Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 448, 2016 г.

И. А. Крепкий

ПРИМЕНЕНИЕ СООТНОШЕНИЙ КИРХГОФА ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ ОБ ОПЕРАЦИЯХ, НЕ МЕНЯЮЩИХ СТРУКТУРУ ПЕСОЧНЫХ ГРУПП ГРАФОВ

§1. Введение

Конструкция песочной группы графа впервые появилась в виде частного случая, описанного под названием BTW-модель Пером Баком, Чао Тангом и Куртом Вейзенфельдом в статье [1]. Указанную модель обобщил Дипак Дхар в работе [2], что и привело к появлению понятия песочной группы графа [3]. Далее конструкция была получена различными методами в контексте различных же областей математики. На данный момент группа представлена под различными названиями: якобиан графа, группа Пикара, критическая группа, dollar group, rotor-routing group ([4–7]).

Песочная группа связного графа представляет собой подмножество множества так называемых редуцированных песочных куч графа (песочная куча – отображение из множества вершин графа в множество неотрицательных чисел), снабжённое операцией сложения куч (сложение есть поточечное суммирование песочных куч с последующим редуцированием результата при помощи процедуры, определяемой конструкцией графа). В песочную группу входят только так называемые рекуррентные песочные кучи, удовлетворяющие burning test [8]. Структурно песочная группа графа представляет собой конечную абелеву группу.

Известно, что песочная группа графа изоморфна прямому произведению циклических групп, порядки которых совпадают с ненулевыми элементами нормальной формы Смита [9] матрицы Лапласа графа [3]. Это свойство позволяет эффективно вычислять песочные группы.

Ключевые слова: песочная группа, группа Кирхгофа, операции над графами, двойственные графы.

В работе [7] был доказан изоморфизм песочной группы графа и группы Кирхгофа этого графа. В [10] данное свойство было использовано для вычисления песочных групп лестницы Мёбиуса и призматического графа.

Автору данной статьи указанный подход представляется более наглядным, чем явное использование определения песочной группы для построения доказательств некоторых теорем. Целью данной статьи является доказательство результатов работ [11,12] при помощи манипуляций с группами Кирхгофа.

§2. Операции с графами, сохраняющие структуру песочных групп

В [13] определены операции над графами, именованные как vertex identification, vertex splitting, twisting. В [11,12] были доказаны теоремы о том, что связный граф, полученный из данного при помощи этих операций, имеет песочную группу, изоморфную песочной группе первоначального графа. В следующем параграфе мы представим новые доказательства этих теорем.

Здесь и далее для некоторого произвольного графа G будем использовать следующие обозначения: $V(G)$ – множество вершин этого графа, $E(G)$ – множество его рёбер, $S(G)$ – песочная группа этого графа. В случае, если граф планарный, имеется ещё и множество его граней, которое будем обозначать $F(G)$.

Пусть $p \in V(G)$, $q \in V(H)$, где G и H – какие-то связные мультиграфы. Мультиграф $X(G,H)$ получается посредством слияния вершин p и q. В терминах работы [13] можно сказать, что каждый из графов $X(G,H)$ независимо от выбора p и q получается из любого другого графа вида $X(G,H)$ при помощи последовательного применения операций vertex splitting и vertex identification.

Теорема 1. *Структура группы $S(X(G,H))$ не зависит от выбора вершин p и q.*

Пусть $A_G, B_G \in V(G)$ – две различные вершины мультиграфа G, $A_H, B_H \in V(H)$ – две различные вершины мультиграфа H. Пусть мультиграф $X_+(G,H)$ получен из G и H путём слияния вершины A_G с вершиной A_H и вершины B_G с B_H. Мультиграф $X_-(G,H)$ также получен из G и H при помощи двух слияний, но на сей раз вершины A_G с вершиной B_H и вершины B_G с A_H. В терминах работы [13] можно сказать, что граф $X_+(G,H)$ получен из графа $X_-(G,H)$ при помощи операции twisting.

Теорема 2. $S(X_+(G,H)) \cong S(X_-(G,H))$.

