Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 448, 2016 г.

А. В. Алпеев

АНОНС ЭНТРОПИЙНОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ГИББСОВСКИХ МЕР

В работе Боуэна [5] был определён новый инвариант софических групп – софическая энтропия. Подсчёт её для бернуллиевских действий в той же работе привёл к серьёзному прогрессу в проблеме изоморфизма бернуллиевских действий. В отличие от классического (аменабельного) случая, софическая энтропия, вообще говоря, зависит от выбора софической аппроксимации. Пример подобного явления можно найти в работе Кардери [9]. В анонсируемом результате, теореме 3, мы укажем класс действий, для которых софическая энтропия не зависит от софической аппроксимации, а также приведём для неё явную формулу. Более того, общее значение софической энтропии будет совпадать с рохлинской энтропией действия (то есть инфимумом шенноновских энтропий порождающих разбиений). Последний инвариант, по-видимому, достаточно сложно посчитать в неаменабельном случае: ранее это было сделано только для бернуллиевских сдвигов, а также в некоторых случаях нулевой энтропии. Замечу, что кроме случая бернуллиевских действий софическая энтропия была посчитана для некоторого класса алгебраических действий в работах [7, 15].

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант 14-21-00035. Часть результатов была получена во время моего визита в Вену для участия в программе по измеримой теории групп, а также во время моего визита в Будапешт в декабре 2015 года. Беседы с участниками программы в Вене и с сотрудниками будапештской группы были неоценимо полезны в работе над анонсируемыми результатами. Благодарю Миклоша Аберта и Брэндана Сюарда за полезные обсуждения. Благодарю также моего научного руководителя, Анатолия Моисеевича Вершика, за замечания и обсуждения. Благодарю сотрудников лаборатории имени П. Л. Чебышёва за благоприятную рабочую атмосферу и плодотворные обсуждения.

Ключевые слова: софическая группа, софическая энтропия, рохлинская энтропия, порождающее разбиение, гиббсовская мера, условие единственности Добрушина.

Значок $\Subset$ будет обозначать конечное подмножество. Буквой e всегда будем обозначать единичный элемент группы. Пространство вероятностных мер $\mathcal{M}(X)$ на метрическом компакте X всегда будем снабжать $*$-слабой топологией. Вероятностным ядром мы называем непрерывное аффинное отображение $\pi : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(Y)$ для двух метрических компактов X, Y. Вероятностное ядро однозначно определяется своими значениями на δ-мерах; более того, любому непрерывному отображению $X \to \mathcal{M}(Y)$ можно естественным образом сопоставить ядро $\mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(Y)$.

Если G – группа, а A – конечное множество, то можно задать естественное сдвиговое действие группы G на множестве A^G, снабженном топологией произведения, формулой

$$(gx)(h) = x(hg)$$

для всех $x \in A^G$ и $g, h \in G$. Заметим, что это действие непрерывно. Определим отображение ограничения pr_D из A^G в A^D для $D \subset G$.

Пусть $\varphi : A^G \to \mathbb{R}$ – функция, такая, что для некоторого конечного подмножества $D \subset G$ значение $\varphi(x)$ определяется однозначно по $\mathrm{pr}_D(x)$. В качестве D зафиксируем наименьшее по включению такое множество. Заметим, что функция φ будет с необходимостью непрерывна; назовём её потенциалом. Определим семейство вероятностных ядер $\{\pi_\Lambda\}$, индексированное всеми конечными подмножествами группы G. Для точки $x \in A^G$ определим $\pi_\Lambda(\delta_x)$ как меру, сосредоточенную на (конечном) множестве таких точек $y \in A^G$, что $\mathrm{pr}_{G\setminus\Lambda}(y) = \mathrm{pr}_{G\setminus\Lambda}(x)$, и удовлетворяющую условию, что мера точки y из этого множества пропорциональна $e^{-\sum_{Dg\cap\Lambda\neq\varnothing}\varphi(gy)}$. *Гиббсовской мерой* для потенциала φ будем называть любую меру μ, удовлетворяющую условию $\pi_\Lambda(\mu) = \mu$ для всех $\Lambda \Subset G$. Известно, что множество гиббсовских мер непусто.

Для борелевской меры μ будем обозначать через $\|\mu\|$ норму полной вариации:

$$\|\mu\| = \sup_{A,B}\{\mu(A) - \mu(B)\},$$

где супремум берётся по всем парам A, B измеримых подмножеств.

