

Н. Н. Васильев, В. С. Дужин

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИКИ
ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПУТЕЙ В БЛИЗКОМ К
ЦЕНТРАЛЬНОМУ МАРКОВСКОМ ПРОЦЕССЕ НА
ТРЕХМЕРНОМ ГРАФЕ ЮНГА**

§1. ВВЕДЕНИЕ

Трехмерные диаграммы Юнга, известные также как *плоские разбиения*, представляют собой наборы последовательно вложенных друг в друга двумерных диаграмм Юнга. На рис. 1 приведены примеры трехмерных диаграмм Юнга. Отдельными оттенками выделены двумерные слои, из которых состоят приведенные трехмерные диаграммы.

На двумерных графах Юнга и Шура, вершинами которых являются стандартные и строгие диаграммы Юнга соответственно, существует процесс Планшереля, обладающий свойством центральности [1–4]. Центральность процесса означает, что вероятности всех путей, ведущих в одну и ту же диаграмму, одинаковы. Процесс Планшереля как на графе Юнга, так и на графе Шура не является единственным центральным процессом. Однако он выделен тем свойством, что высота и ширина диаграмм растут медленнее любой линейной функции [5].

На трехмерном графе Юнга предположительно существует единственный центральный процесс с медленным ростом глубины, ширины и высоты диаграммы, однако точные значения переходных вероятностей для такого процесса пока неизвестны. В работе [6] рассмотрен процесс на трехмерном графе Юнга, в некотором смысле близкий к центральному. Будем называть этот процесс *псевдопланшерелевским*. В этом процессе формулы переходных вероятностей для диаграммы λ задаются с помощью весовой функции, зависящей от длин трехмерных крюков:

Ключевые слова: трехмерные диаграммы Юнга, трехмерный граф Юнга, процесс Планшереля, марковский центральный процесс, предельная форма.

Работа поддержана грантом РФФ 14-11-00581.

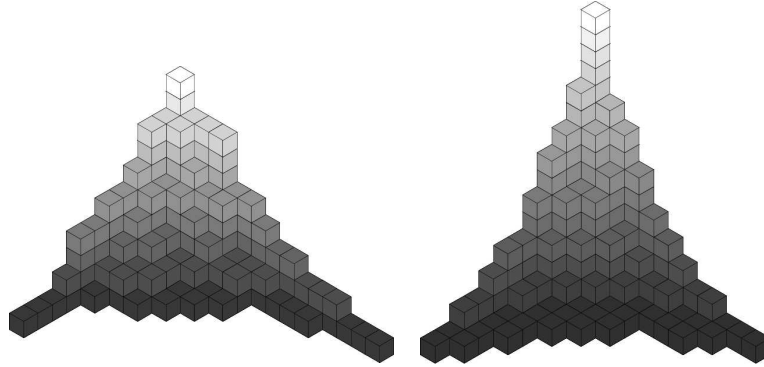


Рис. 1. Примеры трехмерных диаграмм Юнга.

$$w(\lambda, x, y, z) = \prod_{i=0}^{x-1} \frac{h(\lambda, i, y, z)}{h(\lambda, i, y, z) + 1} \prod_{j=0}^{y-1} \frac{h(\lambda, x, j, z)}{h(\lambda, x, j, z) + 1} \prod_{k=0}^{z-1} \frac{h(\lambda, x, y, k)}{h(\lambda, x, y, k) + 1}, \quad (1)$$

где x, y, z – координаты добавляемой клетки, а $h(\lambda, x, y, z)$ – длина трехмерного крюка диаграммы λ с вершиной в точке с координатами x, y, z .

Псевдопланшерелевские вероятности находятся делением значений весов, вычисленных по формуле (1), на сумму всех этих значений. В [6] были исследованы пути, соединяющие пары диаграмм размеров n и $n + k$, где $k \approx \sqrt[3]{n}$, на интервалах до $n \leq 300000$. Было показано, что отношения вероятностей различных путей не превышают нескольких процентов, даже когда пути существенно отличаются. В рамках этой работы данное свойство было программно проверено уже на интервале до $n \leq 10^6$. Это дало основание полагать, что многие свойства данного марковского процесса аналогичны свойствам неизвестного центрального процесса. В частности, возможно, что предельная форма диаграмм в этом процессе совпадает с предельной формой диаграмм в точном центральном процессе.

