\limsup_{j\to\infty}\left|\left|\psi^M_{n_j} - \varphi\right|\right|_\infty = 0,$$

к некоторой непрерывной на интервале $[0,1]$ функции φ. Функции φ^M являются полигональными аппроксимациями функции φ.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть* (X, T, μ_q), $q \in (0, \frac{1}{a_0})$, *– система из класса* $(\mathcal{S}_{\mathcal{L}})_p$, *а* g *– цилиндрическая некогомологичная константе функция, принадлежащая пространству* $\mathscr{F}_N$. *Тогда для* μ_q*-п.в.* x *из последовательности функций* $(\varphi^g_{n,k_n(x)})_{n\geqslant 1}$ *можно выбрать сходящуюся в* sup*-метрике на* $[0,1]$ *подпоследовательность* $(\varphi^g_{n_j,k_{n_j}(x)})_{j\geqslant 1}$.

В силу того, что предельная кривая φ является пределом по j полигональных кривых $\psi^M_{n_j}, M \geqslant 1$, ее вид может быть установлен явно, если найти следующие пределы: $\varphi(t) = \lim\limits_{j\to\infty} \psi^M_{n_j}\big(\frac{\mathrm{Num}(\omega)}{H_{n_j,k_{n_j}}}\big)$, где $t \in G^M_q$, причем $\lim\limits_{j\to\infty} \frac{\mathrm{Num}(\omega)}{H_{n_j,k_{n_j}}} = t$, где $\mathrm{Num}(\omega) \in K_{n_j-M,n_j,k_{n_j}}$.

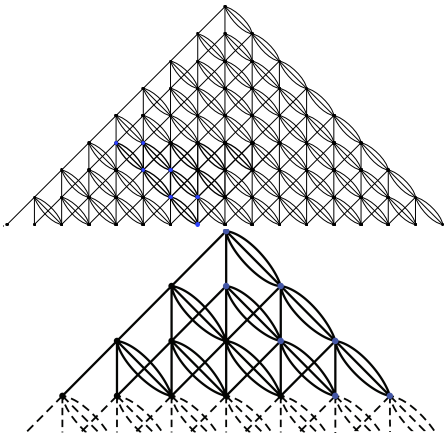

Рис. 4. Диаграмма Браттели входящих вершин.

Стохастический вариант теоремы 7 следует из того факта, что для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать подпоследовательность $n_j(x)$, такую, что номер $\mathrm{Num}(w^j)$, $w^j = (x_1, \dots x_{n_j})$, удовлетворяет условию $\frac{\mathrm{Num}(w^j)}{H_{n_j,k_{n_j}}} < \varepsilon$. Формально справедлив даже более сильный факт, являющийся следствием теоремы о возвратности симметричного одномерного случайного блуждания. Он использовался в работах [18, 11] при доказательстве слабой бернуллиевости автоморфизма из класса $(\mathcal{S}_{\mathcal{L}})_p$.

Лемма 2. *Для всякого $\varepsilon > 0$ и для $(\mu_q \times \mu_q)$-п.в. пары путей $(x, y) \in X \times X$ найдется последовательность n_j, такая, что $k_{n_j}(x) = k_{n_j}(y)$ и номера $\mathrm{Num}(\omega_x)$ и $\mathrm{Num}(\omega_y)$ путей $\omega_x = (x_1, x_2, \dots x_{n_j})$ и $\omega_y = (y_1, y_2, \dots, y_{n_j})$ удовлетворяют неравенству $\mathrm{Num}(\omega_z)/H_{n_j, k_{n_j}(x)} < \varepsilon$, $z \in \{x, y\}$, при каждом $j \in \mathbb{N}$.*

Теорема 8 (стохастический вариант теоремы 7)**.** *Пусть (X, T, μ_q), $q \in (0, \frac{1}{a_0})$, – система из класса $(\mathcal{S}_{\mathcal{L}})_p$, а g – цилиндрическая функция, принадлежащая пространству $\mathscr{F}_N$. Тогда для μ_q-п.в. x из последовательности индивидуальных случайных мостов $(\varphi^g_{x,l})_{l \geqslant 1}$ можно выбрать сходящуюся в* sup*-метрике на $[0, 1]$ подпоследовательность функций $(\varphi^g_{x,l_j})_{j \geqslant 1}$, $l_j = l_j(x)$, тогда и только тогда, когда функция g некогомологична константе.*

Доказательство. Следует из леммы 2, теоремы 7 и теоремы 2. □

Замечание. Лемма 2 позволяет утверждать, что предельная функция φ^g_x, для которой $\lim\limits_{j \to \infty} ||\varphi^g_{x,l_j(x)} - \varphi_x|| = 0$, может быть выбрана единой для почти всех x.

