

Н. Н. Васильев, Д. А. Павлов

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ  
ДЛЯ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ**

**§1. ВВЕДЕНИЕ**

Задача численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) несомненно является примером одной из наиболее востребованных задач прикладной математики. Существует огромное количество различных алгоритмов и пакетов программ для получения численных решений самых разнообразных систем дифференциальных уравнений, встречающихся в различных областях математики, физики, небесной механики и разного рода инженерных приложениях. Тем не менее литература, посвящённая алгоритмической сложности получения решения задачи Коши, крайне скучна (некоторые результаты на эту тему получены в [1] и [2]). Как правило, анализируется сложность того или иного конкретного алгоритма численного интегрирования, под которой понимают либо количество элементарных арифметических операций, производимых интеграторами на каждом шаге, либо количество обращений к вычислению правых частей или их производных.

В настоящей статье рассматривается формальная постановка задачи Коши для систем ОДУ. В этой формальной постановке начальными данными будут начальные значения координат, момент времени  $t$ , для которого нужно вычислить решение, и число  $\varepsilon$ , задающее гарантированную алгоритмом точность в конечной точке. Обратим внимание на наличие в этой постановке вещественных чисел, которые не позволяют ограничиться только данными фиксированной конечной длины. Для параметров  $t$  и  $\varepsilon$  этих трудностей можно избежать, ограничиваясь их рациональными значениями. Что касается начальных значений координат, алгоритм заранее не может знать, какое количество знаков в этих значениях потребуется для гарантированного с данной точностью вычисления значения решения в конечной точке  $t$ .

---

*Ключевые слова:* сложность алгоритма, машина Тьюринга, задача Коши, задача трех тел, осциллирующие траектории.

Работа поддержана грантом РНФ 14-11-00581.

Существует несколько способов обойти эту трудность. Первый из них предполагает наличие бесконечной ленты (или нескольких лент), в ячейках которой записаны все знаки начальных значений координат. Машина Тьюринга, решающая задачу Коши, может считывать знаки с этой ленты по мере необходимости. Второй подход, в определённом смысле эквивалентный первому, состоит в использовании оракула, который предоставляет нужные знаки. Третий подход заключается в использовании вспомогательной машины Тьюринга, печатающей по мере необходимости знаки начальных данных на дополнительную ленту, которая изначально пуста.

По сравнению с оракулом или использованием бесконечной ленты, третий подход ограничит нас использованием в начальных данных только конструктивных вещественных чисел. В этой статье мы используем оракула, записывающего знаки на т.н. оракульную ленту.

Одно из отличий между изначально записанными на бесконечную ленту данными и использованием оракула состоит в том, что количество вызовов оракула в асимптотике времени работы считается отдельно от длины входа (т.е. ленты), а бесконечная лента как бы делает длину входа бесконечной.

Следующая трудность для формальной постановки задачи Коши состоит в том, что даже в случае, если правые части в системе ОДУ зафиксированы и не входят в начальные данные (и, более того, удовлетворяют условию Липшица), задача определения продолжаемости решения до точки  $t$  может оказаться алгоритмически неразрешимой.

Мы покажем, что даже если трудностей с алгоритмической неразрешимостью нет, сложность решения задачи Коши может оказаться не полиномиальной. Доказательство основано на использовании решений со сложным динамическим поведением. В качестве базового примера мы используем т.н. задачу Ситникова, в которой два тела движутся по эллиптическим орбитам в одной плоскости, а третье тело, движущееся по прямой, перпендикулярной этой плоскости, может совершать бесконечное количество осцилляций с увеличивающимися амплитудами.

Вместо осциллирующего решения задачи Ситникова мы вполне могли бы использовать другие траектории со сложным динамическим поведением. Алгоритмическая сложность решения задачи Коши для них также оказалась бы не полиномиальной. Например, можно было

бы рассматривать окрестность какого-нибудь гомоклинического решения.

Также мы здесь практически не используем естественное описание таких траекторий в терминах символьической динамики [3]. Для доказательства отсутствия алгоритма с полиномиальной сложностью, решающего задачу Коши в нашей формальной постановке, достаточно того, что в некоторой окрестности начального положения в фазовом пространстве количество алгоритмически различимых типов возможного поведения траекторий растет с ростом  $t$  экспоненциально.

## §2. МАШИНА ТЬЮРИНГА ДЛЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Мы рассматриваем оценку сложности решения задачи Коши для динамической системы

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\mathbf{x} \in D$ ,  $\mathbf{x}_0 \in D$  – вычислимый вещественный вектор, а  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  – вычислимая вещественная вектор-функция (здесь открытое множество  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  – фазовое пространство системы).

Оценка сложности в данной работе производится для случая, когда решение  $\mathbf{x}^*(t) : \mathbb{R} \rightarrow D$

- (1) существует на всей вещественной оси  $\mathbb{R}$ ;
- (2) единствено;
- (3) является вычислимой функцией.