Зафиксируем какой-нибудь потенциал φ, и пусть $\{\pi_\Lambda\}$ – соответствующее семейство вероятностных ядер. Для $g \in G \setminus \{e\}$ определим

$$b_g = \sup_{x,y}\left\|\mathrm{pr}_{\{e\}}(\pi_{\{e\}}(\delta_x)) - \mathrm{pr}_{\{e\}}(\pi_{\{e\}}(\delta_y))\right\|,$$

где супремум берётся по всем таким парам элементов $x, y \in A^G$, что $\mathrm{pr}_{G\setminus\{g\}}(x) = \mathrm{pr}_{G\setminus\{g\}}(y)$. Положим теперь

$$b_* = \sum_{g\in G\setminus\{e\}} b_g.$$

Будем говорить, что потенциал φ удовлетворяет *условию единственности Добрушина*, если $b_* < 1$.

Теорема 1 (Добрушин [10]). *Если потенциал удовлетворяет условию Добрушина, то гиббсовская мера единственна.*

Несложно видеть, что единственная гиббсовская мера с необходимостью будет инвариантной.

Пусть X – стандартное вероятностное или борелевское пространство. *Разбиением* будем называть не более чем счётный набор его дизъюнктных измеримых подмножеств, объединение которых есть всё пространство. Иногда бывает полезно рассматривать разбиение как частный случай подалгебры. *Шенноновская энтропия* разбиения α на стандартном вероятностном пространстве (X, μ) определяется формулой

$$H(\alpha) = -\sum_{B\in\alpha} \mu(B)\log(\mu(B)),$$

с обычной договорённостью, что $0\log 0 = 0$. Если μ – мера на не более чем счётном множестве, то её энтропия $H(\mu)$ определяется как энтропия (единственного, очевидно) разбиения на одноточечные подмножества.

Для двух разбиений α, β обозначим

$$\alpha \vee \beta = \{A \cap B | A \in \alpha, B \in \beta, A \cap B \neq \varnothing\}.$$

Мы будем обозначать через

$$H(\alpha|\beta) = H(\alpha \vee \beta) - H(\beta)$$

относительную шенноновскую энтропию. Для разбиения α и σ-подалгебры $\mathscr{A}$ определим

$$H(\alpha|\mathscr{A}) = \inf_\beta H(\alpha|\beta)$$

(инфимум берётся по всем $\mathscr{A}$-измеримым разбиениям β конечной шенноновской энтропии) – *шенноновскую энтропию относительно подалгебры.* Известно, что результат не изменится, если мы возьмём вместо этого инфимум по всем $\mathscr{A}$-измеримым конечным разбиениям.

Определим каноническое алфавитное разбиение α для A^G как разбиение, элементы которого – прообразы одноточечных множеств при отображении $\mathrm{pr}_{\{e\}}$.

Зафиксируем сохраняющее меру действие группы G на стандартном вероятностном пространстве (X,μ). Для разбиения α и элемента $g \in G$ будем обозначать $\alpha^g = \{g^{-1}(B)|B \in \alpha\}$. Для $F \subset G$ обозначим $\alpha^F = \bigvee_{g\in F} \alpha^g$. Имеет смысл рассматривать α^F как разбиение для конечных F и как подалгебру в противном случае. Будем говорить, что разбиение α *порождающее*, если подалгебра α^G эквивалентна μ-mod 0 подалгебре всех измеримых множеств. Известно, что α является порождающим разбиением, если существует такое подмножество полной меры X' пространства X, что точки $x, y \in X'$ не равны только при условии наличия такого $g \in G$, что $g(x)$ и $g(y)$ принадлежат различным элементам разбиения α.

Рохлинская энтропия определяется как инфимум шенноновских энтропий порождающих разбиений относительно подалгебры инвариантных множеств:

$$h_{\mathrm{Rok}} = \inf\{H(\alpha|\mathscr{I}),\ \alpha \text{ – порождающее разбиение}\},$$

где $\mathscr{I}$ обозначает подалгебру инвариантных множеств. Для эргодических систем это определение, очевидно, редуцируется до простого инфимума шенноновских энтропий порождающих разбиений.