Докажем теперь использованное выше предложение 2. Оно обобщает предложение 3.1 работы [15], но доказательство требует усовершенствования из-за неунимодальности обобщенных биномиальных коэффициентов.

Лемма 3. *Для производящего полинома $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d$ справедливы следующие утверждения.*

1. *Найдутся такие $n_1 \in \mathbb{N}$ и $C_1 > 0$, зависящие только от набора $\{a_0, \dots, a_d\}$, что $\max\limits_k \{\frac{C_d(n,k+1)}{C_d(n,k)}, \frac{C_d(n,k)}{C_d(n,k+1)}\} \leqslant C_1 n$ при $n > n_1$.*

2. *Неравенство $C_d(n-1, k-i) \leqslant \frac{1}{a_i} \max\{\frac{k}{n}, 1 - \frac{k}{n}\} C_d(n, k)$ выполнено при $0 \leqslant i \leqslant d$.*

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение. Рассмотрим дискретную случайную величину X, которая распределена на множестве $\{0, 1, \dots, d\}$ согласно полиному $p(x)$, т.е. $\mathrm{Prob}(X = k) = a_k/p(1)$, $0 \leqslant k \leqslant d$. Сумма $Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ независимых случайных величин X_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, распределенных согласно полиному $p(x)$, распределена согласно полиному $p^n(x)$, т.е. $\mathrm{Prob}(Y_n = k) = C_p(n, k)/p^n(1)$, $0 \leqslant k \leqslant nd$. В известной работе Э. Одлыжко и Л. Ричмонда [20] доказано, что функция $f_n(k) \equiv \mathrm{Prob}(Y_n = k)$ является асимптотически

унимодальной, т.е., начиная с некоторого n_1, коэффициенты $C_d(n,k)$, $0 \leqslant k \leqslant nd$, $n \geqslant n_1$, сначала возрастают (с ростом k), а затем убывают.

Обозначим через C максимальный из всех коэффициентов $\{C_p(n_1,k)\}_{k=0}^{n_1 d}$ полинома $p^{n_1}(x)$, а через c – минимальный. Через $a_{\max}$ обозначим максимальный из коэффициентов $\{a_0,\dots,a_d\}$ полинома $p(x)$. Докажем оценку $\frac{C_d(n,k+1)}{C_d(n,k)} \leqslant a_{\max}\frac{C}{c}dn$, $0 \leqslant k \leqslant nd-1, n \geqslant n_1$, по индукции по n (вторая оценка $\frac{C_d(n,k)}{C_d(n,k+1)} \leqslant a_{\max}\frac{C}{c}dn$ доказывается аналогично). При $n = n_1$ имеем $\frac{C_d(n_1,k+1)}{C_d(n_1,k)} \leqslant \frac{C}{c} \leqslant \frac{Cda_{\max}}{c}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, поэтому утверждение базы индукции можно считать проверенным.

Пусть доказано, что $\frac{C_d(n-1,k)}{C_d(n-1,k-1)} \leqslant \frac{Cda_{\max}}{c}(n-1)$, где $1 \leqslant k \leqslant d(n-1)$ и $n > n_1$. Покажем, что $\frac{C_d(n,k)}{C_d(n,k-1)} \leqslant \frac{Cda_{\max}}{c}n$, $1 \leqslant k \leqslant dn$. Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{C_d(n,k+1)}{C_d(n,k)} &= \frac{\sum\limits_{i=0}^{d} a_i C_d(n-1,k+1-i)}{\sum_{i=0}^{d} a_i C_d(n-1,k-i)} \\
&\leqslant \frac{C_d(n-1,k)\big(a_0+a_1+\dots+a_{d-1}+da_{\max}a_d\frac{C}{c}(n-1)\big)}{a_d C_d(n-1,k)} \\
&\leqslant \frac{a_0+a_1+\dots+a_{d-1}-da_{\max}}{a_d} + \frac{a_{\max}Cdn}{c} \leqslant \frac{a_{\max}Cd}{c}n. \qquad (8)
\end{aligned}$$

Второе утверждение следует из формулы вынесения

$$\sum_{i=1}^{d} C_p(n-1,k-i)a_i i = \frac{k}{n}C_p(n,k)$$

для обобщенных биномиальных коэффициентов.

