Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 447, 2016 г.

А. Б. Шишкин

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ В ЯДРЕ ОПЕРАТОРА СИММЕТРИЧНОЙ СВЕРТКИ

§1. Введение

Исследования по спектральному синтезу в пространствах аналитических функций тесно связаны с изучением однородных уравнений типа свертки [1]. Опишем общую схему возникновения таких уравнений. Пусть Ω_0, Ω – односвязные области в комплексной плоскости $\mathbf{C}$, U – открытый круг с центром в нуле. Считаем, что $\Omega_0 + U \subseteq \Omega$ и пространства аналитических функций $O(\Omega_0)$, $O(U)$, $O(\Omega)$ и $O(\mathbf{C})$ наделены топологиями равномерной сходимости на компактах. Оператор сдвига $T_h : f(z) \to f(z+h)$ (на шаг $h \in U$) действует из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(\Omega_0)$ и является непрерывным. Естественно отождествить оператор T_h с дифференциальным оператором бесконечного порядка

$$e^{hD} : f(z) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!}(D^n f)(z).$$

Характеристическая функция этого оператора совпадает с экспонентой $e^{h\lambda}$, то есть

$$T_h(e^{\lambda z}) = e^{\lambda z} e^{h\lambda}.$$

Выберем линейный непрерывный оператор A, действующий в пространстве целых функций $O(\mathbf{C})$. Дифференциальный оператор (который мы обозначим символом AT_h) с характеристической функцией $A(e^{h\lambda})$ называется *оператором A-сдвига*, если он действует из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(\Omega_0)$ и является непрерывным. Согласно этому определению для оператора A-сдвига AT_h выполняется соотношение

$$AT_h(e^{\lambda z}) = e^{\lambda z} A(e^{h\lambda}).$$

Выберем произвольный оператор A-сдвига AT_h, произвольную функцию $f \in O(\Omega)$ и произвольный линейный непрерывный функционал S на пространстве $O(\Omega_0)$. Функция $\varphi(h) := \langle S, AT_h(f)\rangle$ называется

Ключевые слова: оператор симметризации, оператор симметричной свертки, спектральный синтез, экспоненциальный синтез.

A-сверткой функции f и функционала S. При фиксированных S и U оператор $f \mapsto \langle S, AT_h(f)\rangle$ называется *оператором A-свертки*, если он действует из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(U)$ и является непрерывным. Экспоненциальные полиномы, являющиеся решениями *однородного уравнения A-свертки*

$$\langle S, AT_h(f)\rangle = 0,\ f \in O(\Omega),$$

называются *элементарными решениями* этого уравнения.

В ряде случаев оказывается справедливой следующая *аппроксимационная теорема*: если Ω – выпуклая область, то произвольное решение f однородного уравнения A-свертки можно аппроксимировать элементарными решениями этого уравнения в топологии пространства $O(\Omega)$. Приведем три примера.

Во-первых, если A – тождественный оператор, то оператор A-сдвига AT_h совпадает с оператором сдвига T_h, а однородное уравнение A-свертки совпадает с однородным уравнением свертки

$$\langle S, f(z+h)\rangle = 0,\ f \in O(\Omega).$$

Аппроксимационная теорема для этого уравнения доказана в работе [2]. Случай $\Omega = \mathbf{C}$ исследовался ранее в работах [3, 4]. Аппроксимационная теорема для однородного уравнения свертки в весовом пространстве целых функций доказана в работе [5].

Во-вторых, для любой целой функции g положим

$$A(g)(z) := \frac{1}{m} \sum_{\lambda \in (z^m)^{\frac{1}{m}}} g(\lambda).$$

Оператор A-сдвига в этом случае совпадает с оператором m-стороннего сдвига

$$f(z) \mapsto \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(z+\omega^k h),\ \omega := \exp\frac{2\pi i}{m},$$

а однородное уравнение A-свертки совпадает с однородным уравнением m-сторонней свертки

$$\left\langle S, \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(z+\omega^k h) \right\rangle = 0,\ f \in O(\Omega).$$

Аппроксимационная теорема для этого уравнения доказана в работе [6]. Альтернативное доказательство аппроксимационной теоремы и приложения к спектральному синтезу приведены в работе [7].

В-третьих, выберем произвольный многочлен $\pi(z)$ степени $m \geqslant 1$ и для любой целой функции g положим

$$A(g)(z) := \frac{1}{m} \sum_{\lambda \in \pi^{-1}(\pi(z))} g(\lambda).$$

Оператор A-сдвига в этом случае совпадает с оператором π-сдвига

$$f(z) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} (s_n(D)f)(z),$$

где $s_n(z) := A(\lambda^n)(z)$, $s_n(D)$ – соответствующий дифференциальный оператор. Однородное уравнение A-свертки в этом случае совпадает с однородным уравнением π-свертки

$$\left\langle S, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} (s_n(D)f)(z) \right\rangle = 0, \; f \in O(\Omega).$$

Аппроксимационная теорема для этого уравнения и приложения к спектральному синтезу изложены в работе [8].

