Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 448, 2016 г.

А. М. Вершик, М. И. Граев

ОСОБЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОДГРУПП ИВАСАВЫ ПРОСТЫХ ГРУПП ЛИ

§1. Некоторые подгруппы простых групп Ли ($Z, N,\ N^*$, Heis, S и P)

1.1. Обозначения. Мы будем рассматривать некоторые подгруппы простых групп вещественных, комплексных и кватернионных матриц – $O(p,q)$, $U(p,q)$ и $\mathrm{Sp}(p,q)$ соответственно. Условимся обозначать через $*$ операцию сопряжения в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ и в теле кватернионов $\mathbb{H}$. В применении к матрицам этот символ будет означать операцию одновременного сопряжения элементов матриц и транспонирования самих матриц.

Свяжем с каждой парой натуральных чисел p, q, где $p \leqslant q$, аддитивную группу $Z = Z_{p,q}$ всех (p,q)-матриц над $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$, и через $N = N_p$ обозначим аддитивную группу косоэрмитовых p-матриц над $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$, удовлетворяющих условию $n^* = -n$. Заметим, что при $p = 1$ это есть соответственно нулевая подгруппа, группа мнимых чисел или трехмерная группа мнимых кватернионов. Обозначим через $N^* \simeq N$ группу, двойственную группе N, с элементами m. Спаривание элементов групп N^* и N условимся обозначать символом $\langle m, n\rangle$, т.е.

$$\langle m, n\rangle = \exp[i \operatorname{Re}\operatorname{Tr}(m,n)], \tag{1}$$

где Re – вещественная часть кватерниона z.

1.2. Группы $\mathrm{Heis} = \mathrm{Heis}(p,q)$**.**

Определение 1. *Назовем обобщенной группой Гейзенберга* $\mathrm{Heis}(p,q)$ *нильпотентную группу ранга 2, элементы которой – пары* (n,z)*, где* $n \in N_p$*,* $z \in Z_{p,q}$*, с законом умножения*

$$\begin{aligned}(n_1, z_1)(n_2, z_2) &= (n_1 + n_2 - \frac{1}{2}(z_1 z_2^* - z_2 z_1^*), z_1 + z_2) \\ &= (n_1 + n_2 - \operatorname{Im} z_1 z_2^*, z_1 + z_2),\end{aligned} \tag{2}$$

Ключевые слова: подгруппа Ивасавы, особое представление, 1-коцикл, унитарность.

Поддержано грантами РФФИ 14-01-00373 (А. В.) и 16-01-00166 (М. Г.).

где $\operatorname{Im} z_1 z_2^*$ *– естественный полуторалинейный* 2*-коцикл аддитивной группы* $Z_{p,q} + Z_{p,q}$ *со значениями в группе* N_p *косоэрмитовых матриц порядка* p.

В частности, при $p = q = 1$ эта группа изоморфна коммутативной группе $\mathbb{R}$ в вещественном случае, классической комплексной группе Гейзенберга вещественной размерности 3 $(= 2 + 1)$ в комплексном случае и нильпотентной группе ранга 2 с трехмерным центром вещественной размерности 7 $(= 4 + 3)$ в кватернионном случае.

1.3. Группа S**.** По определению S есть связная разрешимая группа нижних треугольных матриц порядка p над $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$, диагональные элементы которых – вещественные положительные числа. Следовательно, ее вещественная размерность равна $\frac{p(p+1)}{2}$, p^2 или $2p^2 - p$ соответственно. Таким образом, при $p = 1$ группа S есть $\mathbb{R}_+^*$ для всех простых групп трех типов: над полями вещественных и комплексных чисел и над телом кватернионов.

1.4. Группа Ивасавы P**.**

Определение 2. *Назовем группой Ивасавы полупрямое произведение* $P = S \rtimes \mathrm{Heis}$, *где* S *действует на* Heis *как группа автоморфизмов*:

$$s : (n, z) \to (n, z)^s = (sns^*, sz). \tag{3}$$

Название обусловлено известным разложением Ивасавы произвольной простой группы Ли. Эта группа изоморфна максимальной связной разрешимой подгруппе соответствующей простой группы Ли. Такая реализация группы Ивасавы удобна для наших целей, она несколько отличается от обычной матричной реализации (см. [9]).