□

Предложение 2. *Пусть $N \geqslant 1$ – натуральное число, $\delta \in (0,\frac{1}{4})$, и пусть на этаже $\bar{n}$ выбрана вершина $A = A(\bar{n},\bar{k})$ с координатами $\big(\bar{n},\bar{k}\big)$, такая, что $2\delta\bar{n} \leqslant k \leqslant (d-2\delta)\bar{n}$ (и $2\delta\bar{n} \leqslant nd-k \leqslant (d-2\delta)\bar{n}$).*

Пусть α_l, $0 \leqslant l \leqslant Nd$, – набор вещественных чисел, не равных нулю одновременно. Для уровня n, где $N \leqslant n \leqslant \bar{n}$, рассмотрим вершину $B(n,k) = \big(n,k\big)$, такую, что $0 \leqslant k \leqslant \bar{k}$, $0 \leqslant n-k \leqslant \bar{n}-\bar{k}$. Рассмотрим сумму

$$\gamma_{n,k} = \frac{1}{R}\sum_{l=0}^{Nd} \alpha_l\, C_d(n-N,k-l), \qquad (9)$$

где постоянная $R = R(A, B, \delta)$ *выбрана так, чтобы величины* $|\gamma_{n,k}|$ *были равномерно по* n *и* k *на множестве* $0 \leqslant k \leqslant \bar{k}$, $0 \leqslant n - k \leqslant \bar{n} - \bar{k}$, $N \leqslant n \leqslant \bar{n}$ *ограничены константой* 2.

Тогда найдется положительная константа $C = C(\delta, N)$, *такая, что при достаточно больших* $\bar{n}$ *выполнено неравенство*

$$|\gamma_{n,k}| \leqslant 3e^{-C(\bar{n}-n)}.$$

Данное предложение обобщает предложение 3.1 работы [15]. Условия на координаты вершины A δ-отделяют ее от крайних вершин $(n, 0)$ и (n, dn) уровня n. Условия на координаты вершины $B = B(n, k)$ означают, что она является вершиной "перевернутого" графа с основанием в вершине A, см. рис 5.

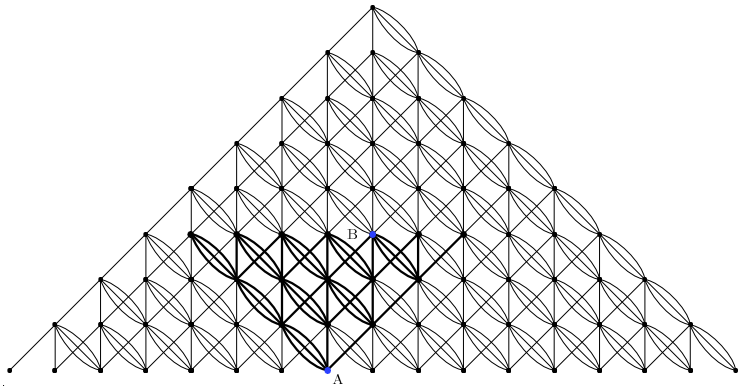

Рис. 5. Пример расположения вершин A и B.

Доказательство. Мы будем предполагать, что $\bar{n} > 2n_1$, где число $n_1 = n_1\,(a_0, a_1, \ldots, a_d)$, определено в доказательстве леммы 3. Выберем произвольное l_0 из интервала $0 \leqslant l_0 \leqslant Nd$, такое, что коэффициент α_{l_0} не равен нулю. Перепишем правую часть равенства (9) в виде

$$R\gamma_{n,k} = C_d(n - N, k - l_0)P(n, k, l_0), \quad N \leqslant n \leqslant \bar{n}, \quad 0 \leqslant k \leqslant nd,$$

где через $P(n, k, l_0)$ обозначено выражение $\sum\limits_{l=0}^{N} \alpha_l \frac{C_d(n-N,k-l)}{C_d(n-N,k-l_0)}$. Обозначим через α максимум $|\alpha_l|$ при $0 \leqslant l \leqslant Nd$.