Пусть $\pi(z)$ – целая функция, $\mathbf{C}[\lambda]$ – кольцо многочленов от λ, $\mathbf{C}[\pi(z)]$ – кольцо многочленов от $\pi(z)$ (кольцо π-симметричных многочленов). Линейный непрерывный оператор $A : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ называется *оператором π-симметризации*, если

$$A(1) = 1, \; A(\mathbf{C}[\lambda]) = \mathbf{C}[\pi(z)].$$

Оператор A-свертки в этом случае называется оператором *π-симметричной свертки.* Если функция $\pi(z)$ имеет минимальный тип при порядке 1, то дифференциальный оператор $\pi(D)$ является непрерывным эндоморфизмом пространства $O(\Omega)$. Из определения оператора π-симметризации вытекает, что замкнутое подпространство $W_S \subseteq O(\Omega)$ решений однородного уравнения π-симметричной свертки инвариантно относительно оператора $\pi(D)$. В этих условиях доказательство аппроксимационной теоремы для однородного уравнения A-свертки сводится к решению задачи спектрального синтеза (для оператора $\pi(D)$) по отношению к подпространству W_S.

В данной работе сформулированы некоторые достаточные условия на целую функцию $\pi(z)$ и на оператор π-симметризации A, при которых аппроксимационная теорема для однородного уравнения π-симметричной свертки оказывается справедливой. Точнее, на целую функцию $\pi(z)$ накладываются ограничения типа оценок снизу вне множества “малой плотности” (раздел 5, сильное ограничение), а для оператора π-симметризации A предполагается выполненным следующее условие: для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty, z\to\infty}} \frac{1}{n} \left(\frac{|s_n(z)|}{\exp \varepsilon |z|} \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{\varepsilon e}. \tag{1}$$

Полученный результат коренным образом расширяет семейство однородных уравнений типа свертки в пространствах аналитических функций (на выпуклых областях), решение которых получило исчерпывающее описание. Он потребовал серьезной подготовки и доказан по следующей схеме:

1) переход от задачи спектрального синтеза (для дифференциальных операторов бесконечного порядка) в пространствах аналитических функций к задаче локального описания в пространствах целых функций [1, теорема 3];

2) сведение задачи локального описания к проблеме полиномиальной аппроксимации в специальном весовом пространстве целых функций [1, теорема 4];

3) решение проблемы факторизации целых π-симметричных функций экспоненциального типа [9, теорема 2];

4) доказательство секвенциальной плотности многочленов в специальном весовом пространстве целых функций (теорема 5.1).

§2. Симметризация целых функций

1. Определение оператора симметризации. Пусть

$$\pi(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

– целая функция минимального типа при порядке 1. Считаем, что она отлична от тождественной константы. Значит, $\pi(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$. Элементы кольца $\mathbf{C}[\pi(z)]$ рассматриваем как целые функции от z, которые по условиям на функцию $\pi(z)$ имеют минимальный тип при порядке 1. Целая функция ψ называется *целой π-симметричной*, если она представляется в виде композиции $g \circ \pi$, где g – целая функция. Функции из кольца $\mathbf{C}[\pi(z)]$ являются простейшими целыми π-симметричными функциями. Будем называть их *π-симметричными многочленами*. Пространство всех целых π-симметричных функций обозначим символом $O_\pi(\mathbf{C})$. Топология в пространстве $O_\pi(\mathbf{C})$ индуцируется из пространства $O(\mathbf{C})$.

Линейное и непрерывное отображение

$$\mathrm{sym} : O(\mathbf{C}) \to O_\pi(\mathbf{C})$$

назовем *оператором π-симметризации*, если выполнены следующие условия:

1^0: $\mathrm{sym}\, 1 = 1$;

2^0: $\mathrm{sym}\, \mathbf{C}[\lambda] = \mathbf{C}[\pi(z)]$;

3^0: для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство (1).

Отметим, что условие 3^0 выполняется тогда и только тогда, когда для любых $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$ найдутся такие $N \in \mathbf{N}$ и $R > 0$, что для всех $n \geqslant N$ вне круга $|z| < R$ выполняется неравенство

$$|s_n(z)| \leqslant \left(\frac{n}{\varepsilon_0 e}\right)^n e^{\varepsilon |z|} = \left(\frac{n}{\varepsilon_0}\right)^n e^{\varepsilon |z| - n}. \tag{2}$$

Здесь символ $s_n(z)$ обозначает π-симметризацию $(\mathrm{sym}\, \lambda^n)(z)$ одночлена λ^n.

Если требуется указать переменную, по которой осуществляется π-симметризация, то вместо символа sym используем символ sym_λ.

2. Преемственность определения. Если $\pi(z)$ – многочлен, то оператор π-симметризации существует. Действительно, если

$$\pi(z) := \sum_{n=0}^{m} c_n z^n, \ m \geqslant 1, \ c_m \neq 0,$$

то для любой целой функции g можно положить

$$(\mathrm{sym}\, g)(z) := \frac{1}{m} \sum_{\lambda \in \pi^{-1}(\pi(z))} g(\lambda). \tag{3}$$

Эта функция определена в обыкновенных точках аналитического накрытия $(\mathbf{C}, \pi, \mathbf{C})$, продолжается по аналитичности в его критические точки и принадлежит $O_\pi(\mathbf{C})$ [10, предложение 2.2]. Линейность оператора $\mathrm{sym} : O(\mathbf{C}) \to O_\pi(\mathbf{C})$ очевидна. Проверим его непрерывность.