Решения, не продолжимые на  $\mathbb{R}$ , называются *сингулярными*. Задача определения сингулярности решения неразрешима (см. раздел 3.2). Единственность решения, в случае его существования, гарантирована, если функция  $\mathbf{f}$  удовлетворяет локальному условию Липшица в каждой точке множества  $D$ . (Доказательство этого факта можно найти, например, в [4, стр. 15].) Однако локальное условие Липшица не влечёт существования решения на  $\mathbb{R}$ .

Если  $\mathbf{f}$  определена на всём множестве  $D$  при  $D = \mathbb{R}^n$  и является (глобально) непрерывной по Липшицу, то решение на  $\mathbb{R}$  существует для всех  $\mathbf{x}_0$  и единствено по теореме Коши–Липшица.

При условии непрерывности функции  $\mathbf{f}$  в каждой точке множества  $D$  любое решение, которое является единственным, является также и вычислимым с помощью переборного алгоритма [5]. В частности, это верно для вычислимой функции  $\mathbf{f}$ , так как любая вычислимая функция непрерывна.

В работе [6] доказана вычислимость решения задачи Коши с помощью метода Пикара–Линделёфа в случае, когда  $\mathbf{f}$  непрерывна по Липшицу на  $D$ . Следует отметить, что сам этот факт отнюдь не три-виален, несмотря на существование огромного количества интеграторов, предназначенных для численного интегрирования систем ОДУ. Подавляющее большинство из них обладают так называемым эффек-том насыщения, приводящим к увеличению погрешности при умень-шении шага. Следовательно, они не позволяют получить решение с произвольно заданной точностью [7].

Таким образом, при  $D = \mathbb{R}^n$  и функции  $\mathbf{f}$ , удовлетворяющей условию Липшица, решение (1) при любом  $\mathbf{x}_0$  существует на всей вещественной оси  $\mathbb{R}$ , единственно и вычислимо, что следует независимо из [5] и [6]. В обоих источниках доказана вычислимость решения как функции от  $\mathbf{x}_0$  и  $t$ , а не просто от  $t$ .

Данная работа ограничивается анализом конкретного частного слу-чаия задачи трёх тел в разделе 3.3. Предметом исследования является зависимость сложности от величины  $t$ ; зависимость сложности вычи-сления значения решения  $\mathbf{x}^*(t)$  от точности задания  $t$  не анализируется. Поэтому в последующем изложении  $t$  в решении задачи Коши считается рациональным параметром, в то время как  $\mathbf{x}_0$  – веществен-ный вектор. Анализ сложности другого частного случая задачи Коши, в котором  $t \in \mathbb{R}$ , проводится в [1].

**Определение 1.** *Функцией решения задачи Коши (1) является функция  $S(\mathbf{x}_0, t) : D \times \mathbb{Q} \rightarrow D$ , где  $S|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} : \mathbb{Q} \rightarrow D$  – вычислимая вещественная векторная функция, замыкание которой на вещественную ось является решением задачи (1).*

**Определение 2.** *Машиной Тьюринга, вычисляющей функцию реше-ния задачи Коши, называется машина Тьюринга, принимающая на вход рациональные числа  $t$  и  $\varepsilon$ ; имеющая оракул  $\varphi$ , который реали-зует вычисление  $\mathbf{x}_0$  как вычислимого вещественного вектора; и вы-дающая в качестве результата значение  $\mathbf{x}(t)$  решения задачи Коши с начальным значением  $\mathbf{x}_0$  в точке  $t$  с точностью  $\varepsilon$ .*

Заметим, что задача Коши в такой постановке относится к классу задач подсчёта (function problem), в отличие от задач разрешимости, часто рассматриваемых в теоретической информатике. Роль оракула машины Тьюринга заключается в записи на ленту представления вектора  $\mathbf{x}_0$  с произвольной точностью, задаваемой самой машиной. Очевидно, что время работы машины Тьюринга не может быть меньше времени чтения оракульной ленты.

**Определение 3.** Будем говорить, что задача Коши (1) имеет полиномиальную сложность, если существует машина Тьюринга из определения 2, вычисляющая функцию её решения за время, не превосходящее  $\mathcal{P}(\text{LENGTH}(t), \text{LENGTH}(\varepsilon))$ , где  $\mathcal{P}$  – любой полином.

**Примечание.** Без потери общности можно предполагать, что  $\varepsilon = 2^{-l}$  и, следовательно,  $\text{LENGTH}(\varepsilon) = l$ .