Настоящая статья посвящена компьютерному исследованию асимптотики вероятностей путей в псевдопланшерелевском процессе. Нами были построены последовательности, в которых при переходе на

следующий уровень выбирается ребро с максимальной псевдопланшерелевской вероятностью. Каждый такой шаг мы называем *жадным приращением*, а получаемые последовательности – *жадными последовательностями*. *Жадный путь* – это путь на графе Юнга, каждый шаг которого является жадным приращением.

К такой жадной последовательности стремятся типичные пути однопараметрического семейства марковских процессов, в которых весовыми функциями для переходных вероятностей служат степени псевдопланшерелевских вероятностей p^α при $\alpha \rightarrow \infty$.

§2. АСИМПТОТИКА ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПУТЕЙ

В двумерном случае существует эффективный способ вычислять количество путей, ведущих в диаграмму, т.е. размерность диаграммы:

$$\dim(\lambda) = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h(i,j)},$$

где n – размер диаграммы λ , а $h(i,j)$ – длина двумерного крюка в точке с координатами (i,j) .

Работа [7] была посвящена компьютерному исследованию асимптотики типичных и максимальных нормализованных размерностей двумерных диаграмм Юнга.

В трехмерном же случае формула для вычисления количества путей, соединяющих диаграммы, неизвестна, и это существенно затрудняет изучение асимптотики размерностей трехмерных диаграмм. В данной работе мы исследуем асимптотику вероятностей путей в диаграммы в описанном выше псевдопланшерелевском процессе. Поскольку значения вероятностей путей очень быстро уменьшаются с ростом размера диаграмм, необходимо использовать какой-либо процесс нормализации. Мы предлагаем следующую формулу для нормализованной размерности пути в трехмерную диаграмму λ :

$$c(\lambda) = -\frac{\sum_{i=1}^n \log p_i + \frac{2}{3} \cdot n \cdot \log n}{n}, \quad (2)$$

где n – размер диаграммы, а p_i – вероятность i -го перехода.

Заметим, что формула для нормализованной размерности (2) зависит не только от самой диаграммы λ , но и от пути к ней. В случае,

если c имеет некоторое предельное значение C , величина, обратная к вероятности пути длины n , растет как $e^{(n!)^{\frac{2}{3}}} \cdot e^{-Cn}$.

Для каждой диаграммы из жадной последовательности длины $15 \cdot 10^6$ мы вычислили нормализованную размерность пути до этой диаграммы. Аналогичным образом нормализованные размерности c вычислялись для типичных путей псевдопланшерелевского процесса. Экспериментально установлено, что при больших n выполняются следующие неравенства. Для типичных псевдопланшерелевских путей $c > -0.67548$, для жадного пути $c > -0.759212$.

На рис. 2 изображены графики нормализованных размерностей жадного и случайного путей псевдопланшерелевского процесса.

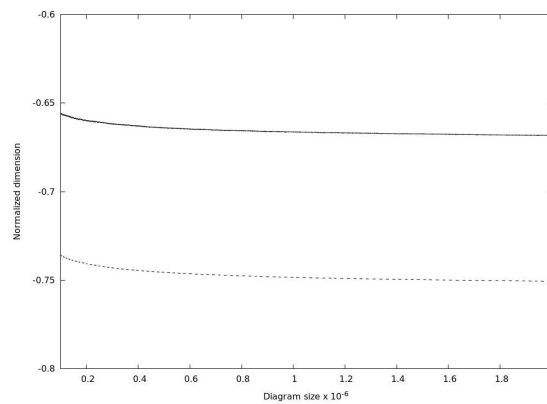


Рис. 2. Нормализованные размерности жадного пути (пунктирная линия) и случайного пути (сплошная линия) псевдопланшерелевского процесса.

§3. СЛИЯНИЕ ЖАДНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В статье [8] было высказано предположение, что в двумерном случае жадные последовательности, берущие свое начало от любой пары двумерных диаграмм Юнга, сливаются через конечное число шагов.

Это утверждение было проверено многочисленными вычислительными экспериментами. В ходе данной работы были проведены аналогичные эксперименты, но уже с жадными путями псевдопланшерелевского процесса на трехмерном графе Юнга. Было сгенерировано 5000 пар случайных диаграмм размера 5000. В этом эксперименте количество шагов, необходимое для слияния пар жадных путей, находилось в интервале от 600 до 3000. Контрпримеров к гипотезе слияния жадных последовательностей найдено не было.