Для конечного множества R будем обозначать через $\mathrm{Sym}(R)$ группу всех его перестановок. Определим нормализованное расстояние Хэмминга d_H на $\mathrm{Sym}(R)$ формулой

$$d_H(g_1, g_2) = \frac{|\{r \in R,\ g_1(r) \neq g_2(r)\}|}{|R|}.$$

Пусть G – счётная группа. *Софическая аппроксимация* этой группы есть последовательность конечных множеств $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ и последовательность отображений $\{\sigma_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\sigma_i^{\cdot} : G \to \mathrm{Sym}(V_i)$, таких, что

(1) для всех различных элементов g_1, g_2 из G имеет место соотношение $\lim\limits_{i\to\infty} d_H(\sigma_i^{g_1}, \sigma_i^{g_2}) = 1$;

(2) для всех пар элементов g_1, g_2 из G имеет место соотношение $\lim\limits_{i\to\infty} d_H(\sigma_i^{g_1} \circ \sigma_i^{g_2}, \sigma_i^{g_1 g_2}) = 0$.

Группа называется *софической*, если у неё есть софическая аппроксимация. С этого момента G – софическая группа с фиксированной софической аппроксимацией.

Пусть A – конечное множество. Зададим отображения $\theta_v : A^{V_i} \to A^G$ формулой $(\theta_v(\tau))\,(g) = \tau(\sigma_i^g(v))$. Пусть ν – инвариантная относительно сдвигового действия мера на A^G. Зафиксируем произвольную метрику l, задающую $\star$-слабую топологию на $\mathcal{M}(A^G)$. Для $\varepsilon > 0$ и $i \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathrm{Hom}(i, \varepsilon)$ множество всех таких $\tau \in A^{V_i}$, что

$$l\left(\frac{1}{|V_i|}\sum_{v \in V_i} \delta_{\theta_v(\tau)}, \nu\right) < \varepsilon.$$

Тогда *софическая энтропия* сдвигового действия с мерой ν определяется формулой

$$h(\nu) = \inf_{\varepsilon > 0} \limsup_{i \to \infty} \frac{\log|\mathrm{Hom}(i, \varepsilon)|}{|V_i|}.$$

Софическая энтропия была введена Боуэном в [5]. Заметим, что в приведённом выше определении мы опирались на структуру сдвигового пространства. На самом же деле эта величина зависит только от метрической структуры действия, что было показано Боуэном (см. также [16]).

Пусть G – свободная группа со свободными образующими $s_1, \ldots, s_m$. Зафиксируем сохраняющее меру действие этой группы на стандартном вероятностном пространстве. Предположим, что оно обладает конечным порождающим разбиением α. Обозначим через C_r шар радиуса r в словарной метрике, порождённой множеством $\{s_1^{\pm}, \ldots, s_m^{\pm}\}$, с центром в единичном элементе группы. Определим *f-инвариант* данного действия как

$$h_f = \inf_{r \in \mathbb{N}} \left\{(1 - 2m) H(\alpha^{C_r}) - \sum_{i=1}^{m} H(\alpha^{C_r \cup s_i C_r})\right\}.$$

В статье [4] Боуэн ввёл эту величину и доказал, что она не зависит от выбора конечного порождающего разбиения. Он показал также, что для бернуллиевских действий значение этого инварианта совпадает с шенноновской энтропией базы, что повлекло решение проблемы изоморфизма бернуллиевских действий свободных групп.

В работе [15] Хейс, опираясь на результат статьи [6], доказал, что если софическая энтропия существенно свободного действия не зависит от софической аппроксимации, то f-инвариант равен её общему значению.

В препринте [22] Сюард доказал нетривиальную верхнюю оценку для рохлинской энтропии. Введём некоторые обозначения, чтобы сформулировать её. Пусть G – счётная группа, действующая сохраняющим меру образом на стандартном вероятностном пространстве X. Пусть $(\xi_g)_{g\in G}$ – процесс, состоящий из независимых одинаково распределённых величин, где каждая случайная величина ξ_g распределена равномерно на единичном интервале. Пусть L_ξ обозначает подмножество всех таких $g \in G$, что $\xi_g < \xi_e$.

Теорема 2 (Сюард [22])**.** *Пусть α – порождающее разбиение для существенно свободного сохраняющего меру действия счётной группы G. Тогда рохлинская энтропия данного действия ограничена сверху выражением $\mathbb{E}_\xi H(\alpha|\alpha^{L_\xi})$.*

Теперь всё готово для формулировки анонсируемой теоремы.