**Определение 4.** Пусть  $A$  и  $B$  – задачи Коши. Задача  $A$  называется полиномиально сводимой к  $B$ , если существуют вычислимые за полиномиальное время вещественные вектор-функции  $G : D^{(A)} \rightarrow D^{(B)}$  и  $H : D^{(B)} \rightarrow D^{(A)}$ , такие, что для любого начального состояния  $\mathbf{x}_0^{(A)} \in D^{(A)}$  и соответствующего ему решения  $\mathbf{x}^{*(A)}(t)$  выполняется равенство  $\mathbf{x}^{*(A)}(t) = H(\mathbf{x}^{*(B)}(t))$ , где  $\mathbf{x}^{*(B)}(t)$  – решение задачи  $B$  с начальным условием  $\mathbf{x}_0^{(B)} = G(\mathbf{x}_0^{(A)})$ .

**Утверждение.** Если задача Коши  $A$  полиномиально сводима к задаче Коши  $B$  и  $B$  имеет полиномиальную сложность, то  $A$  также имеет полиномиальную сложность.

### §3. АНАЛИЗ СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

**3.1. Описание задачи  $N$  тел.** Гравитационная задача  $N$  тел описывает движение  $N$  материальных точек в трёхмерном пространстве, подчиняющихся законам Ньютона. Система дифференциальных уравнений для этой задачи выглядит следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_i &= \mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, N, \\ \dot{\mathbf{v}}_i &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mu_j \frac{\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i}{|\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i|^3}, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $\mu_i \in \mathbb{R}$ ,  $\mu_i \geq 0$ ,  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^3$ .

При  $N = 3$  начальное состояние динамической системы описывается 21-мерным вектором  $\mathbf{x}_0 = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, p_{1,1}, \dots, p_{3,3}, v_{1,1}, \dots, v_{3,3})$ , а система уравнений (2) задаёт вычислимую вещественную вектор-функцию  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . (Первые три переменные не зависят ни от  $\mathbf{x}$ , ни от времени.)

**3.2. Известные результаты.** При  $N = 2$  (задача двух тел) система имеет решение в виде алгебраических функций от начальных параметров и  $t$ . В зависимости от конфигурации системы два тела движутся друг относительно друга по т.н. кеплеровой орбите (параболе, гиперболе или эллипсу) или по прямой. Подробное изложение решений можно найти, например, в [8]. Несложно показать, что решение задачи Коши для задачи двух тел имеет полиномиальную сложность.

При  $N = 3$  система не имеет решения в виде алгебраических функций, что было показано Пуанкаре. Существует решение в виде сходящихся рядов, найденное Зундманом в 1912 г. Однако оценка количества членов, требуемых для вычисления состояния системы в момент времени  $t$ , экспоненциальна по  $t$ , см. [9]. Мерманом [10] были найдены ряды с лучшими показателями сходимости, но и они экспоненциальны по  $t$ .

В практических задачах (в частности, в эфемеридной астрономии) используются алгоритмы численного интегрирования для получения аппроксимации решения задачи трёх тел. Сложность таких алгоритмов принципиально не ниже  $O(t)$  и, следовательно, не может быть ограничена полиномом от LENGTH( $t$ ).

Таким образом, известные алгоритмы решения задачи Коши для задачи трёх тел имеют экспоненциальную сложность, что, однако, ещё не опровергает полиномиальной сложности самой задачи.

Несложно показать, что существует решение задачи  $N$  тел с сингулярностью, в любой окрестности начальных условий которого существует решение без сингулярности, продолжимое на всю вещественную ось. Простейшим из таких примеров является решение, в котором два тела сталкиваются, двигаясь навстречу друг другу по одной прямой на большой скорости; малейшее отклонение их траекторий позволяет избежать столкновения. Данный факт свидетельствует о неразрешимости задачи определения наличия сингулярности в задаче  $N$  тел ( $N \geq 2$ ) с вычислимым вещественным  $\mathbf{x}_0$ , так как отношение равенства вещественных чисел алгоритмически неразрешимо.

**3.3. Задача Ситникова.** Дальнейшие рассуждения будут относиться к частному случаю задачи трёх тел, в которой два тела имеют равные массы, а третье тело имеет нулевую массу и находится на прямой, перпендикулярной плоскости движения первых двух тел и проходящей через их центр масс (рис. 1). Таким образом, движение двух тел происходит по невозмущённой (кеplerовской) орбите; в данной задаче рассматривается случай эллиптической орбиты.

Расположим начало координат в центре масс, а ось  $Z$  направим по прямой, на которой лежит траектория третьего тела. Обозначим через  $r(t)$  расстояние от первого тела (и второго, так как их траектории симметричны) до начала координат.