§2. Унитарные представления группы Гейзенберга Heis

Регулярное представление группы Гейзенберга Heis реализуется в гильбертовом пространстве $L^2(\mathrm{Heis}, dndz)$, где dn, dz – инвариантные меры (двусторонние меры Хаара) на соответствующих подгруппах, с помощью операторов правого сдвига

$$T(n_0, z_0) f(n, z) = f(n + n_0 - \frac{1}{2}(zz_0^* - z_0 z^*), z + z_0). \tag{4}$$

Предложение 1. *Представление T разлагается в прямой интеграл представлений в гильбертовых пространствах H_m по лебеговой мере*

$$H = \int_{N^*}^{\otimes} H_m dm, \tag{5}$$

где $H_m = L^2(Z, dz)$ – гильбертово пространство, полученное преобразованием Фурье по аргументу n элементов исходного пространства, т.е. пространство функций

$$\widetilde{f}(m, z) = \int_S \langle m, n \rangle f(n, z) dn. \tag{6}$$

Операторы представления группы Heis действуют на H_m по формуле

$$T(n_0, z_0) f(m, z) = \langle m, n_0 - \frac{1}{2}(z z_0^* - z_0 z^*) \rangle f(m, z + z_0). \tag{7}$$

В дальнейшем мы рассматриваем регулярное представление группы Heis именно как прямой интеграл унитарных представлений этой группы в гильбертовых пространствах H_m, параметризованных элементами $m \in N^*$.

§3. Представления группы Ивасавы P, порожденные представлениями T_m группы Гейзенберга в пространствах H_m

Свяжем с каждым представлением T_m группы Heis в пространстве H_m набор, вообще говоря, неунитарных представлений группы Ивасавы P. В дальнейшем индекс m в его обозначении H_m будем опускать.

Сначала рассмотрим набор представлений группы Heis, действующих в том же пространстве H.

Воспользуемся тем, что группа S действует на группе Heis как группа автоморфизмов

$$(n_0, z_0) \to (n_0, z_0)^s = (s n_0 s^*, s z_0). \tag{8}$$

Определение 3. *Назовем сопряженными с T представления группы* Heis, *действующие в том же пространстве $H^s = H$, $s \in S$, по формуле*

$$T_s(n_0, z_0) = T(s n_0 s^*, s z_0). \tag{9}$$

Определение 4. *Обозначим через $\widetilde{T}$ прямой интеграл по произвольной положительной мере $\nu(s)$ на S определенных так представлений T_s группы* Heis*, т.е. представление группы* Heis *в гильбертовом пространстве*

$$\mathcal{H}_\nu = \int_S^{\otimes} H^s d\nu(s), \quad H^s = H,$$

где операторы представления действуют послойно.

Определенные так представления $\widetilde{T}$ группы Heis унитарны независимо от выбора положительной меры $\nu(s)$. Другими словами, представления $\widetilde{T}$ действуют в пространстве функций $f(z,s)$ с нормой

$$\|f\|^2 = \int |f(z,s)|^2 dz d\nu(s). \tag{10}$$

Операторы $\widetilde{T}$ группы Heis действуют в этом пространстве по формуле

$$\widetilde{T}(n_0, z_0) f(z,s) = \langle s n_0 s^* - \frac{1}{2}(z z_0^* s^* - s z_0 z^*) \rangle f(z + s z_0, s). \tag{11}$$

Определение 5. *Определим представления $\widetilde{T}$ подгруппы S в пространстве H_ν следующей формулой:*

$$\widetilde{T}(s_0) f(z,s) = f(z, s s_0). \tag{12}$$

Легко убедиться, что определенные так операторы подгруппы S порождают совместно с операторами подгруппы Heis *представления всей группы Ивасавы $P = S \times$* Heis.