Доказательства, представленные в [11, 12], основаны на сравнении нормальных форм Смита матриц Лапласа графов.

§3. Группа Кирхгофа

Законы Кирхгофа предлагают систему уравнений, описывающих токи в электрической цепи. Применение схожих принципов по отношению к произвольному графу даёт систему соотношений, порождающих группу, именуемую группой Кирхгофа. Далее мы опишем явную конструкцию этих соотношений.

Пусть G – связный неориентированный мультиграф без петель. Зададим на каждом ребре графа G одну из двух возможных ориентаций. Пусть $v \in V(G)$, поток через вершину v определяется как $F_{\text{vertex}}(v) = \sum\limits_{e \in \text{in}(v)} e - \sum\limits_{e \in \text{out}(v)} e$. Здесь $\text{out}(v)$ – множество рёбер, смежных с вершиной v и исходящих из неё, $\text{in}(v)$ – множество рёбер, смежных с вершиной v и входящих в неё (по отношению к выбранной ориентации рёбер).

Пусть $W(G)$ – множество циклов, образованных рёбрами графа, $w = [e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_m}] \in W$ – некоторый цикл (последовательность рёбер в этой записи явно описывает некоторую последовательность обхода цикла). Определим поток через w как $F_{\text{path}}(w) = \sum\limits_{e \in w} e * \text{sign}(w, e)$. Здесь $\text{sign}(w, e) = 1$, если ребро e было ориентировано в направлении обхода цикла w, и $\text{sign}(w, e) = -1$ в противном случае.

Определение 1. *Множество соотношений вида $F_{\text{vertex}}(v) = 0$ и $F_{\text{path}}(w) = 0$, определённых для всех $v \in V(G)$ и $w \in W(G)$, вместе с множеством образующих $E(G)$ порождает группу, которая называется группой Кирхгофа графа G.*

В работе [7] доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Группа Кирхгофа связного мультиграфа изоморфна его песочной группе.*

Для описания группы Кирхгофа достаточно выделить $|E(G)|$ независимых соотношений из указанного множества. Можно построить матрицу, столбцы которой соответствуют рёбрам графа G, а строки – независимым соотношениям вида $\sum\limits_{k=1..|E(G)|} e_k t_k = 0$ (здесь $e_k \in E(G)$, а t_k принимает значения -1, 0 или 1). Строка, соответствующая соотношению $\sum\limits_{k=1..|E(G)|} e_k t_k = 0$, имеет вид $[t_1, t_2, ..., t_{|E(G)|}]$. Нормальная форма Смита этой матрицы является диагональной, и её ненулевые элементы $s_1, s_2, ..., s_{|E(G)|}$ определяют структуру песочной группы графа G как $S(G) \cong \bigoplus\limits_{k=1..|E(G)|} C_{s_k}$, где C_n – циклическая группа порядка n.

§4. Новые доказательства теорем 1 и 2

Докажем теоремы 1 и 2, используя утверждение теоремы 3 об изоморфизме песочной группы графа его группе Кирхгофа. Прежде всего обратим внимание на количество соотношений, достаточных для описания песочной группы произвольного графа G. Потоки через вершины графа дают нам $|V(G)|$ соотношений. Однако легко проверить, что это множество не является независимым. Независимы лишь $|V(G)| - 1$ из них. Для вычисления группы $S(G)$ необходимо построить как минимум $|E(G)|$ независимых соотношений. Т.е. требуется использовать $|E(G)| - |V(G)| + 1$ независимых циклов графа для порождения соответствующих соотношений.

Доказательство теоремы 1. Имеем два мультиграфа G и H. Предполагаем, что их рёбра снабжены произвольной ориентацией. Пусть $p, q \in V(G)$ – две различные вершины, $x \in V(H)$. Граф X_p получен из G и H слиянием вершин p и x. Граф X_q получен из G и H слиянием вершин q и x. Оба графа наследуют ориентацию рёбер от графов G и H. Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что $S(X_p) \cong S(X_q)$. Иначе говоря, достаточно показать, что множества соотношений, определяющих группы Кирхгофа графов X_p и X_q, эквивалентны.