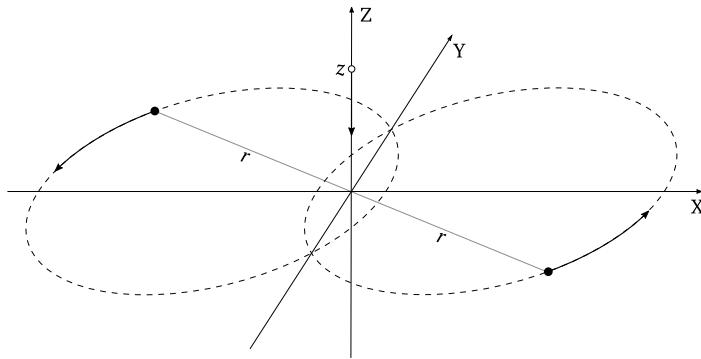


Рис. 1. Задача Ситникова.

По законам ньютонаской механики (2), координата третьего тела, обозначаемая  $z$ , подчиняется следующему дифференциальному уравнению:

$$\ddot{z} = -\frac{2\mu z}{\sqrt{z^2 + r(t)^2}}, \quad (3)$$

где  $\mu$  – гравитационная постоянная первого и второго тел. Периодическая функция  $r(t)$  является частью решения задачи двух тел:

$$\begin{aligned} r(t) &= a(1 - e \cos E(t)), \\ E(t) - e \sin E(t) &= \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_0), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $a$  (большая полуось),  $e$  (эксцентриситет) и  $t_0$  (эпоха) – константы, которые могут быть вычислены из начальных условий двух тел. Здесь

$E(t)$  – угол эксцентрической аномалии. Период функции  $r(t)$  равен  $P = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$ .

Начальными параметрами системы в задаче Ситникова являются:

- $a > 0, e \in (0..1), \mu > 0$  – параметры орбиты двух тел;
- $z_0 = z(0)$  – начальное положение тела на оси  $Z$ ;
- $v_0 = \dot{z}(0)$  – начальная скорость тела по оси  $Z$ ;
- $\phi = E(0), 0 \leq \phi < 2\pi$ , – начальное значение эксцентрической аномалии орбиты двух тел.

Соответственно, вектор состояния системы имеет вид

$$\mathbf{x} = (a, e, \mu, z, v, E).$$

При этом  $a, e$  и  $\mu$  не зависят от времени;  $\dot{z} = v; \dot{v} = \ddot{z}$  из уравнения (3);  $\dot{E}$  выводится из уравнения (4):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= (0, 0, 0, v, \ddot{z}, \dot{E}), \\ \ddot{z} &= -\frac{2\mu z}{\sqrt{z^2 + a^2(1 - e \cos E)^2}}, \\ \dot{E} &= \frac{\sqrt{\mu a}}{1 - e \cos E}.\end{aligned}\tag{5}$$

**Утверждение.** Задача Коши для задачи Ситникова (3) является полиномиально сводимой к задаче Коши для задачи трёх тел (2).

Задача изучения траекторий  $z(t)$  в этой системе была поставлена А. Н. Колмогоровым (см. [11]) под названием “равнобедренная задача трёх тел” (несмотря на устоявшееся использование этого названия для другой классической задачи) и в дальнейшем получила название “задача Ситникова”, благодаря тому, что К. А. Ситников [12] доказал существование осцилляций в этой системе, что явилось первым доказательством осциллирующих движений для задачи трёх тел.

**Теорема 1.** В задаче Ситникова нет сингулярностей, а функция  $\mathbf{f}$  является липшицевой на всей области определения.

**Доказательство.** Из уравнений (3) и (4), а также из того факта, что  $r(t) > 0$ , очевидно, что  $\mathbf{f}$  определена и непрерывна при любых  $z, v, E \in \mathbb{R}$ .

Докажем липшицевость функции  $\mathbf{f}$  через ограниченность всех её частных производных по  $\mathbf{x}$ . Приведём эти частные производные, исключая нулевые производные и производные по константам  $a, e, \mu$ :

$$\partial v / \partial v = 1, \quad (6)$$

$$\partial \ddot{z} / \partial z = -2\mu \left( \frac{1}{w^3} - \frac{3z^2}{w^5} \right), \quad (7)$$

$$\partial \ddot{z} / \partial E = -3\mu z \frac{2a^2(1 - e \cos E) \sin E}{w^3}, \quad (8)$$

$$\partial \dot{E} / \partial E = -\sqrt{\mu a} \frac{e \sin E}{(1 - e \cos E)^2}. \quad (9)$$

(Для краткости введено обозначение  $w = \sqrt{z^2 + a^2(1 - e \cos E)^2}$ .)

Заметим, что все эти функции непрерывны и определены при любых  $z, v, E \in \mathbb{R}$  (для (9) имеет значение, что  $0 < e < 1$ ). Ограничность производных (6) и (9) тривиальна. Ограничность производной (7) следует из того, что при  $z = 0$  эта функция равна  $\frac{-2\mu}{(a(1 - e \cos E))^3}$ , при этом  $\frac{1}{w^3} \rightarrow 0$  и  $\frac{z^2}{w^5} \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \pm\infty$ . Аналогично, ограниченность производной (8) следует из обращения в нуль значения в нуле и на бесконечности ( $\frac{z}{w^3} \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \pm\infty$ ).  $\square$

Следствием теоремы 1 является существование, единственность и вычислимость решения задачи Коши для задачи Ситникова при любых начальных данных (см. раздел 2).