Замечание 1. Нормы операторов $\widetilde{T}$ представления подгруппы S удовлетворяют соотношению

$$\|\widetilde{T}(s_0) f\|^2 = \int \left| f(s) \left(\frac{d\nu(s s_0^{-1})}{d\nu(s)} \right)^{\frac{1}{2}} \right|^2 d\nu(s). \tag{13}$$

Таким образом, операторы подгруппы S унитарны тогда и только тогда, когда $\nu(s)$ – правоинвариантная мера на группе S.

Определение 6. *Назовем построенное так представление $\widetilde{T}$ группы P ассоциированным с исходным представлением T_m подгруппы* Heis *и фиксированной мерой $\nu(s)$.*

Почти очевидно следующее утверждение.

Теорема 1. *Если представление T подгруппы* Heis *неприводимо, а сопряженные с ним представления попарно неэквивалентны, то порожденное им представление T группы Ивасавы операторно неприводимо.*

§4. Условия существования нетривиального 1-коцикла представления группы Ивасавы

Начнем с общих определений.

Под 1-коциклом представления T произвольной топологической группы G в гильбертовом пространстве H понимается непрерывное отображение $\beta : G \to H$, удовлетворяющее соотношению

$$\beta(g_1 g_2) = T(g_1)\beta(g_2) + \beta(g_1), \quad g_1, g_2 \in G; \tag{14}$$

1-коцикл β называется тривиальным, если для всех $g \in G$ выполнено равенство $\beta(g) = T(g)\xi - \xi$ для некоторого вектора $\xi \in H$.

Фактор-пространство пространства всех 1-коциклов по подпространству всех тривиальных 1-коциклов называется пространством 1-когомологий представления T.

Определение 7. *Мы называем представление T особым, если его пространство* 1*-когомологий нетривиально.*

Заметим, что существование нетривиального 1-коцикла β эквивалентно существованию одномерного продолжения представления T в пространстве H до представления в пространстве $H \bigcup \{x\}$, такого, что $T(g)x - x \in H$ для всех элементов g. В этом случае соответствующий нетривиальный 1-коцикл есть $\beta(g) = T(g)x - x$.

Наибольший интерес для нас представляют *точные* особые представления, т.е. представления с тривиальным ядром.

Вектор x_0 в пополнении гильбертова пространства H условимся называть пленкой соответствующего нетривиального 1-коцикла. Согласно этому определению, вектор x_0 является пленкой тогда и только тогда, когда

(i) $x_0 \notin H$;
(ii) $T(g)x_0 - x_0 \in H$ для любого элемента $g \in G$.

Будет показано, что при подходящем выборе меры $\nu(s)$ на S представление $\widetilde{T}$ группы Ивасавы, порожденное представлением T группы G и мерой $\nu(s)$, обладает нетривиальным 1-коциклом.

Применим это определение к случаю представления группы Ивасавы в пространстве H, порожденного представлением T подгруппы Heis.

Согласно исходным определениям, это представление группы Ивасавы действует в гильбертовом пространстве функций $f(z,s)$ с нормой

$$\|f\|^2 = \int |z,s|^2 dz d\nu(s), \tag{15}$$

где dz – лебегова мера на Z, нормированная условием

$$\int e^{-\|z\|^2} dz = 1. \tag{16}$$

Операторы представления подгрупп Heis и S задаются формулами

$$\widetilde{T}(n_0, z_0) f(z,s) = \langle m, sn_0 s^* - \frac{1}{2}(z_0^* s^* - s z_0 z^*)\rangle f(z + s z_0, s), \tag{17}$$

$$\widetilde{T}(s_0) f(zs) = f(z s s_0). \tag{18}$$

Таким образом, функция $F(z,s)$ является пленкой нетривиального 1-коцикла группы Ивасавы тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(i) $\|F\| = \infty$;
(ii) $\|\widetilde{T}(n_0, z_0)F - F\| < \infty$ при любом $(n_0, z_0) \in G$;
(iii) $\|\widetilde{T}(s_0)F - F\| < \infty$.