Прежде всего опишем минимальные множества соотношений, достаточные для вычисления песочных групп графов G и H. В пределах доказательства используем следующие обозначения:

- $V'_G = V(G) \setminus \{p\} \setminus \{q\}$,
- $V'_H = V(H) \setminus \{x\}$,

- $C(G)$ – произвольное множество из $|E(G)| - |V(G)| + 1$ независимых циклов графа G,
- $C(H)$ – произвольное множество из $|E(H)| - |V(H)| + 1$ независимых циклов графа H.

Соотношения, соответствующие вершинам графа G:

- $F_{\text{vertex}}(v)$, $v \in V'_G$ (всего $|V(G)| - 2$ соотношений),
- $F_{\text{vertex}}(q)$.

(Здесь нам необязательно упоминать $F_{\text{vertex}}(p)$ в силу его зависимости от остальных соотношений, но полезно помнить, что

$$\sum_{v \in V'_G} F_{\text{vertex}}(v) + F_{\text{vertex}}(q) + F_{\text{vertex}}(p) = 0.)$$

Соотношения, соответствующие независимым циклам графа G:

- $F_{\text{path}}(c)$, $c \in C(G)$ (всего $|E(G)| - |V(G)| + 1$ соотношений).

Соотношения, соответствующие вершинам графа H:

- $F_{\text{vertex}}(v)$, $v \in V'_H$ (всего $|V(H)| - 1$ соотношений).

(Здесь нам необязательно упоминать $F_{\text{vertex}}(x)$ в силу его зависимости от остальных соотношений, но полезно помнить, что

$$\sum_{v \in V'_H} F_{\text{vertex}}(v) + F_{\text{vertex}}(x) = 0.)$$

Соотношения, соответствующие независимым циклам графа H:

- $F_{\text{path}}(c)$, $c \in C(H)$ (всего $|E(H)| - |V(H)| + 1$ соотношений).

Далее рассмотрим графы X_p и X_q. Обратим внимание на то, что кроме ориентации рёбер графы X_p и X_q унаследуют соответствующие соотношения. Их мы используем для построения множеств соотношений, достаточных для вычисления $S(X_p)$ и $S(X_q)$.

Независимые соотношения, соответствующие вершинам графа X_p:

- $F_{\text{vertex}}(v)$, $v \in V'_G$ (всего $|V(G)| - 2$ соотношений),
- $F_{\text{vertex}}(q)$,
- $F_{\text{vertex}}(v)$, $v \in V'_H$ (всего $|V(G)| - 1$ соотношений).

(Всего имеем $|V(G)| + |V(H)| - 2$ независимых соотношений, соответствующих вершинам графа.)

При этом соотношения, соответствующие циклам графа $F_{\text{path}}(c)$, $c \in C(G)$, и $F_{\text{path}}(c)$, $c \in C(H)$, независимы и их всего

$$|E(G)| + |E(H)| - |V(G)| - |V(H)| + 2.$$

Таким образом, имеем всего $|E(G)|+|E(H)| = |E(X_p)|$ независимых соотношений. Их нам достаточно.

Аналогичный список соотношений для графа X_q таков:

- $F_{\text{vertex}}(v)$, $v \in V'_G$,
- $F_{\text{vertex}}(q) + F_{\text{vertex}}(x)$,
- $F_{\text{vertex}}(v)$, $v \in V'_H$,
- $F_{\text{path}}(c)$, $c \in C(G)$,
- $F_{\text{path}}(c)$, $c \in C(P)$.