В дальнейшем мы ограничимся частным случаем задачи Ситникова, в котором  $z_0 = 0$ , не принимая в расчёт решения, при которых третье тело улетает на бесконечность, ни разу не пересекая плоскость.

**3.4. Комбинаторные свойства решений задачи Ситникова.** Результат Ситникова об осциллирующих движениях был значительно расширен Алексеевым, который не только обнаружил существование всех классов финальных движений в этой задаче, но и доказал следующую теорему [3].

**Теорема 2.** Для любого достаточно малого эксцентриситета  $e > 0$  найдётся такое число  $t(e)$ , что для любой последовательности  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $s_n \geq t(e)$ , существует решение  $z(t)$  уравнения (3), нули  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  которого удовлетворяют равенству

$$\left\lfloor \frac{\tau_{k+1} - \tau_k}{P} \right\rfloor = s_k \quad \text{для любого } k \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Приведена сокращённая формулировка, не включающая, в частности, конечные и “полубесконечные” последовательности, соответствующие гиперболическим траекториям. Алексеев также доказал обобщение для системы, в которой третье тело имеет ненулевую массу. Более простое доказательство этой теоремы было впоследствии получено Мозером [13].

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением случая  $t \geq 0$ ,  $k \geq 0$  ( $\tau_0 = 0$ ).

**Лемма 1.** *Обозначим через  $C(T)$  множество (конечных) последовательностей вида  $(s_1, \dots, s_k)$ ,  $s_i \geq m > 1$ ,  $s_i \bmod 2 = 0$ ,  $m \bmod 2 = 0$ , для каждой из которых любая последовательность  $(\tau_0, \dots, \tau_{k+1})$ , удовлетворяющая соотношению (10), лежит на отрезке  $[0, T]$  (т.е.  $\tau_{k+1} \leq T$ ). Его мощность  $|C(T)|$  асимптотически ограничена снизу показательной функцией от  $T$ .*

**Доказательство.** Очевидно,  $C((m+1)P) = 1$ . Далее, рассмотрим для некоторого  $T \geq (m+1)P$  отрезок  $[T, T + (m+1)P]$ . Любая последовательность  $(s_1, \dots, s_k) \in C(T)$  может быть продолжена до последовательности из  $C(T + (m+1)P)$  одним из следующих способов:

- $(s_1, \dots, s_k, m) \in C(T + (m+1)P)$ ,
- $(s_1, \dots, s_k + 2i) \in C(T + (m+1)P)$ , для любого  $i$  из интервала  $0 < i \leq m/2$ .

Следовательно,  $|C(T + (m+1)P)| \geq (m/2 + 1)|C(T)|$ , откуда вытекает, что  $|C(T)| \geq (m/2 + 1)^{\frac{T}{(m+1)P}}$  для достаточно больших  $T$ . При  $m > 0$  данная оценка является показательной функцией.  $\square$

**3.5. Оценка сложности задачи Коши для задачи Ситникова.** Докажем две леммы, описывающие свойства решения  $z(t)$ . Первая лемма даёт нижнюю оценку для  $|z(t)|$  между двумя корнями, отстоящими на определённое расстояние друг от друга. В доказательстве этой леммы используется теорема Штурма о сравнении, доказательство которой можно найти, например, в [14].

**Теорема 3** (о сравнении). *Рассмотрим два уравнения:*

$$\dot{x} = -q(t)x \tag{11}$$

$u$

$$\ddot{x} = -Q(t)x, \tag{12}$$

где функции  $q$  и  $Q$  непрерывны. Пусть ненулевое решение  $x(t)$  уравнения (11) обращается в нуль в точках  $a$  и  $b$ , при этом  $Q(t) > q(t)$  при  $t \in [a, b]$ . Тогда любое решение уравнения (12) имеет корень на интервале  $(a, b)$ .