Пусть d – компакт в $\mathbf{C}$. Так как в рассматриваемом случае отображение $\pi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ является собственным, то $\pi^{-1}(\pi(d))$ – компакт в $\mathbf{C}$. Из очевидной оценки

$$\max_{z \in d} |(\operatorname{sym} g)(z)| \leqslant \max_{\lambda \in \pi^{-1}(\pi(d))} |g(\lambda)|$$

вытекает, что оператор $\operatorname{sym} : O(\mathbf{C}) \to O_\pi(\mathbf{C})$ является непрерывным.

Далее проверим выполнение условий 1^0, 2^0 и 3^0. Пусть $\lambda \in \pi^{-1}(\pi(z))$. По свойствам многочленов

$$\alpha(\lambda, z) := \frac{|\lambda|^m}{|\pi(z)|} - \frac{|z|^m}{|\pi(z)|} \to 0$$

при $z \to \infty$. Следовательно, для любых $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$ найдется такое $R > 0$, что для всех натуральных n вне круга $|z| < R$ выполняется неравенство

$$|\lambda|^n = \left(1 + \alpha(\lambda, z)\frac{|\pi(z)|}{|z|^m}\right)^{\frac{n}{m}} |z|^n \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n |z|^n .$$

Простые слои $\pi^{-1}(\pi(z))$ многочлена $\pi(z)$ содержат m точек. Значит, в обыкновенных точках аналитического накрытия $(\mathbf{C}, \pi, \mathbf{C})$, лежащих вне круга $|z| < R$, для всех натуральных n выполняется неравенство

$$|s_n(z)| \leqslant \frac{1}{m} \sum_{\lambda \in \pi^{-1}(\pi(z))} |\lambda|^n \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n |z|^n .$$

Функция $r \mapsto r^n e^{-\varepsilon r}$ в точке $r = \frac{n}{\varepsilon}$ принимает свое максимальное на луче $r \geqslant 0$ значение $\left(\frac{n}{\varepsilon e}\right)^n$, значит,

$$r^n \leqslant \left(\frac{n}{\varepsilon e}\right)^n e^{\varepsilon r} = \left(\frac{n}{\varepsilon}\right)^n e^{\varepsilon r - n}. \tag{4}$$

Следовательно, в обыкновенных точках аналитического накрытия $(\mathbf{C}, \pi, \mathbf{C})$, лежащих вне круга $|z| < R$, для всех натуральных n выполняются неравенства

$$|s_n(z)| \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n |z|^n \leqslant \left(\frac{n}{\varepsilon_0}\right)^n e^{\varepsilon |z| - n}.$$

Исключительное множество аналитического накрытия $(\mathbf{C}, \pi, \mathbf{C})$ конечно. Значит, полученные оценки распространяются на всю внешность круга $|z| < R$. Это означает, что условие 3^0 выполняется. Выполнение условия 1^0 очевидно. Проверим выполнение условия 2^0. Если

$\zeta := \pi(z)$, то $\frac{|\zeta|}{|z|^m} \to |c_m| > 0$ при $z \to \infty$. Значит, при достаточно больших $|z|$ имеем

$$|z|^m \leqslant \frac{2\,|\zeta|}{|c_m|}.$$

Так как $s_n \in O_\pi(\mathbf{C})$, то имеет место представление $s_n = \sigma_n \circ \pi$, где σ_n – целая функция. Как показано выше, для любых $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$ и $n \in \mathbf{N}$ вне круга $|z| < R$ выполняется неравенство

$$|s_n(z)| \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n |z|^n,$$

значит, при достаточно больших $|z|$ имеем

$$|\sigma_n(\zeta)| = |s_n(z)| \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n |z|^n \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n \left(\frac{2\,|\zeta|}{|c_m|}\right)^{\frac{n}{m}}.$$

Отсюда вытекает, что σ_n – многочлен (степени $\leqslant \frac{n}{m}$) и, значит, $s_n(z) \in \mathbf{C}[\pi(z)]$. Учитывая, что $(\operatorname{sym}\pi(\lambda)^n)(z) = \pi(z)^n$, получаем $\operatorname{sym}\mathbf{C}[\lambda] = \mathbf{C}[\pi(z)]$. Таким образом, выполнение условия 2^0 доказано.

3. Неоднозначность определения оператора симметризации. Убедимся, что оператор π-симметризации условиями 1^0, 2^0 и 3^0 определяется неоднозначно. Для этого рассмотрим другой пример оператора π-симметризации в случае, когда $\pi(z)$ – многочлен степени $m \geqslant 1$.

Для произвольной целой функции

$$g(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$$

положим

$$(\operatorname{sym} g)(z) := a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{(m+1)n}} \pi(z)^n. \tag{5}$$

Легко увидеть, что соотношение (5) определяет функцию из $O_\pi(\mathbf{C})$ и оператор $\operatorname{sym} : O(\mathbf{C}) \to O_\pi(\mathbf{C})$ является линейным. Убедимся в его непрерывности. Для этого нам потребуется следующее предложение.