Списки отличаются только одним соотношением. Это $F_{\text{vertex}}(q)$ для X_p и $F_{\text{vertex}}(q) + F_{\text{vertex}}(x)$ для X_q. Но $\sum\limits_{v \in V'_H} F_{\text{vertex}}(v) + F_{\text{vertex}}(x) = 0$, а значит, особое соотношение одного графа выражается через линейную комбинацию соотношений другого графа. Т.е. списки соотношений эквивалентны. □

Доказательство теоремы 2. Имеем два мультиграфа G и H. Предполагаем, что их рёбра снабжены произвольной ориентацией. Пусть $p, q \in V(G)$ – две различные вершины графа G, а $r, s \in V(H)$ – две различные вершины графа H. Граф X_+ получен из G и H слиянием вершин p и r, а также вершин q и s. Граф X_- получен из G и H слиянием вершин p и s, а также вершин q и r. (Здесь снова предполагаем, что ориентация рёбер графов X_- и X_+ наследуется от ориентации рёбер графов G и H.) Кроме того, сменим ориентацию всех рёбер подграфа $H \subset F_-$ на противоположную. (Данное действие не меняет структуры графа, т.е. не влияет на его песочную группу. Далее это изменение несколько упростит описание потока через один из циклов графа F_-.) Для доказательства теоремы нам достаточно показать, что множества соотношений, определяющих группы Кирхгофа графов X_+ и X_-, эквивалентны.

В пределах доказательства используем следующие обозначения:

- $V'_G = V(G) \setminus \{p\} \setminus \{q\}$,
- $V'_H = V(H) \setminus \{r\} \setminus \{s\}$,
- $C(G)$ – множество из $|E(G)| - |V(G)| + 1$ независимых циклов графа G,
- $C(H)$ – множество из $|E(H)| - |V(H)| + 1$ независимых циклов графа H.

Соотношения, соответствующие вершинам графа G:

- $F_{\text{vertex}}(v)$, $v \in V'_G$ (всего $|V(G)| - 2$ соотношений),

- $F_{\mathrm{vertex}}(q)$.

(При этом $\sum\limits_{v\in V'_G} F_{\mathrm{vertex}}(v) + F_{\mathrm{vertex}}(p) + F_{\mathrm{vertex}}(q) = 0$.)

Соотношения, соответствующие независимым циклам графа G:

- $F_{\mathrm{path}}(c)$, $c \in C(G)$ (всего $|E(G)| - |V(G)| + 1$ соотношений).

Соотношения, соответствующие вершинам графа H:

- $F_{\mathrm{vertex}}(v)$, $v \in V'_H$ (всего $|V(H)| - 2$ соотношений),
- $F_{\mathrm{vertex}}(s)$.

(При этом $\sum\limits_{v\in V'_G} F_{\mathrm{vertex}}(v) + F_{\mathrm{vertex}}(r) + F_{\mathrm{vertex}}(s) = 0$.)

Соотношения, соответствующие независимым циклам графа G:

- $F_{\mathrm{path}}(c)$, $c \in C(H)$ (всего $|E(H)| - |V(H)| + 1$ соотношений).

Далее построим минимальные множества соотношений, достаточные для описания песочных групп графов F_+ и F_-, учитывая, что часть из них будет унаследована от ранее построенных соотношений для графов G и H.

Соотношения, соответствующие вершинам графа F_+:

- $F_{\mathrm{vertex}}(v)$, $v \in V'_G$ (всего $|V(G)| - 2$ соотношений),
- $F_{\mathrm{vertex}}(v)$, $v \in V'_H$ (всего $|V(H)| - 2$ соотношений),
- $F_{\mathrm{vertex}}(q) + F_{\mathrm{vertex}}(s)$.

Соотношения, соответствующие циклам графа F_+:

- $F_{\mathrm{path}}(c)$, $c \in C(G)$ (всего $|E(G)| - |V(G)| + 1$ соотношений),
- $F_{\mathrm{path}}(c)$, $c \in C(H)$ (всего $|E(H)| - |V(H)| + 1$ соотношений),
- $F_{\mathrm{path}}(x) + F_{\mathrm{path}}(y)$.

Соотношение $F_{\mathrm{path}}(x)+F_{\mathrm{path}}(y)$ – это особое соотношение. До этого мы перечислили всего $|E(G)|+|E(H)|-1 = |E(X_+)|-1$ соотношений, и нам не хватало ещё одного. Вершины использовать для этих целей бесполезно (уже есть $|V(G)| + |V(H)| - 3 = |V(X_+)| - 1$ независимых соотношений данного типа). Значит, нужно найти ещё один цикл, независимый от $C(G) \cup C(H)$. Для этого подойдёт цикл, включающий в себя рёбра обеих компонент G и H. Пусть x – некоторый путь между вершинами p и q графа G, а y – путь между вершинами s и r графа H. Вместе x и y образуют подходящий нам цикл в графе X_+. Соотношение, соответствующее ему, есть $F_{\mathrm{path}}(x) + F_{\mathrm{path}}(y)$.