§5. Явное описание особых представлений группы Ивасавы

Пусть $\widetilde{T}$ – представление группы Ивасавы P, порожденное унитарным представлением T подгруппы Heis в пространстве $H_m = H$ и положительной мерой $\nu(s)$ на подгруппе S.

Теорема 2. *Предположим, что мера $\nu(s)$ удовлетворяет следующим условиям*:

(i) $\int\limits_{\|s\|<\varepsilon} d\nu(s) = \infty$;
(ii) $\int\limits_{\|s\|<\varepsilon} \|s\| d\nu(s) < \infty$;
(iii) $\int\limits_{\|s\|>\varepsilon} e^{\|s\|^2} d\nu(s) < \infty$.

Тогда представление $\widetilde{T}$ группы Ивасавы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\nu$ является особым, и функция

$$F(z,s) = e^{-\|z\|^2} e^{-\|s\|} \tag{19}$$

является пленкой его нетривиального 1*-коцикла.*

Доказательство теоремы приведено в следующем параграфе.

Отметим, что меру $\nu(s)$ удобно задавать в сферических координатах на S:

$$s = r\omega,$$

где $r = \|s\|$, а ω – вектор сферы $\|\omega\| = 1$ в вещественном пространстве $\mathbb{R}^k$; здесь k – вещественная размерность группы S.

Нетрудно убедиться, что мера $\nu(s)$, заданная в сферических координатах на S формулой $\nu(s) = r^{-1} dr d\omega$, где $r = \|s\|$, а $d\omega$ – инвариантная мера на сфере, удовлетворяет условиям теоремы, поэтому связанное с этой мерой представление $\widetilde{T}$ группы Ивасавы является особым.

Замечание 2. Представление $\widetilde{T}$ группы Ивасавы унитарно тогда и только тогда, когда $d\nu(s)$ – мера Хаара на S. Очевидно, что мера Хаара на S удовлетворяет условиям теоремы 2 только в случае групп ранга $p = 1$, т.е. в случае, когда $S = \mathbb{R}_+^*$; таким образом, класс описанных теоремой особых представлений включает в себя унитарные представления группы Ивасавы при $p = 1$ и не включает унитарные представления групп Ивасавы при $p > 1$.

С другой стороны, как будет видно, поскольку плотность преобразованной с помощью элементов $s \in S$ меры μ по исходной мере μ ограничена вместе с обратной, то операторы представления ограничены. Т.е. мы имеем дело с неунитарным ограниченным представлением группы Ивасавы.

§6. Доказательство теоремы

Согласно определению, представление $\widetilde{T}$ группы Ивасавы P действует в пространстве $\mathcal{H}_\nu$ функций $f(z,s)$ с нормой

$$\|f\|^2 = \int |f(z,s)|^2 dz d\nu(s). \tag{20}$$

Операторы представления группы P задаются следующими формулами:

$$\widetilde{T}(n_0, z_0) f(z, s) = \langle m, sn_0 s^* - \frac{1}{2}(zz_0^* s^* - sz_0 z^*)\rangle f(z + sz_0, s), \qquad (21)$$

$$\widetilde{T}(s_0) f(z, s) = f(z, ss_0). \qquad (22)$$

Нужно убедиться, что функция $F(z, s) = e^{-\|z\|^2} e^{-\|s\|}$ является пленкой нетривиального 1-коцикла этого представления.

Согласно §4, это означает, что функция F удовлетворяет следующим трем условиям:

(i) $\|F\| = \infty$;

(ii) $\|\widetilde{T}(n_0, z_0)F - F)\| < \infty$ для любого элемента $(n_0, z_0) \in G$;

(iii) $\|\widetilde{T}(s_0)F - F\| < \infty$.