Теорема 3. *Пусть G – софическая группа, A – конечное множество. Пусть φ – потенциал, удовлетворяющий условию единственности Добрушина. Пусть α – каноническое порождающее разбиение. Тогда софическая энтропия сдвигового действия, снабженного (единственной) гиббсовской мерой, не зависит от софической аппроксимации. Её значение совпадает с рохлинской энтропией и выражается формулой $\mathbb{E}_\xi H(\alpha|\alpha^L)$. Если группа G – конечно порождённая свободная, то последнее значение совпадает и с f-инвариантом.*

Таким образом, для указанного класса действий оценка Сюарда оказывается точной. Отметим также, что для любого потенциала φ существует такое положительное число β, что потенциал $\beta\varphi$ удовлетворяет условию Добрушина.

Литература

1. A. Alpeev, *The entropy of Gibbs measures on sofic groups.* — Zap. Nauchn. Semin. POMI **436** (2015), 34–48.
2. A. Alpeev, B. Seward, *Kriegers's finite generator theorem for actions of countable groups* III, готовится.
3. C. Borgs, J. Chayes, J. Kahn, L. Lovász, *Left and right convergence of graphs with bounded degree.* — Random Structures Algorithms **42**, No. 1 (2013), 1–28.
4. L. Bowen, *A measure conjugacy invariant for actions of free groups.* — Ann. Math. **171**, No. 2 (2010), 1387–1400.
5. L. Bowen, *Measure conjugacy invariants for actions of countable sofic groups.* — J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), 217–245.

6. L. Bowen, *The ergodic theory of free group actions: entropy and the f-invariant.* — Groups Geom. Dyn. **4**, No. 3 (2010), 419–432.
7. L. Bowen, *Entropy for expansive algebraic actions of residually finite groups.* — Ergodic Theory Dynam. Systems **31**, No. 3 (2011), 703–718.
8. L. Bowen, H. Li, *Harmonic models and spanning forests of residually finite groups.* — J. Funct. Anal. **263**, No. 7 (2012), 1769–1808.
9. A. Carderi, *Ultraproducts, weak equivalence and sofic entropy*, `arXiv:1509.03189` (2015).
10. Р. Р. Добрушин, *Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности.* — Теория вероятн. и ее примен. **13**, вып. 2 (1968), 201–229.
11. M. Einsiedler, T. Ward, *Ergodic Theory with a View Towards Number Theory*, Springer, London, 2011.
12. F. Rassoul-Agha, T. Seppäläinen, *A Course on Large Deviations with an Introduction to Gibbs Measures*, Amer. Math. Soc. 2015.
13. H.-O. Georgii, *Gibbs measures and phase transitions*, Walter de Gruyter, 2011.
14. D. Gaboriau, B. Seward, *Cost, l^2-Betti numbers, and the sofic entropy of some algebraic actions*, `arXiv:1509.02482` (2015).
15. B. Hayes, *Fuglede–Kadison determinants and sofic entropy*, `arXiv:1402.1135` (2014).
16. D. Kerr, *Sofic measure entropy via finite partitions.* — Groups Geom. Dyn. **7** (2013), 617–632.
17. D. S. Ornstein, B. Weiss, *Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups.* — J. Anal. Math. **48**, No. 1 (1987), 1–141.
18. В. А. Рохлин, *Об основных понятиях теории меры.* — Мат. сб. **67**, вып. 1 (1949), 107–150.
19. В. А. Рохлин, *Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой.* — Успехи мат. наук **22**, вып. 5 (1967), 3–56.
20. B. Seward, *Krieger's finite generator theorem for actions of countable groups* I, `arXiv:1405.3604` (2014).
21. B. Seward, *Krieger's finite generator theorem for actions of countable groups* II, preprint.
22. B. Seward, *Weak containment and Rokhlin entropy*, `arXiv:1602.06680` (2016).

Alpeev A. V. Announce of an entropy formula for a class of Gibbs measures.

An explicit formula is announced for the Rokhlin and sofic entropy of a class of actions of sofic groups generated by Gibbs measures.

Лаборатория им. П.Л. Чебышева,
С.-Петербургский государственный
университет, 14 линия В.О., д. 29Б,
С.-Петербург 199178, Россия
E-mail: `a.alpeev@spbu.ru`

Поступило 16 сентября 2016 г.