Лемма 2.1. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $C_\varepsilon \geqslant 1$, что при любых $n \in \mathbf{N}$ и $z \in \mathbf{C}$ выполняется неравенство*

$$|\pi(z)|^n \leqslant C_\varepsilon n^{(m+1)n} e^{\varepsilon|z|}.$$

Доказательство. По свойствам многочленов при некоторых $a, b \geqslant 0$ и любом $n \in \mathbf{N}$ выполняются оценки

$$|\pi(z)|^n \leqslant (a\,|z|^m + b)^n \leqslant \begin{cases} (a+b)^n, & \text{если } |z| \leqslant 1, \\ (a+b)^n\,|z|^{mn}, & \text{если } |z| > 1. \end{cases}$$

Значит, при $|z| \leqslant 1$ имеем

$$|\pi(z)|^n \leqslant (a+b)^n \leqslant (a+b)^n\, e^{\varepsilon|z|} \leqslant C' n^{(m+1)n} e^{\varepsilon|z|},$$

где

$$C' := \sup_{n\in\mathbf{N}} \left(\frac{a+b}{n^{m+1}}\right)^n.$$

В силу (4) при $|z| > 1$ получаем

$$|\pi(z)|^n \leqslant (a+b)^n\,|z|^{mn} \leqslant (a+b)^n \left(\frac{mn}{\varepsilon e}\right)^{mn} e^{\varepsilon|z|} \leqslant C'_\varepsilon n^{(m+1)n} e^{\varepsilon|z|},$$

где

$$C'_\varepsilon := \sup_{n\in\mathbf{N}} \left(\frac{(a+b)\,m^m}{\varepsilon^m e^m n}\right)^n.$$

Осталось положить $C_\varepsilon := \max\{1, C', C'_\varepsilon\}$. Лемма доказана. □

Выберем произвольный компакт $d \Subset \mathbf{C}$ и произвольную последовательность целых функций

$$g_k(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n}\lambda^n,$$

сходящуюся к нулю в пространстве $O(\mathbf{C})$. По доказанной лемме для любого $z \in d$ имеем

$$|(\operatorname{sym} g_k)\,(z)| \leqslant |a_{k,0}| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_{k,n}|}{n^{(m+1)n}} C_1 n^{(m+1)n} e^{|z|} \leqslant M_d \sum_{n=0}^{\infty} |a_{k,n}|,$$

где $M_d := \max\left\{C_1 e^{|z|} : z \in d\right\}$. Значит, для всякого $z \in d$ выполняются соотношения

$$|(\operatorname{sym} g_k)\,(z)| \leqslant M_d \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{g_k}(2)}{2^n} = 2M_d M_{g_k}(2),$$

где $M_{g_k}(2) := \max\{|g_k(\lambda)| : |\lambda| \leqslant 2\} \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно,

$$\|\operatorname{sym} g\|_d := \max_d |\operatorname{sym} g_k| \to 0, \ \ k \to \infty.$$

Отсюда вытекает, что $\operatorname{sym} g_k \to 0$ в пространстве $O_\pi(\mathbf{C})$, то есть оператор $\operatorname{sym} : O(\mathbf{C}) \to O_\pi(\mathbf{C})$ является непрерывным.

Проверим выполнение условий 1^0, 2^0 и 3^0. Во-первых, $\operatorname{sym} 1 = 1$ и

$$s_n(z) = \frac{1}{n^{(m+1)n}} \pi(z)^n$$

для любого натурального n, значит, $\operatorname{sym} \mathbf{C}[\lambda] = \mathbf{C}[\pi(z)]$, то есть условия 1^0 и 2^0 выполнены. Во-вторых, пусть $\varepsilon > 0$. По доказанной лемме для любого натурального n и любого комплексного z имеем

$$|s_n(z)| = \frac{1}{n^{(m+1)n}} |\pi(z)|^n \leqslant C_\varepsilon e^{\varepsilon |z|}.$$

Выберем произвольное $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$ и натуральное $N \geqslant C_\varepsilon \varepsilon e$. Тогда для всех $n \geqslant N$ выполняются неравенства

$$1 \leqslant C_\varepsilon \leqslant \frac{N}{\varepsilon e} \leqslant \frac{n}{\varepsilon_0 e} \leqslant \left(\frac{n}{\varepsilon_0 e}\right)^n = \left(\frac{n}{\varepsilon_0}\right)^n e^{-n}.$$

Значит, для всех $n \geqslant N$ и всех $z \in \mathbf{C}$ выполняются неравенства

$$|s_n(z)| \leqslant C_\varepsilon e^{\varepsilon |z|} \leqslant \left(\frac{n}{\varepsilon_0 e}\right)^n e^{\varepsilon |z|} = \left(\frac{n}{\varepsilon_0}\right)^n e^{\varepsilon |z| - n}.$$

Это означает, что условие 3^0 тоже выполнено.

4. Существование оператора симметризации. В общем случае слои $\pi^{-1}(\pi(z))$ функции $\pi(z)$ являются бесконечными, значит, определение (3) теряет смысл. Определение же (5) допускает естественное развитие. Это утверждение оформим в виде отдельного предложения. Формулировка и доказательство этого предложения требует некоторой подготовки.