Покажем, что найдется такой полином $Q(x)$ степени не выше Nd, что

$$|P(n,k,l_0) - P(\bar{n},\bar{k},l_0)| \leqslant Q(\bar{n}). \tag{10}$$

Для этого достаточно показать, что найдется $c_1 > 0$, такое, что $|\frac{C_d(n-N,k-l)}{C_d(n-N,k-l_0)}| \leqslant c_1 n^{Nd}$, $0 \leqslant l \leqslant Nd$, $N \leqslant n \leqslant \bar{n}$. Данная оценка легко получается Nd-кратным последовательным применением пункта 1 леммы 3. Обозначим через $\tilde{Q}$ разность $P(n,k,l_0) - P(\bar{n},\bar{k},l_0)$. Имеем

$$\begin{aligned}\gamma_{n,k} &= \frac{1}{R} C_d(n-N,k-l_0) P(n,k,l_0)\\ &= \frac{C_d(n-N,k-l_0)}{C_d(\bar{n}-N,\bar{k}-l_0)} \frac{C_d(\bar{n}-N,\bar{k}-l_0)P(n,k,l_0)}{R}\\ &= \frac{C_d(n-N,k-l_0)}{C_d(\bar{n}-N,\bar{k}-l_0)} \frac{C_d(\bar{n}-N,\bar{k}-l_0)(P(\bar{n},\bar{k},l_0)+\tilde{Q})}{R}.\end{aligned} \tag{11}$$

Согласно предположению, $|\gamma_{\bar{n},\bar{k}}| = |\frac{1}{R} P(\bar{n},\bar{k},l_0) C_d(\bar{n}-N,\bar{k}-l_0)| \leqslant 2$. Так как неравенство (10) можно записать в виде $|\tilde{Q}| \leqslant Q$, мы получаем, что

$$|\gamma_{n,k}| \leqslant 3 \frac{Q(\bar{n}) C_d(n-N,k-l_0)}{C_d(\bar{n}-N,\bar{k}-l_0)}.$$

Пользуясь $(\bar{n}-n)$-кратным применением пункта 2 леммы 3 и условиями на вершины A и B, получаем оценку $\frac{C_d(n-N,k-l_0)}{C_d(\bar{n}-N,\bar{k}-l_0)} \leqslant 3e^{-\tilde{C}(\delta)(\bar{n}-n)}$ для некоторой постоянной $\tilde{C}(\delta) > 0$. Это приводит к (не зависящей от начального выбора l_0) оценке

$$|\gamma_{n,k}| \leqslant 3 \frac{Q(\bar{n}) C_d(n-N,k-l_0)}{C_d(\bar{n}-N,\bar{k}-l_0)} \leqslant 3e^{-C(\delta)(\bar{n}-n)}$$

для некоторого $C(\delta) > 0$. □

3.5. Примеры предельных кривых для полиномиальных систем. В этой части сформулированы открытые вопросы и приведены результаты некоторых компьютерных экспериментов.

Пусть параметры q_1 и q_2 принадлежат интервалу $(0,1)$. Определим функцию $S^p_{q_1,q_2} : [0,1] \to [0,1]$, отображающую число x, представленное в q_1-адической записи в виде

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} I_{q_1}(\omega_j) q_1^j \left(\frac{t_{q_1}}{q_1}\right)^{\bar{a}_1 \cdot \bar{s}_j + 2\bar{a}_2 \cdot \bar{s}_j + \cdots + d\,\bar{a}_d \cdot \bar{s}_j},$$

в число

$$S^p_{q_1,q_2}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} I_{q_2}(\omega_j) q_2^j \Big(\frac{t_{q_2}}{q_2}\Big)^{\bar{a}_1\cdot\bar{s}_j + 2\bar{a}_2\cdot\bar{s}_j + \dots + d\,\bar{a}_d\cdot\bar{s}_j}. \tag{12}$$

Для всякой q_1-*рациональной* точки

$$x_0 = \sum_{j=1}^{m} I_{q_1}(\omega_j) q_1^j \Big(\frac{t_{q_1}}{q_1}\Big)^{\bar{a}_1\cdot\bar{s}_j + 2\bar{a}_2\cdot\bar{s}_j + \dots + d\,\bar{a}_d\cdot\bar{s}_j}$$

и произвольного числа $x \in [0,1]$ функция $S^p_{q_1,q_2}$ удовлетворяет следующему уравнению самоподобия:

$$S^p_{q_1,q_2}\Big(x_0 + r_{q_1} x\Big) = S^p_{q_1,q_2}(x_0) + r_{q_2} S^p_{q_1,q_2}(x), \tag{13}$$

где $r_{q_i} = q_i^m \Big(\frac{t_{q_i}}{q_i}\Big)^{\bar{a}_1\cdot\bar{s}_m + 2\bar{a}_2\cdot\bar{s}_m + \dots + d\,\bar{a}_d\cdot\bar{s}_m}$, $i = 1,2$. В частном случае $q_1 = 1/r$ функция $S^p_{1/r,q_2}$ является функцией распределения меры $\tilde{\mu}_q$.