**Лемма 2.** Пусть  $z^*(t)$  – решение задачи Ситникова (3) с параметрами  $a, e, \mu, \phi, v_0$ . В соответствии с ранее сделанными оговорками примем  $z^*(0) = 0$ . Для определённости будем считать, что  $v_0 > 0$  (случай отрицательного  $v_0$  аналогичен из соображений симметрии). Пусть  $\tau$  – наименьший положительный корень функции  $z^*$ . Тогда существует такое  $t \in (0, \tau)$ , что  $z^*(t) \geq h$ , где

$$h = H(\tau) = \sqrt{(2\mu\tau^2/\pi^2)^{2/3} - a^2}. \quad (13)$$

**Доказательство.** Докажем утверждение от противного. Предположим, что

$$z^*(t) < h, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Поскольку  $z^*$  является решением уравнения (3), оно является решением также и уравнения

$$\ddot{z} = -\frac{2\mu z}{\sqrt{z^*(t)^2 + r(t)^2}^3}, \quad (14)$$

в котором множитель при  $z$  зависит только от  $t$ , но не от  $z$ . Обозначим его  $Q(t)$ :

$$\ddot{z} = -Q(t)z. \quad (15)$$

Поскольку  $z^*(t) < h$  (по предположению), а  $r(t) \leq a$ ,

$$Q(t) > \frac{2\mu}{\sqrt{h^2 + a^2}^3}.$$

Обозначив

$$q = 2\mu / \sqrt{h^2 + a^2}^3, \quad (16)$$

запишем дифференциальное уравнение:

$$\ddot{z} = -qz. \quad (17)$$

Поскольку  $q > 0$ , уравнение (17) – это уравнение гармонических колебаний. Рассмотрим его решение  $z^{**}$ , соответствующее начальным условиям  $z(0) = 0, \dot{z}(0) = v_0$ :

$$z^{**}(t) = v_0 \sin(\sqrt{q}t).$$

По теореме Штурма о сравнении между корнями функции  $z^{**}$  – нулём и  $\pi/\sqrt{q}$  – найдётся корень любого решения уравнения (15) и, в частности, корень функции  $z^*$ . Поскольку  $\tau$  был выбран как наименьший положительный корень функции  $z^*$ , имеем  $\tau < \pi/\sqrt{q}$ . Однако из (16) и (13) следует, что  $\tau = \pi/\sqrt{q}$ , противоречие.  $\square$

**Лемма 3.** Пусть функция  $z(t)$  непрерывна и выпукла на отрезке  $[t_1, t_2]$ ; пусть  $z(t_1) = z(t_2) = 0$ ; пусть в некоторой точке  $t \in [t_1, t_2]$  имеем  $z(t) > h > 0$ . Тогда существуют такие  $t_a, t_b \in [t_1, t_2]$ , что  $(t_b - t_a) > \frac{3}{4}(t_2 - t_1)$  и  $z(t) > h/4$  для всех  $t \in (t_a, t_b)$ .

**Доказательство.** Функция  $z(t)$  положительна на интервале  $(t_1, t_2)$  и имеет один (строгий) максимум; обозначим точку максимума  $t_3$ . Обозначим точки следующим образом (рис. 2): А( $t_1, 0$ ), В( $t_3, z(t_3)$ ), С( $t_2, 0$ ). Обозначим через D и E точки пересечения прямой  $z = h/4$  и отрезков АВ и ВС, а через F и G – точки пересечения той же прямой с графиком функции  $z(t)$ .

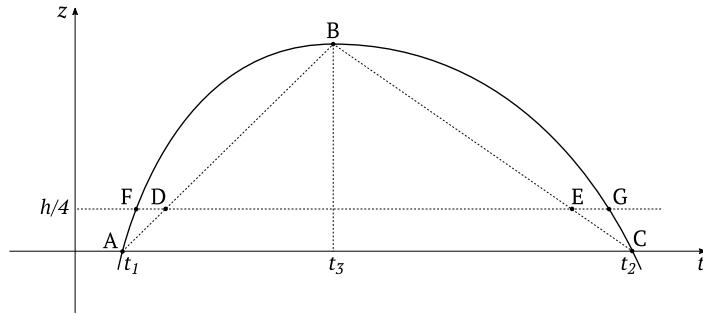


Рис. 2. Пояснение к лемме 3.

Поскольку функция  $z(t)$  выпукла, ее график находится над ломаной АВС, за исключением точек А, В и С (рис. 2). Следовательно, имеем  $|DE| < |FG|$ . При этом, в силу подобия треугольников,  $\frac{|DE|}{|AC|} = 1 - \frac{h/4}{z(t_3)}$ . Так как  $z(t_3) > h$ , а  $|AC| = (t_2 - t_1)$ , получаем  $|FG| > \frac{3}{4}(t_2 - t_1)$ . Абсциссы точек F и G являются искомыми значениями  $t_a$  и  $t_b$ .  $\square$

**Теорема 4.** Задача Коши для задачи Ситникова с любым зафиксированным эксцентриситетом е имеет сложность выше полиномиальной.

**Доказательство.** Докажем утверждение от противного. Предположим, что существует машина Тьюринга  $M$ , вычисляющая функцию решения задачи Коши для задачи Ситникова за время, не превосходящее  $\mathcal{P}(\text{LENGTH}(t), \text{LENGTH}(\varepsilon))$ , где  $\mathcal{P}$  – некоторый полином.