Неотрицательную функцию $m(r)$, определенную в окрестности $+\infty$, называем *уточненным весом порядка* $\rho \in [0, +\infty)$, если она возрастает, дифференцируема и

$$\frac{m(r)}{\ln r} \to \infty, \quad \frac{m'(r) r}{m(r)} \to \rho, \quad r \to +\infty.$$

Уточненный вес $m(r)$ нулевого порядка называем *логарифмическим весом порядка* ρ, если выполняется условие

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{m'(r) r \ln r}{m(r)} = \lim_{r \to +\infty} \frac{\ln m(r)}{\ln \ln r} = \rho \in (1; +\infty). \tag{6}$$

Условие (6) означает, что функция $m(e^r)$ является уточненным весом порядка $\rho \in (1; +\infty)$. Кроме того, из условия (6) вытекает, что $m(r) \sim$

$\ln^\rho r$, то есть

$$\ln m(r) - \ln\ln^\rho r = o\left(\ln\ln r\right),\ r \to +\infty.$$

Говорим, что *радиальная плотность* множества комплексных чисел E (в бесконечно удаленной точке) меньше $\varepsilon \in (0;+\infty)$, если это множество можно покрыть совокупностью колец

$$\Sigma := \big\{\{z : ||z| - t_n| \leqslant r_n\} : n \in \mathbf{N}\big\},$$

где последовательность неотрицательных чисел t_n имеет единственную предельную точку в бесконечности и

$$m_\Sigma := \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{r}\sum_{t_n<r} r_n < \varepsilon.$$

Если радиальная плотность множества E меньше любого положительного числа, то говорим, что множество E имеет нулевую радиальную плотность.

Для любого множества E в комплексной плоскости символом $\hat{E}$ обозначаем множество $\left\{\zeta \in \mathbf{C} : \pi^{-1}\left(\zeta\right) \setminus E \neq \varnothing\right\}$. Говорим, что целая функция $\pi(z)$ удовлетворяет *слабому ограничению*, если существует такой логарифмический вес μ порядка $\rho \in (1,+\infty)$, что для любого $\varepsilon \in (0;\frac{1}{2})$ найдется множество E_ε, радиальная плотность которого меньше ε, и такая константа $\kappa_\varepsilon \geqslant 1$, что для любого $\zeta \in \hat{E}_\varepsilon$ и любого $z \in \pi^{-1}\left(\zeta\right) \setminus E_\varepsilon$ выполняются оценки

$$\kappa_\varepsilon^{-1} \leqslant \frac{\mu\left(|\zeta|\right)}{|z|} \leqslant \kappa_\varepsilon. \tag{7}$$

В работе [9, п. 1.2] показано, что слабое ограничение будет выполнено, если, например, функция $\pi\left(z\right)$ является целой функцией вполне регулярного роста при уточненном порядке $\rho(r) \to \rho' \in (0;1)$ с положительным индикатором.

Лемма 2.2. *Если целая функция $\pi(z)$ удовлетворяет слабому ограничению, то для любого компакта $d \Subset \mathbf{C}$ найдется такой компакт $d' \Subset \mathbf{C}$, что $d = \pi\left(d'\right)$.*

Доказательство. Пусть функция $\pi(z)$ удовлетворяет слабому ограничению. Выберем произвольный компакт $d \Subset \mathbf{C}$ и произвольное $\varepsilon \in$

$(0;\frac{1}{2})$. Так как радиальная плотность множества E_ε меньше ε, то существует последовательность окружностей $|z| = r_n$, которые не пересекаются с множеством E_ε и удовлетворяют условию

$$0 < r_1 \leqslant r_n < r_{n+1} \to \infty,\ n \to +\infty$$

[9, п. 1.1]. Если при некотором n точка z_0 лежит на окружности $|z| = r_n$, то $\zeta_0 := \pi(z_0) \in \hat{E}_\varepsilon$ и $z_0 \in \pi^{-1}(\zeta_0) \setminus E_\varepsilon$. Значит, в силу (7) при всех действительных θ выполняются оценки

$$\kappa_\varepsilon^{-1} r_n \leqslant \mu(|\pi(r_n e^{i\theta})|),\ n \in \mathbf{N}. \tag{8}$$

Пусть

$$t_n := \nu((2\kappa_\varepsilon)^{-1} r_n),\ G_n := \pi^{-1}(\Delta(0;t_n)) \cap \Delta(0;r_n),$$

где ν – обратная к функции μ, $\Delta(0;t_n)$ – открытый круг $\{\zeta : |\zeta| < t_n\}$, $\Delta(0;r_n)$ – открытый круг $\{z : |z| < r_n\}$. Из оценок (8) вытекает, что при достаточно большом n сужение $\pi_n(z)$ функции $\pi(z)$ на открытое множество G_n является собственным отображением на круг $\Delta(0;t_n)$ и при этом $t_n \to +\infty$ [9, предложение 4]. Значит, при некотором натуральном n выполняется включение $d \Subset \Delta(0;t_n)$ и π_n-прообраз $d' := \pi_n^{-1}(d) = \pi^{-1}(d) \cap G_n$ является компактом в G_n и, значит, является компактом в $\mathbf{C}$. При этом $d = \pi_n(\pi_n^{-1}(d)) = \pi(\pi_n^{-1}(d)) = \pi(d')$. $\square$

Наконец, справедливо следующее предложение.