Формула (13) означает, что график функции $S^p_{q_1,q_2}$ на обобщенном q-адическом интервале $[x_0, x_0 + r_{q_1}]$ является миниатюрной версией графика функции $S^p_{q_1,q_2}$, сжатого в r_{q_2} раз по вертикали и в r_{q_1} раз по горизонтали.

Класс $S^p_{q_1,q_2}(\cdot)$ позволяет определить новый класс функций вида

$$\mathcal{T}^k_{p,q_1} := \frac{\partial^k S^p_{q_1,q_2}}{\partial q_2^k}\Big|_{q_2=q_1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

При $k = 0$ удобно считать, что $\mathcal{T}^0_{p,q}(x) = x$. При $P_2(x) = 1 + x$, $q = 1/2$ и $k = 1$ функция $\frac{1}{2}\mathcal{T}^1_{P_2,1/2}$ является кривой Такаги, см. [21]. Дифференцируя выражения (13) по q_2 и затем полагая q_2 равным q_1, можно получить явные выражения для функции $\mathcal{T}^k_{p,q_1}$ на интервале $[x_0, x_0 + r_{q_1}]$ через функции $\mathcal{T}^j_{p,q_1}$, $0 \leqslant j \leqslant k$.

Результаты компьютерных экспериментов показывают, что линейные комбинации функций $\mathcal{T}^k_{p,q}$, $k \geqslant 1$, возникают в качестве предельных функций $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi^g_{n,k_n}$ в теореме 8. На рис. 6 представлен график кривой $\mathcal{T}^1_{p,\frac{1}{4}}$ при $p(x) = 1 + x + 2x^2$, являющейся предельной кривой для автоморфизма $(X_p, T_p, \mu_{1/4})$, заданного полиномом $p(x) = 1 + x + 2x^2$, и функции $r(\omega) = \mathbb{1}_{\{\omega_1=3\}}$, $\omega = (\omega_j)_{j=1}^{\infty} \in X$.

У нас нет доказательства этой гипотезы в общем случае, однако в работе [10] она была проверена для автоморфизма Паскаля. Отметим, что для определения частичных сумм цилиндрической функции

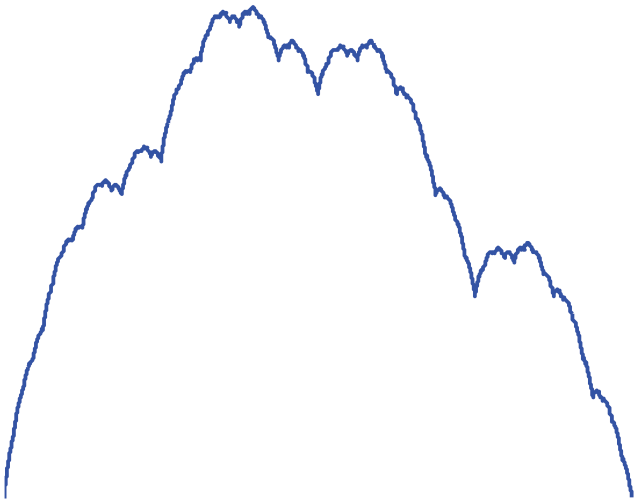

Рис. 6. График функции $\mathcal{T}^1_{p(x),q}$, заданной полиномом $p(x) = 1 + x + 2x^2$, при $q = \frac{1}{4}$.

$g \in \mathscr{F}_N$, согласно выражению (3), достаточно задать коэффициенты $h^g_{N,k}$, $0 \leqslant k \leqslant Nd$. В частности, удобно использовать производящий полином, что приводит к выражению

$$h_{N,k} = \operatorname{coeff}[v^N]\,(h_0 + h_1 v + \cdots + h_d v^d)^k p(v)^{n-k}.$$

(В случае автоморфизма Паскаля полином $(1-av)^k(1+v)^{n-k}$, $a = \frac{1-q}{q}$, является производящим для полиномов Кравчука, см. работу [10].)