Мы будем рассматривать решения на отрезке  $t \in [0, T]$ ,  $T \in \mathbb{N}$ . По лемме 1 и теореме Алексеева количество  $C(T)$  различных решений  $z(t)$ , формирующих различные последовательности  $(s_1, \dots, s_k)$ , при  $s_k \bmod 2 = 0$ ,  $s_k \geq m$  ( $m \bmod 2 = 0$ ), ограничено снизу величиной  $(m/2 + 1)^{\frac{T}{(m+1)^P}}$ , где  $m$  зависит только от  $e$  (условия теоремы Алексеева допускают нулевые и нечётные  $m$ ; в этом случае округлим  $m$  вверх до ближайшего ненулевого чётного без ущерба доказываемой теореме).

Построим алгоритм восстановления последовательности  $(s_1, \dots, s_k)$ , соответствующей некоторому решению  $z(t)$  для некоторых начальных данных, с использованием машины Тьюринга  $M$ . Выберем параметры  $\delta \in \mathbb{Q}$ ,  $\delta < mP/2$ , и  $\varepsilon = 2^{-l}$  ( $l \in \mathbb{N}$ ),  $\varepsilon < h/4$ , где  $h = H(mP)$ . (Заметим, что  $P$  – вычислимое вещественное число.)

Построим на отрезке  $[0, T]$  равномерную сетку с шагом  $\delta$ ; на каждом узле этой сетки  $\{t_i = i\delta, 0 < i \leq \lfloor T/\delta \rfloor\}$  вычислим решение с точностью  $\varepsilon$ . Перечислим следующие свойства сетки.

- Если  $|z(t_i)| > h/4$ , то из леммы 3 следует, что расстояние от  $t_i$  до ближайшего корня не превышает  $mP/4$ .
- Из предыдущего свойства следует, что на двух соседних узлах сетки значение  $|z|$  не может одновременно быть меньше  $h/4$ .
- Вычисленные значения  $z(t_i)$  в узлах сетки можно разделить на три класса: положительные ( $z > 0$  с учётом заданной точности), отрицательные ( $z < 0$ ) и неопределённые (знак  $z$  не определён в рамках заданной точности).
- Положительные и отрицательные узлы могут следовать произвольное количество раз подряд; неопределённые узлы не могут встречаться более одного раза подряд.
- Из ограничения на расстояние между корнями следует, что если между положительным и отрицательным узлом сетки нет узлов или есть (один) неопределённый узел, то в этом промежутке  $z$  меняет знак ровно один раз.

Из условия на чётность  $s_k$  нетрудно вывести, что  $p$  узлов одного знака, идущих подряд, соответствуют элементу последовательности  $s_k = \lceil (p+1)/2 \rceil$ ; неопределённые узлы не соответствуют никаким  $s_k$ .

Время работы алгоритма восстановления последовательности не имеет значения. Имеет значение то, что все “вызовы” машины Тьюринга  $M$  использовали *одного и того же* оракула для вычисления входных данных. Но в нашем предположении  $M$  может считать не более  $\mathcal{P}(\text{LENGTH}(t_i), \text{LENGTH}(\varepsilon))$  символов с оракульной ленты для каждого  $t_i$ , что не превышает  $\mathcal{P}(\log_2 T, l)$ ; и, следовательно, может в данных условиях выдать не более  $2^{\mathcal{P}(\log_2 T, l)}$  различных результатов. Но алгоритм восстановления последовательности выдаёт любой из не менее чем  $(m/2 + 1)^{T/((m+1)P)}$  результатов, что (при условии  $m > 0$ ) не ограничено указанным полиномом и свидетельствует о противоречии.  $\square$

#### §4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках этой статьи мы рассмотрели формальную постановку задачи о вычислительной сложности задачи Коши. Мы показали, что точная нижняя оценка такой сложности не может быть полиномиальной в случае задачи трех тел. Выбор задачи трех тел и осциллирующих траекторий задачи Ситникова, в принципе, не очень существен. Отсутствие нижней полиномиальной оценки можно получить и в других задачах, где методами символьической динамики строятся траектории со сложным динамическим поведением. Мы уже упоминали во введении гомоклинические траектории, открытые А. Пуанкаре именно в задаче трех тел. Кажется уместным привести здесь цитату из третьего тома его “Новых методов небесной механики” [15]: “Поражаешься сложности этой фигуры, которую я даже не пытаюсь изобразить. Ничто не является более подходящим, чтобы дать нам представление о сложности задачи трех тел и вообще всех задач динамики, в которых нет однозначного интеграла и в которых ряды Болина расходятся”.