Предложение 2.1. *Если целая функция $\pi(z)$ удовлетворяет слабому ограничению, то оператор π-симметризации существует.*

Доказательство. Предположим, что целая функция $\pi(z)$ удовлетворяет слабому ограничению. Значит, функция $\pi(z)$ имеет минимальный тип при порядке 1 [9, п. 2.2]. Для любой целой функции g положим

$$(\operatorname{sym} g)(z) := a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \pi(z)^n, \tag{9}$$

где

$$a_n := \frac{1}{n!} g^{(n)}(0),\ b_n \geqslant \sup_{z \in \mathbf{C}} \left\{ |\pi(z)|^n e^{-\frac{1}{n}|z|} \right\} > 0.$$

Убедимся, что соотношение (9) определяет функцию из $O_\pi(\mathbf{C})$. Для этого выберем произвольную целую функцию g и произвольный компакт $d \Subset \mathbf{C}$. В силу леммы 2.2 найдется компакт $d' \Subset \mathbf{C}$, который удовлетворяет условию $d = \pi(d')$. Для любых $n \in \mathbf{N}$, $\zeta \in d$ и $z \in \pi^{-1}(\zeta) \cap d'$

имеем

$$b_n \geqslant |\pi(z)|^n \, e^{-\frac{1}{n}|z|} = |\zeta|^n \, e^{-\frac{1}{n}|z|} \geqslant |\zeta|^n \, e^{-|z|}.$$

Значит,

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \zeta^n \right| \leqslant |a_n| e^{|z|} \leqslant M_{d'} |a_n|,$$

где $M_{d'} := \max\left\{e^{|z|} : z \in d'\right\}$. Отсюда следует, что функция

$$G(\zeta) := a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \zeta^n$$

является целой и при этом $\operatorname{sym} g = G \circ \pi$.

Построенный оператор $\operatorname{sym} : O(\mathbf{C}) \to O_\pi(\mathbf{C})$ является линейным. Убедимся в его непрерывности. Для этого выберем произвольный компакт $d \Subset \mathbf{C}$ и произвольную последовательность целых функций g_k, сходящуюся к нулю в пространстве $O(\mathbf{C})$. Для любых $n \in \mathbf{N}$ и $z \in d$ имеем

$$|\pi(z)|^n \leqslant b_n e^{\frac{1}{n}|z|},$$

значит,

$$|(\operatorname{sym} g_k)(z)| \leqslant |a_{k,0}| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_{k,n}| e^{\frac{1}{n}|z|} \leqslant M_d \sum_{n=0}^{\infty} |a_{k,n}|,$$

где $a_{k,n} := \frac{1}{n!} g_k^{(n)}(0)$, $M_d := \max\left\{e^{|z|} : z \in d\right\}$. Отсюда вытекает, что для всякого $z \in d$ выполняется неравенство

$$|(\operatorname{sym} g_k)(z)| \leqslant M_d \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_{g_k}(2)}{2^n} = 2 M_d M_{g_k}(2),$$

где $M_{g_k}(2) := \max_{|\lambda| \leqslant 2} |g_k(\lambda)| \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, $\operatorname{sym} g_k \to 0$ в пространстве $O_\pi(\mathbf{C})$, то есть линейный оператор $\operatorname{sym} : O(\mathbf{C}) \to O_\pi(\mathbf{C})$ является непрерывным.

Проверим выполнение условий 1^0, 2^0 и 3^0. Во-первых, $\operatorname{sym} 1 = 1$ и

$$s_n(z) = \frac{1}{b_n} \pi(z)^n$$

для любого натурального n, значит, $\operatorname{sym} \mathbf{C}[\lambda] = \mathbf{C}[\pi(z)]$, то есть условия 1^0 и 2^0 выполнены. Во-вторых, для любого натурального n и любого комплексного z имеем

$$|s_n(z)| = \frac{1}{b_n} |\pi(z)|^n \leqslant e^{\frac{1}{n}|z|}. \tag{10}$$

Выберем произвольные $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_0 \in (0,\varepsilon)$ и $N \geqslant \max\left\{\varepsilon_0 e; \frac{1}{\varepsilon}\right\}$. В силу (4) и (10) для всех $n \geqslant N$ и всех $z \in \mathbf{C}$ выполняются неравенства

$$e^n \leqslant \left(\frac{n}{\varepsilon_0 e}\right)^n e^{\varepsilon_0 e} \leqslant \left(\frac{n}{\varepsilon_0}\right)^n e^{\varepsilon_0 e - n} \leqslant \left(\frac{n}{\varepsilon_0}\right)^n,$$

$$|s_n(z)| \leqslant e^{\frac{1}{n}|z|} \leqslant e^{\varepsilon|z|} \leqslant e^n e^{\varepsilon|z|-n} \leqslant \left(\frac{n}{\varepsilon_0}\right)^n e^{\varepsilon|z|-n}.$$

Это означает, что условие 3^0 тоже выполнено. Предложение доказано. □

5. Свойства оператора симметризации. Пусть $\pi(z)$ – целая функция минимального типа при порядке 1. Далее будем предполагать, что для выбранной функции $\pi(z)$ оператор π-симметризации существует, и изучим его первичные свойства.

Свойство 1. *Для любой целой функции g справедливо представление*

$$(\operatorname{sym} g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} s_n(z).$$

При этом ряд сходится равномерно на компактах из $\mathbf{C}$.

Доказательство. Последовательность частичных сумм

$$g_k(\lambda) := \sum_{n=0}^{k} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n$$

сходится к $g(\lambda)$ в топологии пространства $O(\mathbf{C})$. В силу линейности и непрерывности оператора π-симметризации последовательность

$$(\operatorname{sym} g_k)(z) = \sum_{n=0}^{k} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} s_n(z)$$

сходится к $\operatorname{sym} g$ в топологии пространства $O_\pi(\mathbf{C})$. □

Пусть $\varepsilon > 0$ и $P_\varepsilon := P[1;\varepsilon)$ – совокупность всех целых функций, у которых тип при порядке 1 меньше ε.