Проверим справедливость этих трех условий. Условие (i) следует непосредственно из условия (i) из §5 на меру ν. Оценка (ii) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} J = \int \big|\langle m, sn_0 s^* - \frac{1}{2}(zz_0^* s^* - sz_0 z^*)\rangle \\ = e^{-\|z+sz_0\|^2} - e^{-\|z\|^2}\big|^2 e^{-2\|s\|} dz d\nu(s) < \infty. \end{aligned} \qquad (23)$$

Она вытекает из следующих двух оценок:

$$J_1 \equiv \int \big|\langle m, sn_0 s - \frac{1}{2}(zz_0^* s^* - sz_0 z^*)\rangle - 1\big|^2 e^{-\|z+sz_0\|^2} e^{-2\|s\|} dz d\nu(s) < \infty, \qquad (24)$$

$$J_2 \equiv \int \big|e^{-\|z+sz_0\|^2} - e^{-\|z\|^2}\big| e^{-2\|s\|} dz d\nu(s) < \infty. \qquad (25)$$

Очевидно, что функция $\langle m, sn_0 s^* - \frac{1}{2}(zz_0^* s - sz_0 z^*)\rangle - 1$ есть $O(\|s\|)$ при $\|s\| < \varepsilon$, потому сходимость интеграла J_1 следует из условий (ii) и (iii) из §5 на меру $\nu(s)$.

Докажем оценку для J_2. Имеем

$$J_2 = \int \big[\big(e^{-2\|z+sz_0\|^2} + e^{-2\|z\|^2} - 2e^{-\|z+sz_0\|^2 - \|z\|^2}\big) dz\big] e^{-2\|s\|} d\nu(s). \qquad (26)$$

Выполним интегрирование по z, воспользовавшись следующим равенством:

$$\|z + sz_0\|^2 + \|z\|^2 = 2\|z + \frac{1}{2} sz_0\|^2 + \frac{1}{2} sz_0 z_0^* s^*. \qquad (27)$$

Мы получим

$$J_2 = 2\int \left(1 - e^{-\frac{1}{2} s z_0 z_0^* s^*}\right) \int e^{-2\|s\|} ds < \infty. \tag{28}$$

Перейдем к доказательству оценки (iii) для функций F. Интегрированием по z это условие сводится к следующему:

$$\int \left| e^{-\|s_0\|} - e^{-\|s\|} \right|^2 d\nu(s) < \infty. \tag{29}$$

В сферических координатах эта оценка имеет вид

$$\int \left| e^{-r\|\omega s_0\|} - e^{-r} \right|^2 d\nu(s) < \infty. \tag{30}$$

Убедимся, что

$$\min_{\omega} \|\omega s_0\| > 0 \text{ при любом } s_0 \in S. \tag{31}$$

В самом деле, если $\min_\omega \|\omega s_0\| = 0$, то ввиду компактности замыкания точек ω существует ω_0, такое, что $\|\omega s_0\| = 0$; тогда $\omega_0 s_0 = 0$, а потому $\omega_0 = 0$, что невозможно, поскольку ω_0 – точка единичной сферы. Согласно этой оценке, подынтегральная функция равна нулю при $r = 0$ и быстро убывает при $r \to \infty$, поэтому интеграл сходится.

Замечание. В случае, когда мера $\nu(s)$ задана в сферических координатах формулой $d\nu(s) = r^{-1} ds d\omega$, мы имеем следующее явное выражение для нетривиального 1-коцикла подгруппы S:

$$\|\beta(s_0)\|^2 = \int_\Omega \log\left(\frac{(\|\omega s_0\| + 1)^2}{4\|\omega s_0\|)}\right) d\omega. \tag{32}$$