Соотношения, соответствующие вершинам графа F_-:

- $F_{\mathrm{vertex}}(v)$, $v \in V'_G$,

- $-F_{\text{vertex}}(v)$, $v \in V'_H$ (знак "–" обусловлен инверсией рёбер, соответствующих графу H),
- $F_{\text{vertex}}(q) - F_{\text{vertex}}(r)$ (здесь используется именно вычитание, а не сложение – это обусловлено тем, что F_- унаследовал инвертированную ориентацию рёбер подграфа H).

Соотношения, соответствующие циклам графа F_-:

- $F_{\text{path}}(c)$, $c \in C(G)$,
- $-F_{\text{path}}(c)$, $c \in C(H)$ (знак "–" обусловлен инверсией рёбер, соответствующих графу H; ясно, что он ни на что не влияет),
- $F_{\text{path}}(x) + F_{\text{path}}(y)$.

Последнее соотношение $F_{\text{path}}(x) + F_{\text{path}}(y)$ построено так же, как в случае графа F_+. Важно отметить, что если бы мы не инвертировали ориентацию рёбер, соответствующих графу H, соотношение выглядело бы как $F_{\text{path}}(x) - F_{\text{path}}(y)$, из-за того что в случае графа F_- мы вынуждены обходить путь y в обратном порядке.

С учётом того, что $\sum\limits_{v \in V'_G} F_{\text{vertex}}(v) + F_{\text{vertex}}(r) + F_{\text{vertex}}(s) = 0$, мы можем быть уверены, что разница между списками соотношений для F_+ и F_- не скажется на их эквивалентности:

$$\begin{aligned} F_{\text{vertex}}(q) - F_{\text{vertex}}(r) &= F_{\text{vertex}}(q) + F_{\text{vertex}}(s) - (F_{\text{vertex}}(s) + F_{\text{vertex}}(r)) \\ &= F_{\text{vertex}}(q) + F_{\text{vertex}}(s) + \sum_{v \in V'_G} F_{\text{vertex}}(v). \qquad \square \end{aligned}$$

§5. Песочные группы двойственных графов

Определение 2. *Граф называют планарным, если он изоморфен некоторому графу, изображённому на плоскости так, что его вершины – это точки плоскости, а рёбра – непересекающиеся кривые на ней. Области, на которые граф разбивает плоскость, называются его гранями. Неограниченная часть плоскости – тоже грань, называемая внешней гранью.*

Определение 3. *Двойственный граф G' к планарному графу G – это граф, в котором вершины соответствуют граням графа G, причём две такие вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие им грани графа G имеют общее ребро.*

Известно, что песочные группы планарных графов, двойственных друг другу, изоморфны (доказательство в [14] основано на явном построении изоморфизма между группами и включает в себя манипуляции с дополнительными числовыми конструкциями на рёбрах графов). Докажем это утверждение, используя результат теоремы 3.

Теорема 4. *Для произвольного мультиграфа G и двойственного к нему мультиграфа G' справедливо соотношение $S(G) \cong S(G')$.*

Доказательство. Пусть граф G снабжён произвольной ориентацией рёбер. Конструкция графа G' естественным образом предоставляет нам следующие биекции:

- $Z_{\text{edge}} : E(G) \to E(G')$,
- $Z_{\text{vertex}} : V(G) \to F(G')$,
- $Z_{\text{face}} : F(G) \to V(G')$.

Взаимосвязь между биекциями такова: для ребра e между вершинами v_a и v_b, отделяющего две смежных грани f_p и f_q графа G, ребро $Z_{\text{edge}}(e)$ соединяет две смежные вершины $Z_{\text{face}}(f_p)$ и $Z_{\text{face}}(f_q)$ и отделяет друг от друга грани $Z_{\text{vertex}}(v_a)$ и $Z_{\text{vertex}}(v_b)$.