§4. ИССЛЕДОВАНИЕ РОСТА НОРМАЛИЗОВАННЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Сходимость нормализованных размерностей к предельному значению не доказана даже в двумерном случае. В трехмерном случае возможные значения для пределов нормализованных размерностей были оценены исходя из предположения, что нормализованные размерности убывают как функция вида $a + b \cdot n^{-\frac{1}{3}}$ при некоторых значениях параметров a, b . Наши эксперименты показали, что, несмотря на осцилляции функции нормализованной размерности, она очень хорошо аппроксимируется формулой этого вида.

Оценка возможных значений параметров a и b производилась по методу наименьших квадратов на интервале до $n = 2 \cdot 10^6$ с длиной плавающего окна равной 10^5 . На рис. 3 а) пунктирной линией отмечен предполагаемый предел жадной последовательности, сплошными линиями – нормализованные размерности и функция аппроксимации (в таком масштабе они практически неразличимы). На рис. 3 б) изображен фрагмент этого графика: сплошная линия представляет собой нормализованные размерности, пунктирная – аппроксимирующую функцию. Соответствующие графики для псевдопланшерелевской последовательности изображены на рис. 3 в) и г).

§5. ИССЛЕДОВАНИЕ ОСЦИЛЛЯЦИЙ ФУНКЦИИ НОРМАЛИЗОВАННОЙ РАЗМЕРНОСТИ В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Как в двумерном, так и в трехмерном случае функция нормализованной размерности очень сильно осциллирует. Эти осцилляции соответствуют скачкам планшерелевских вероятностей при добавлении в жадном пути очередной клетки. Для исследования этих осцилляций мы рассматриваем первый ряд разностей значений нормализованных

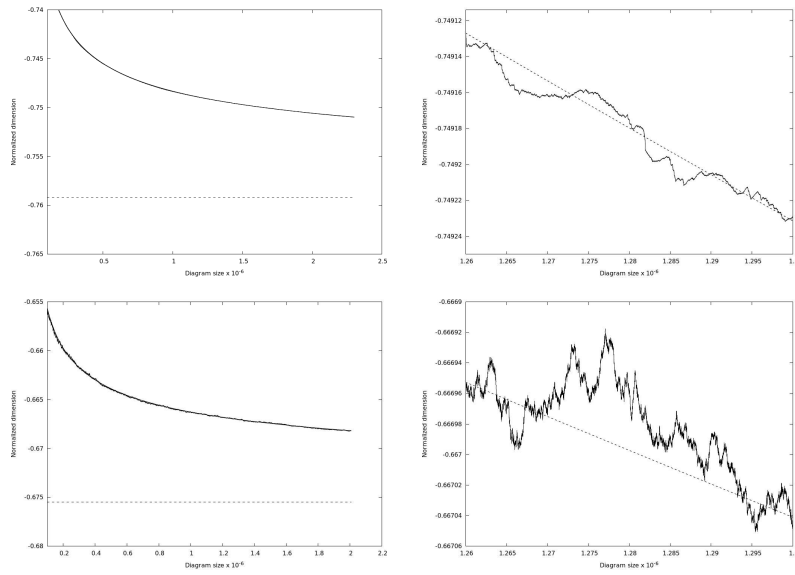


Рис. 3. Оценки пределов: а), б) – жадного пути псевдопланшерелевского процесса, г) д) – случайного пути псевдопланшерелевского процесса.

размерностей диаграмм последовательности, то есть их дискретную производную.

Осцилляции планшерелевских вероятностей в жадных последовательностях на двумерных графах Юнга и Шура были исследованы в статье [9]. Для случая жадной последовательности диаграмм планшерелевского процесса на стандартном двумерном графе Юнга график разностей нормализованных размерностей, домноженных на \sqrt{n} , приведен на рис. 4.

Мы видим, что этот график представляет собой объединение некоторого количества дискретных ветвей. В этой статье аналогичным методом исследованы осцилляции функции нормализованной размерности (2) в трехмерном случае. На рис. 5 изображены осцилляции нормализованных размерностей, домноженных на n , в трехмерной жадной последовательности.