§7. Выводы

Для всех подгрупп Ивасавы простых групп ранга $p = 1$ мера Хаара на S удовлетворяет условиям (i)–(iii) теоремы 2. Поэтому введенное семейство особых и, вообще говоря, неунитарных представлений включает и некоторые унитарные представления. Для групп $O(1, q)$ и $U(1, q)$ это хорошо известно, см. [1]. Один из новых результатов этой работы состоит в том, что для групп $\mathrm{Sp}(1, q)$, которые обладают свойством (T) Каждана и потому не имеют особых унитарных представлений, *тем не менее существуют особые унитарные представления их подгрупп Ивасавы.* Проверка того, что они не продолжаются до представлений групп $\mathrm{Sp}(1, q)$, даст новое простое доказательство свойств (T) для этих групп, и вопрос о существовании особых унитарных представлений для подгрупп Ивасавы простых групп ранга $p > 1$ пока остается открытым. Следует подчеркнуть отличие кватернионного случая от остальных при $p = 1$: из-за того, что центр группы Гейзенберга трехмерен, а группа S одномерна, всюду плотной открытой орбиты для действия группы S на группе характеров не существует и поэтому особые неприводимые представления группы Ивасавы (их континуум) неточны. Чтобы сохранить и точность, и унитарность, придется отказаться от неприводимости представления, а это, скорее всего, несовместимо с возможностью продолжения коцикла с подгруппы Ивасавы на всю группу $\mathrm{Sp}(1, q)$.

Основной результат работы – построение для групп произвольного ранга семейства ограниченных, неунитарных, точных, особых представлений подгрупп Ивасавы. Поскольку при $p > 1$ мера Хаара на группе S условиям теоремы 2 не удовлетворяет, унитарных представлений в этом семействе нет, и вопрос о том, существуют ли унитарные особые представления этих подгрупп при $p > 1$, пока открыт. Но теория неунитарных представлений типа предъявленных имеет значительный интерес: в частности, актуальным является вопрос о том, как строить представления групп токов по ограниченным, но не унитарным представлениям. Так называемые интегральная, пуассонова и квазипуассонова модели представлений групп токов, разработанные авторами для унитарного случая (см. [8]), по-видимому, могут быть применены и для ограниченных представлений. Этому будут посвящены очередные работы авторов. См. [2,3], а также ранние работы об 1-когомологиях групп и представлениях [1, 5–7].

Литература

1. А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, *Неприводимые представления групп G^X и когомологии.* — Функц. анал. и прил. **8**, вып. 2 (1974), 67–69.
2. А. М. Вершик, М. И. Граев, *Когомологии в неунитарных представлениях полупростых групп (группа $U(2,2)$).* — Функц. анал. и прил. **48**, вып. 3 (2014), 1–13.
3. А. М. Вершик, М. И. Граев, *Когомологии подгруппы Ивасавы группы $U(p,p)$ в неунитарных представлениях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **436** (2015), 112–121.
4. R. S. Ismagilov, *Representations of Infinite Dimensional Groups*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
5. A. Guichardet, *Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie*, F. Nathan, Paris, 1980.

6. P. Delorme, *1-cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles. Produits tensoriels continus de représentations.* — Bull. Soc. Math. France **105**, No. 3 (1977), 281–336.
7. N. Monod, Y. Shalom, *Orbit equivalence rigidity and bounded cohomology.* — Ann. Math. **164**, No. 3 (2006), 825–878.
8. А. М. Вершик, М. И. Граев, *Пуассонова модель фоковского пространства и представления групп токов.* — Алгебра и анализ **23**, вып. 3 (2011), 63–136.
9. Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам.* Наука, М., 1988.

Vershik A. M., Graev M. I. Special representations of Iwasawa subgroups of simple Lie groups.

In the paper, a family of representations of maximal solvable subgroups of the simple Lie groups $O(p,q)$, $U(p,q)$, and $\mathrm{Sp}(p,q)$, where $1 \leqslant p \leqslant q$, is introduced. These subgroups are called the Iwasawa subgroups of the corresponding simple groups. The main property of these representations is the existence of nontrivial 1-cohomology with values in the representations. For groups of rank 1, the representations from the family are unitary; for ranks greater than 1, they are nonunitary. The paper continues a series of our previous papers and serves as an introduction to the theory of nonunitary current groups.

St. Petersburg Department of Steklov
Institute of Mathematics;
St. Petersburg State University,
Institute for Information
Transmission Problems, Moscow, Russia
E-mail: vershik@pdmi.ras.ru

Поступило 27 сентября 2016 г.

Institute for System Studies, Moscow, Russia
E-mail: graev_36@mtu-net.ru