Далее предполагаем, что графы G и G' расположены на плоскости так, что любое ребро $e \in E(G)$ пересекает лишь ребро $Z_{\text{edge}}(e) \in E(G')$, а каждая вершина $v \in V(G')$ расположена на грани $Z_{\text{face}}^{-1}(v) \in F(G)$.

Определим ориентацию ребёр графа G' следующим образом. При перемещении от вершины $Z_{\text{face}}(f_p)$ к вершине $Z_{\text{face}}(f_q)$ по некоторому ребру $Z_{\text{edge}}(e)$ графа G' мы неизбежно пересечём ребро e графа G. Если в отношении направления перемещения можно утверждать, что e ориентировано справа налево, то считаем, что ориентация ребра $Z_{\text{edge}}(e)$ совпадает с направлением движения от $Z_{\text{face}}(f_p)$ к $Z_{\text{face}}(f_q)$. В противном случае снабжаем $Z_{\text{edge}}(e)$ иной ориентацией. На рис. 1 изображены фрагменты графов G и G', для которых ориентации ребер e и $Z_{\text{edge}}(e)$ связаны указанным образом. На рис. 2 изображены двойственные графы G и G'; ориентация рёбер графа G' зависит от ориентации рёбер графа G.

По теореме Эйлера из планарности графа G следует равенство

$$|E(G)| - |V(G)| + 1 = |F(G)| - 1.$$

Для описания структуры группы $S(G)$ нам достаточно использовать $|E(G)| - 1$ независимых соотношений вида $F_{\text{vertex}}(v)$ и

$$|E(G)| - |V(G)| + 1 = |F(G)| - 1$$

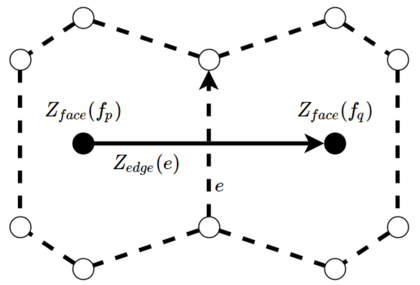

Рис. 1. Взаимосвязь ориентаций рёбер e и $Z_{\text{edge}}(e)$.

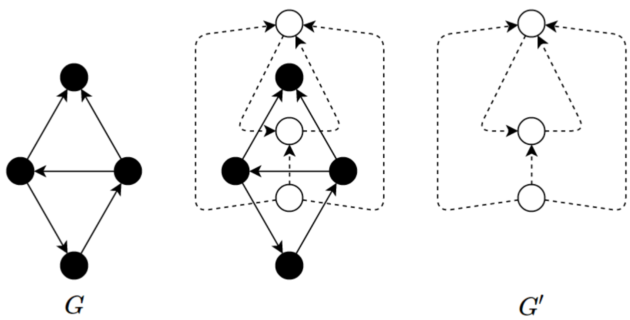

Рис. 2. Двойственные графы G и G', снабжённые требуемой ориентацией рёбер.

соотношений вида $F_{\text{path}}(c)$.

Соответственно, для первого типа соотношений нам достаточно исключить из рассмотрения одну из вершин графа G и использовать остальные для построения соотношений. Для соотношений второго типа исключим из рассмотрения ровно одну из граней графа G (например, внешнюю) и для каждой из оставшихся граней используем путь, идущий по рёбрам, ограничивающим эту грань, для построения соответствующего соотношения.

Из конструкции графа G' ясно, что $E(G') = E(G)$, $V(G') = F(G)$, $F(G') = F(G)$. Аналогично, для вычисления группы $S(G')$ нам достаточно построить $|E(G')| - 1 = |F(G)| - 1$ независимых соотношений вида $F_{\text{vertex}}(v)$ и $|F(G')| - 1 = |E(G)| - 1$ соотношений вида $F_{\text{path}}(c)$.