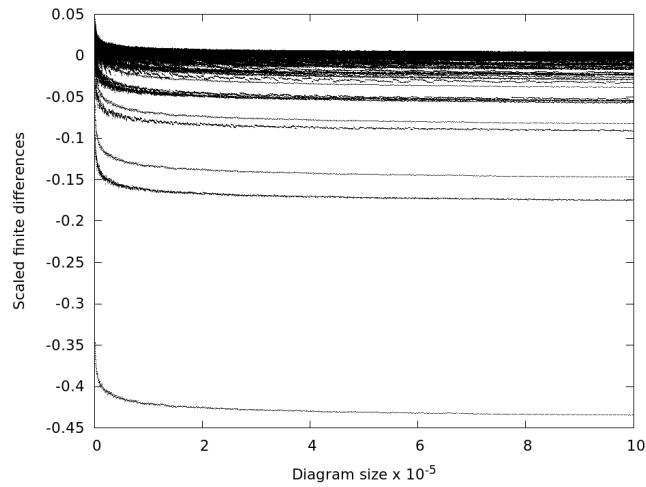


Рис. 4. Нормализованные разности нормализованных размерностей диаграмм в двумерном жадном пути.

Изображенный на рис. 5 график осцилляций нормализованных размерностей также состоит из отдельных ветвей, на которых лежат значения этой функции. Мы исследовали значения n , при которых величины скачков нормализованных размерностей в жадных последовательностях лежат на определенной ветви.

На рис. 6 изображены диаграммы из жадной последовательности с размерами 614 – 616 клеток. Белым цветом выделены угловые клетки диаграмм. Как видно из рисунка, после жадного приращения клетки к диаграмме б) в центральной плоской части фронта завершается заполнение участка, состоящего исключительно из угловых клеток. Было замечено, что в жадной последовательности на отрезке до двух миллионов клеток во всех подобных случаях разность нормализованных размерностей двух соседних диаграмм оказывается минимальной. Значения таких разностей формируют нижнюю ветвь на графике из рис. 5. Переходы, подобные приращению клетки к диаграмме а), формируют вторую снизу ветвь.

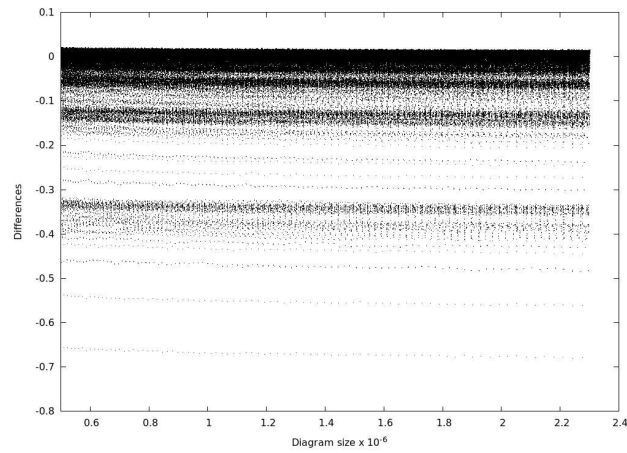


Рис. 5. Нормализованные разности нормализованных размерностей диаграмм в трехмерном жадном пути.

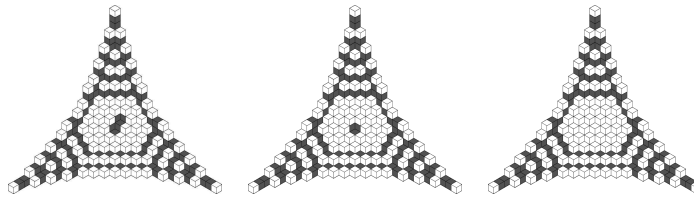


Рис. 6. Диаграммы из жадной последовательности размера а) 614, б) 615, в) 616.

§6. НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ПРЕДЕЛЬНОЙ ФОРМЕ ДИАГРАММ ИЗ ЖАДНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В настоящей статье мы не изучаем подробно вопросы, связанные с предельной формой трехмерных диаграмм. Вопросам аппроксимации формы фронта диаграмм в однопараметрическом семействе марковских процессов, включающем в себя псевдопланшерелевский, будет посвящена отдельная работа. Здесь же мы ограничимся несколькими наблюдениями.

1. Линии предельного фронта, лежащие на координатных плоскостях, являются точными планшерелевскими кривыми [6]. Это легко увидеть из формулы для переходных вероятностей (1), так как значения условных вероятностей при добавлении клетки в координатную плоскость совпадают с планшерелевскими вероятностями двумерного процесса. То есть рост диаграмм, высекаемых на фронте координатными плоскостями, является планшерелевским.