Заметим еще, что для интегрируемых задач динамики, если они допускают набор эффективно вычисляемых интегралов движения, то есть интегралов движения, имеющих подходящую верхнюю оценку их вычислительной сложности, зависящую от  $t$  и  $\varepsilon$ , можно получить также и эффективные верхние оценки для сложности решения задачи Коши в нашей формальной постановке. Эти оценки будут полиномиальными по  $\log(t)$  и  $\log(1/\varepsilon)$ . Это указывает на связь оценок алгоритмической сложности задачи Коши и интегрируемости.

В этой статье рассматривается сложность задачи Коши на “макроуровне” (при  $t \rightarrow \infty$ ), но не рассматривается сложность на “микроуровне” при вещественном параметре  $t$ , т.е. асимптотическая зависимость этой сложности от  $\varepsilon$  в случаях, когда играет роль точность задания  $t$ , подобно тому, как это сделано в [1]. Такому исследованию, а также проблемам связи интегрируемости и вычислительной сложности задачи Коши будет посвящена отдельная работа.

## ЛИТЕРАТУРА

1. A. Kawamura, H. Ota, C. Rösnick, M. Ziegler, *Computational complexity of smooth differential equations*. — In: B. Rovan, V. Sassone, P. Widmayer (eds.), Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 7464, Springer-Verlag, 2012, pp. 578–589.
2. J. H. Reif, S. R. Tate, *The complexity of N-body simulation*. — In: Proceedings of the 20th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP'93), Springer-Verlag, London, 1993, pp. 162–176.
3. В. М. Алексеев, *Финальные движения в задаче трёх тел и символическая динамика*. — Успехи мат. наук **36**, вып. 4 (1981), 161–175.
4. J. V. Burke, *Ordinary Differential Equations. Existence and Uniqueness Theory*, Math 555 Course Notes (Linear Analysis), University of Washington, 2015; [www.math.washington.edu/~burke/crs/555/555\\_notes/exist.pdf](http://www.math.washington.edu/~burke/crs/555/555_notes/exist.pdf).
5. P. Collins, D. S. Graça, *Effective computability of solutions of ordinary differential equations. The Thousand Monkeys Approach*. — Electron. Notes Theoret. Comput. Sci. **221**, No. 25 (2008), 103–114.
6. S. Matculevich, P. Neittaanmäki, S. Repin, *Guaranteed error bounds for a class of Picard–Lindelöf iteration methods*. — In: S. Repin, T. Tiihonen, T. Tuovinen (eds.), Computational Methods in Applied Sciences, Vol. 27: Numerical Methods for Differential Equations, Optimization, and Technological Problems, Springer Netherlands, 2013, pp. 175–189.
7. К. И. Бабенко, *Основы численного анализа*, Регулярная и хаотическая динамика, Москва–Ижевск, 2002.
8. К. В. Холшевников, В. Б. Титов, *Задача двух тел. Учебное пособие*, С.-Петербургский государственный университет, 2007; [www.astro.spbu.ru/sites/default/files/TwoBody.pdf](http://www.astro.spbu.ru/sites/default/files/TwoBody.pdf).
9. M. D. Belorizsky, *Application pratique des méthodes de M. Sundman à un cas particulier du problème des trois corps*. — Bull. Astron. **6**, No. 2 (1930), 417–434.
10. Г. А. Мерман. — Бюллетень Института теоретической астрономии АН СССР **10(83)** (1958), 713.
11. В. Тихомиров, *Жизнь математика. Слово о друге – Владимира Михайловиче Алексееве*, МЦНМО, Москва, 2012.
12. К. А. Ситников, *Существование осциллирующих движений в задаче трёх тел*. — Докл. АН СССР **133**, вып. 2 (1960), 303–306.
13. J. Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems with Special Emphasis on Celestial Mechanics*, Princeton Univ. Press, 1973.

14. А. И. Буфетов, Н. Б. Гончарук, Ю. С. Ильяшенко, *Введение в теорию Штурма–Лиувилля*, 2015; <http://www.dyn-sys.org/public/ODE-notes/shturm.pdf>.
15. H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Vol. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1892.

Vasiliev N. N., Pavlov D. A. Computational complexity of the initial value problem for the three-body problem.

The paper deals with the computational complexity of the initial value problem (IVP) for a system of ordinary dynamical equations. A formal statement of the problem is given, containing a Turing machine with an oracle for getting the initial values as real numbers. It is proven that the computational complexity of the IVP for the three-body problem is not bounded by a polynomial. The proof is based on oscillatory solutions for the Sitnikov problem that have complex dynamical behavior. These solutions prevent the existence of an algorithm that solves the IVP in polynomial time.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН;  
С.-Петербургский государственный  
электротехнический университет  
С.-Петербург, Россия  
*E-mail:* vasiliev@pdmi.ras.ru

Поступило 17 октября 2016 г.

Институт прикладной астрономии  
наб. Кутузова 10, С. Петербург, Россия  
*E-mail:* dpavlov@iaaras.ru