Построенные соотношения для графа G независимы. Легко видеть, что соотношение $F_{\text{vertex}}(v)$, соответствующее вершине $v \in E(G)$, эквивалентно соотношению вида F_{path}, соответствующему пути по рёбрам вокруг грани $Z_{\text{vertex}}(v)$ графа G'. Точно так же соотношение вида F_{path}, соответствующее пути вокруг некоторой грани $f \in F(G)$, эквивалентно соотношению $F_{\text{vertex}}(Z_{\text{face}}(f))$, соответствующему одной из вершин графа G'.

Следовательно, множество соотношений, достаточных для описания группы $S(G)$, также является достаточным для описания группы $S(G')$, т.е. $S(G) \cong S(G')$. □

§6. Заключение

Доказательства, приведённые в статье, были основаны на изоморфизме песочной группы графа группе Кирхгофа этого графа. В данном подходе для изучения структур песочных групп вместо нормальных форм Смита матриц Лапласа использовались нормальные формы Смита матриц Кирхгофа. Именно такой подход к вычислению структур песочных групп был использован в [10]. По нашему мнению, использование указанного подхода делает доказательства более наглядными, что обусловлено явным характером соответствия между структурными изменениями графа и соответствующими изменениями в его матрице Кирхгофа. Предполагается, что такой подход удобно использовать для изучения других операций с графами, сохраняющих песочные группы.

Литература

1. P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld, *Self-organized criticality: an explanation of* $1/f$ *noise.* — Phys. Rev. Lett. **59**, No. 4 (1987), 381–384.
2. D. Dhar, *Self-organized critical state of sandpile automaton models.* — Phys. Rev. Lett. **64**, No. 14 (1990), 1613–1616.
3. A. E. Holroyd, L. Levine, K. Meszaros, Y. Peres, J. Propp, D. B. Wilson, *Chip-firing and rotor-routing on directed graphs*, `arxiv:0801.3306`.
4. R. Cori, D. Rossin, *On the sandpile group of a graph.* — European J. Combin. **21**, No. 4 (2000), 447–459.

5. N. L. Biggs, *Chip-firing and the critical group of a graph.* — J. Algebraic Combin. **9**, No. 1 (1999), 25–45.
6. R. Bacher, P. de la Harpe, T. Nagnibeda, *The lattice of integral flows and the lattice of integral cuts on a finite graph.* — Bull. Soc. Math. France **125**, No. 2 (1997), 167–198.
7. M. Baker, S. Norine, *Harmonic morphisms and hyperelliptic graphs.* — Int. Math. Res. Notices **15** (2009), 2914–2955.
8. L. Pietronero, P. Tartaglia, Y. Zhang, *Theoretical studies of self-organized criticality.* — Phys. A **173**, No. 1 (1991), 22–44.
9. K. R. Matthews, *Smith normal form*, MP274: Linear Algebra, Lecture Notes, University of Queensland, 1991; `http://www.numbertheory.org/courses/MP274/smith.pdf`.
10. M. A. Zindinova, I. A. Mednykh, *On the structure of Picard group for Moebius ladder graph and prism graph.* — In: Proceedings of the Fifteenth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization, Avangard Prima, Sofia, 2014, pp. 117–126.
11. I. A. Krepkiy, *Sandpile groups and the join of graphs.* — Zap. Nauchn. Semin. POMI **411** (2013), 119–124.
12. I. A. Krepkiy, *Зависимость между песочной группой графа и его матроидом.* — Информ.-упр. системы **3** (2015), 23–28.
13. N. White (ed.), *Theory of Matroids*, Cambridge Univ. Press, 1986.
14. R. Cori, D. Rossin, *On the sandpile group of dual graphs.* — European J. Combin. **21**, No. 4 (2000), 447–459.

Krepkiy I. A. Applying Kirchhoff relations in proofs of theorems on graph operations that do not affect the structure of the sandpile groups of graphs.

New proofs of theorems on graph operations that do not affect the structure of the sandpile groups of graphs are suggested. The proofs are based on the isomorphism between the sandpile group and the Kirchhoff group of a graph.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28,
Петродворец,
С.-Петербург, Россия
E-mail: `feb418@gmail.com`

Поступило 10 октября 2016 г.