Пользуясь самоподобием, несложно показать, что для нахождения предельной кривой достаточно для μ_q-п.в. ω вычислить пределы $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi^g_{n,k_n(\omega)}\big(x^n_{i,e}\big)$, где $C_P(n, k^1(\omega))x^n_{i,e} = \sum\limits_{j=0}^{e} C_P(n-i, k^1(\omega) - k^1(j))$, $0 \leqslant e \leqslant r-1$, $k^1(\omega) = nd - k(\omega)$, $r = p(1)$.

Литература

1. А. М. Вершик, *Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения.* — ДАН СССР **259**, вып. 3 (1981), 526–529.
2. А. М. Вершик, *Теорема о марковской периодической аппроксимации в эргодической теории.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **115** (1982), 72–82.

3. A. M. Vershik, A. N. Livshits, *Adic models of ergodic transformations, spectral theory, and related topics.* — Adv. Sov. Math. **9** (1992), 185–204.
4. А. М. Вершик, *Автоморфизм Паскаля имеет непрерывный спектр.* — Функц. анализ и его прил. **45**, вып. 3 (2011), 16–33.
5. А. М. Вершик, *Задача о центральных мерах на пространствах путей градуированных графов.* — Функц. анализ и его прил. **48**, вып. 4 (2014), 26–46.
6. A. M. Vershik, *Several remarks on Pascal automorphism and infinite ergodic theory.* — Armenian J. Math. **7**, No. 2 (2015), 85–96.
7. А. Г. Качуровский, *Скорости сходимости в эргодических теоремах.* — Успехи мат. наук **51**, вып. 4(310) (1996), 73–124.
8. А. А. Лодкин, И. Е. Манаев, А. Р. Минабутдинов, *Реализация автоморфизма Паскаля в графе конкатенаций и функция* $s_2(n)$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **403** (2012), 95–102.
9. А. Р. Минабутдинов, И. Е. Манаев, *Функция Крускала–Катоны, последовательность Конвея, кривая Такаги и автоморфизм Паскаля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **411** (2013), 135–147.
10. А. А. Лодкин, А. Р. Минабутдинов, *Предельные кривые для автоморфизма Паскаля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **437** (2015), 145–183.
11. S. Bailey, *Dynamical properties of some non-stationary, non-simple Bratteli–Vershik systems.* Ph.D. thesis, University of North Carolina, Chapel Hill, 2006.
12. A. Hajan, Y. Ito, S. Kakutani, *Invariant measure and orbits of dissipative transformations.* — Adv. Math. **9**, No. 1 (1972), 52–65.
13. G. Halasz, *Remarks on the remainder in Birkhoff's ergodic theorem.* — Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **28**, No. 3–4 (1976), 389–395.
14. É. Janvresse, T. de la Rue, *The Pascal adic transformation is loosely Bernoulli.* — Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **40**, No. 2 (2004), 133–139.
15. É. Janvresse, T. de la Rue, Y. Velenik, *Self-similar corrections to the ergodic theorem for the Pascal-adic transformation.* — Stoch. Dyn. **5**, No. 1 (2005), 1–25.
16. S. Kakutani, *A problem of equidistribution on the unit interval* [0,1]. — Lect. Notes Math. **541** (1976), 369–375.
17. M. Krüppel, *De Rham's singular function, its partial derivatives with respect to the parameter and binary digital sums.* — Rostock. Math. Kolloq. **64** (2009), 57–74.
18. X. Méla, *A class of nonstationary adic transformations.* — Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **42**, No. 1 (2006), 103–123.
19. X. Méla, K. Petersen, *Dynamical properties of the Pascal adic transformation.* — Ergodic Theory Dynam. Systems **25**, No. 1 (2005), 227–256.
20. A. M. Odlyzko, L. B. Richmond, *On the unimodality of high convolutions of discrete distributions.* — Ann. Probab. **13** (1985), 299–306.
21. T. Takagi, *A simple example of the continuous function without derivative.* — Proc. Phys.-Math. Soc. **5–6** (1903), 176–177.

Minabutdinov A. R. Limiting curves for polynomial adic systems.

We prove the existence of limiting curves (describing deviations in the ergodic theorem) for cylinder functions for polynomial adic systems. For a

general ergodic measure-preserving transformation and a summable function, we give a necessary condition for a limiting curve to exist. Our work generalizes results by E. Janvresse, T. de la Rue, and Y. Velenik.

Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики” (НИУ ВШЭ),
Департамент прикладной математики
и бизнес-информатики,
Кантемировская ул. 3А, 194100, С.-Петербург, Россия
E-mail: aminabutdinov@gmail.com

Поступило 25 сентября 2016 г.