Свойство 2. *Имеет место вложение* $\operatorname{sym} P_\varepsilon \subseteq P_\varepsilon$.

Доказательство. Пусть $g \in P_\varepsilon$. При некоторых $A > 0$ и $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon)$ выполняется равномерная по $\lambda \in \mathbf{C}$ оценка

$$|g(\lambda)| \leqslant A \exp \varepsilon_1 |\lambda|.$$

Из этой оценки вытекают неравенства

$$|a_n| := \left|\frac{g^{(n)}(0)}{n!}\right| \leqslant \left(\frac{n}{\varepsilon_1}\right)^{-n} \max_{|\lambda|\leqslant\frac{n}{\varepsilon_1}} |g(\lambda)| \leqslant A\left(\frac{e\varepsilon_1}{n}\right)^n.$$

Выберем произвольные $\varepsilon_2 \in (\varepsilon_1, \varepsilon)$ и $\varepsilon_3 \in (\varepsilon_2, \varepsilon)$. По условию 3^0 найдутся такие $N \in \mathbf{N}$ и $R > 0$, что для всех $n \geqslant N$ вне круга $|z| < R$ выполняется неравенство

$$|s_n(z)| \leqslant \left(\frac{n}{\varepsilon_2 e}\right)^n \exp\varepsilon_3 |z|.$$

В силу свойства 1 отсюда вытекает, что вне круга $|z| < R$ выполняются неравенства

$$|(\operatorname{sym} g)(z)| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n|\,|s_n(z)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|\,|s_n(z)|$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{N} A\left(\frac{e\varepsilon_1}{n}\right)^n |s_n(z)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} A\left(\frac{e\varepsilon_1}{n}\right)^n \left(\frac{n}{\varepsilon_2 e}\right)^n e^{\varepsilon_3|z|} \leqslant ABe^{\varepsilon_3|z|},$$

где

$$B := \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{e\varepsilon_1}{n}\right)^n B_n + \sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^n, \quad B_n := \sup_{z\in\mathbf{C}} \frac{|s_n(z)|}{e^{\varepsilon_3|z|}}.$$

Значит, $\operatorname{sym} g \in P_\varepsilon$. □

Для любого $\varepsilon' > 0$ символом $P[1;\varepsilon']$ обозначаем банахово пространство всех целых функций g, у которых тип при порядке 1 не превосходит ε', с нормой

$$\|g\|_{\varepsilon'} := \sup_{\lambda\in\mathbf{C}} \frac{|g(\lambda)|}{\exp\varepsilon'|\lambda|}.$$

Пространства $P[1;\varepsilon']$, $\varepsilon' \in (0;\varepsilon)$, образуют прямой спектр относительно вполне непрерывных вложений $P[1;\varepsilon'] \subseteq P[1;\varepsilon'']$, $\varepsilon' < \varepsilon''$. Наделим пространство P_ε топологией индуктивного предела этого спектра.

Свойство 3. *Оператор* $\operatorname{sym} : P_\varepsilon \to P_\varepsilon$ *является непрерывным.*

Доказательство. Пусть $g_k \in P_\varepsilon$ и $g_k \to 0$ в топологии пространства P_ε. Из описания секвенциальной сходимости в пространстве P_ε

вытекает, что при некоторых $A_k > 0$ и $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ выполняются равномерные по $\lambda \in \mathbf{C}$ оценки

$$|g_k(\lambda)| \leqslant A_k \exp \varepsilon_1 |\lambda| .$$

При этом $A_k \to 0$. Повторяя выкладки из доказательства свойства 2, приходим к оценкам

$$|(\operatorname{sym} g_k)(z)| \leqslant A_k B \exp \varepsilon_3 |z| , \ |z| \geqslant R,$$

где $\varepsilon_3 \in (\varepsilon_1, \varepsilon)$. При этом в силу принципа максимума в круге $|z| < R$ выполняются неравенства

$$|(\operatorname{sym} g_k)(z)| \leqslant A_k B \exp \varepsilon_3 R.$$

Отсюда вытекает, что

$$\sup_{z \in \mathbf{C}} \frac{|(\operatorname{sym} g_k)(z)|}{\exp \varepsilon_3 |z|} \leqslant A_k B \exp \varepsilon_3 R \to 0, \ k \to \infty.$$

Следовательно, $\operatorname{sym} g_k \to 0$ в пространстве $P[1; \varepsilon_3]$ и, значит, в пространстве P_ε. □