2. На рис. 7 изображен контур диаграммы из жадной последовательности размером $15 \cdot 10^6$ клеток (внешние кривые). Нами были рассмотрены сечения фронта диаграммы плоскостями, перпендикулярными биссектрисе трехгранного угла. Внутренний замкнутый контур, изображенный на рис. 7, представляет собой максимальное замкнутое сечение, которое касается внешних кривых на координатных плоскостях. Внешние кривые на рис. 7 являются точными планшерелевскими [6]. Контур диаграмм из жадной и псевдопланшерелевской последовательностей совпадают с очень высокой точностью.

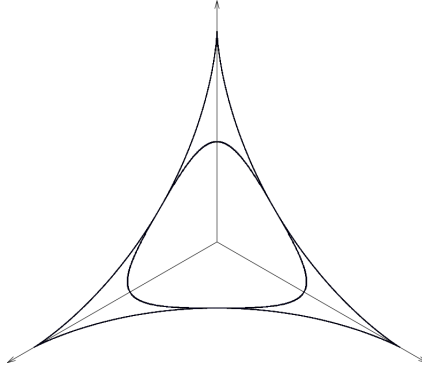


Рис. 7. Контур максимального замкнутого сечения и координатные кривые для диаграммы из 15 миллионов клеток.

3. Компьютерные эксперименты показывают, что поперечник диаграммы, то есть расстояние от начала координат до точки фронта с координатами $x = y = z$, растет как $\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \sqrt[3]{n}$. Это означает, что соответствующая точка предельной поверхности имеет координаты $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$.

§7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой статье мы продемонстрировали результаты компьютерных экспериментов, посвященных изучению специального марковского процесса на трехмерном графе Юнга. По сравнению с работой [6], алгоритмы и программы, разработанные в рамках реализации этой работы, позволили проводить компьютерные эксперименты с диаграммами, состоящими из миллионов клеток. Такой размер диаграмм позволяет с достаточной надежностью исследовать асимптотические характеристики диаграмм в марковских процессах на трехмерном графе Юнга. Еще одной мотивацией изучения описанного выше псевдопланшерелевского процесса является то, что мы предполагаем в будущем использовать его как начальное приближение в итерационной последовательности марковских процессов, сходящихся к центральному.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Асимптотическая теория характеров симметрической группы*. — Функци. анал. и его прил. **15**, вып. 4 (1981), 15–27.
2. Л. Петров, *Случайные блуждания на строгих разбиениях*. — Зап. научн. семина. ПОМИ **373** (2009), 226–272.
3. М. Л. Назаров, *Ортогональный базис в неприводимых проективных представлениях симметрической группы*. — Функци. анал. и его прил. **22**, вып. 1 (1988), 77–78.
4. А. М. Бородин, *Мультипликативные центральные меры на графе Шура*. — Зап. научн. семина. ПОМИ **240** (1997), 44–52.
5. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Асимптотика максимальной и типичной размерностей неприводимых представлений симметрической группы*. — Функци. анал. и его прил. **19**, вып. 1 (1985), 25–36.
6. Н. Н. Васильев, А. Б. Терентьев, *Моделирование мер, близких к центральным, на трехмерном графе Юнга*. — Зап. научн. семина. ПОМИ **432** (2015), 68–82.
7. А. М. Вершик, Д. А. Павлов, *Численные эксперименты в задачах асимптотической теории представлений*. — Зап. научн. семина. ПОМИ **373** (2009), 77–93.
8. Н. Н. Васильев, В. С. Дужин, *Построение неприводимых представлений симметрической группы $S(n)$ с большими и максимальными размерностями*. — Информ.-упр. системы **3** (2015), 17–22.
9. V. S. Duzhin, N. N. Vasilyev, *Asymptotic behavior of normalized dimensions of standard and strict Young diagrams – growth and oscillations*. — J. Knot Theory Ramifications **26** (2016).

Vasiliev N. N., Duzhin V. S. Numerical investigation of the asymptotics of the probabilities of paths in a Markov process on the 3D Young graph close to a central one.

The article is devoted to the investigation of the asymptotics of the probabilities of paths in a certain Markov process on the 3D Young graph. We introduce a normalized dimension of paths. We study the growth and oscillations of normalized dimensions along greedy trajectories of this process using computer experiments.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский государственный
электротехнический университет
С.-Петербург, Россия
E-mail: vasiliev@pdmi.ras.ru

Поступило 10 октября 2016 г.

С.-Петербургский государственный
электротехнический университет
С.-Петербург, Россия
E-mail: vduzhin.science@gmail.com