§3. Симметризация дифференциальных операторов

1. Дуальные элементы. Пусть Ω – односвязная область в $\mathbf{C}$; $O(\Omega)$ – пространство функций, голоморфных в Ω, с топологией равномерной сходимости на компактах; $O^*(\Omega)$ – его сильное сопряженное пространство; L_Ω – преобразование Лапласа, которое каждому функционалу $S \in O^*(\Omega)$ ставит в соответствие целую функцию экспоненциального типа $\varphi(\lambda) := \langle S, e^{\lambda z} \rangle$; $P(\Omega)$ – полный образ преобразования L_Ω. Известно, что отображение $L_\Omega : O^*(\Omega) \to P(\Omega)$ является взаимно однозначным. Оно индуцирует в $P(\Omega)$ отделимую локально выпуклую топологию. Если Ω – выпуклая ограниченная область, то пространство $P(\Omega)$ совпадает с индуктивным пределом $P[1, H_\Omega)$, где H_Ω – опорная функция области Ω в смысле комплексного анализа [11]. Так как L_Ω осуществляет изоморфизм локально выпуклых пространств, то его сопряженное отображение L_Ω^* осуществляет изоморфизм сильного сопряженного пространства $P^*(\Omega)$ на второе сопряженное пространство $O^{**}(\Omega)$. Воспользуемся рефлексивностью пространства $O(\Omega)$ и отождествим это пространство с его вторым сопряжённым пространством. Возникшую ситуацию удобно иллюстрирует следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} O^*(\Omega) \arrow[d, "L_\Omega"'] \arrow[r, phantom, "\overset{(*)}{\longleftrightarrow}"] & O(\Omega) \\ P(\Omega) & P^*(\Omega) \arrow[u, "L_\Omega^*"'] \end{tikzcd}$$

Для отображений, входящих в эту диаграмму, справедливы следующие соотношения:

$$\left(L_\Omega^*\right)^{-1} = \left(L_\Omega^{-1}\right)^*, \ L_\Omega^{-1} = \left(\left(L_\Omega^*\right)^{-1}\right)^*, \tag{11}$$

где $\left(L_\Omega^{-1}\right)^*$ и $\left(\left(L_\Omega^*\right)^{-1}\right)^*$ – сопряженные отображения к обратным отображениям L_Ω^{-1} и $\left(L_\Omega^*\right)^{-1}$ соответственно. Действительно, для любых $\varphi \in P(\Omega)$ и $f \in O(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} &\left\langle \varphi, \left(L_\Omega^*\right)^{-1}(f) \right\rangle = \left\langle L_\Omega \circ L_\Omega^{-1}(\varphi), \left(L_\Omega^*\right)^{-1}(f) \right\rangle \\ &= \left\langle L_\Omega^{-1}(\varphi), f \right\rangle = \left\langle \varphi, \left(L_\Omega^{-1}\right)^*(f) \right\rangle, \\ &\left\langle L_\Omega^{-1}(\varphi), f \right\rangle = \left\langle L_\Omega^{-1}(\varphi), L_\Omega^* \circ \left(L_\Omega^*\right)^{-1}(f) \right\rangle = \left\langle \varphi, \left(L_\Omega^*\right)^{-1}(f) \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\left(L_\Omega^*\right)^{-1}\right)^*(\varphi), f \right\rangle. \end{aligned}$$

Элементы $\widehat{\varphi} := L_\Omega^{-1}(\varphi) \in O^*(\Omega)$ и $\widehat{f} := \left(L_\Omega^*\right)^{-1}(f) \in P^*(\Omega)$ называем *дуальными* по отношению к элементам $\varphi \in P(\Omega)$ и $f \in O(\Omega)$ соответственно. Произвольные элементы $\varphi \in P(\Omega)$, $f \in O(\Omega)$ и их дуальные элементы связаны простым соотношением

$$\langle \widehat{\varphi}, f \rangle = \left\langle \widehat{\varphi}, L_\Omega^*\left(\widehat{f}\right) \right\rangle = \left\langle L_\Omega\left(\widehat{\varphi}\right), \widehat{f} \right\rangle = \left\langle \varphi, \widehat{f} \right\rangle. \tag{12}$$

Для фиксированного $z \in \Omega$ функция $\lambda \mapsto e^{z\lambda}$ принадлежит пространству $P(\Omega)$ и $e^{z\lambda} = L_\Omega(\delta_z)$, где δ_z – функционал из $O^*(\Omega)$, действующий по правилу $\langle \delta_z, f \rangle = f(z)$. Следовательно,

$$\widehat{e^{z\lambda}} = L_\Omega^{-1}(e^{z\lambda}) = \delta_z. \tag{13}$$

С другой стороны, для фиксированного $\lambda \in \mathbf{C}$ функция $z \mapsto e^{\lambda z}$ принадлежит пространству $O(\Omega)$ и для любого функционала $\widehat{\varphi} \in O^*(\Omega)$

справедливы равенства

$$\left\langle\widehat{\varphi}, e^{\lambda z}\right\rangle=\varphi(\lambda)=\left\langle L_{\Omega}(\widehat{\varphi}), \delta_{\lambda}\right\rangle=\left\langle\widehat{\varphi}, L_{\Omega}^{*}\left(\delta_{\lambda}\right)\right\rangle,$$

где δ_λ – функционал из $P^*(\Omega)$, действующий по правилу $\langle\varphi, \delta_\lambda\rangle = \varphi(\lambda)$. Локально выпуклое пространство $O(\Omega)$ является отделимым, следовательно, $e^{\lambda z} = L_{\Omega}^{*}(\delta_\lambda)$ и

$$\widehat{e^{\lambda z}}=\left(L_{\Omega}^{*}\right)^{-1}\left(e^{\lambda z}\right)=\delta_{\lambda}. \tag{14}$$

Из (12), (13) и (14) вытекает, что для произвольных $\varphi \in P(\Omega)$ и $f \in O(\Omega)$ выполняются равенства:

$$\left\langle\widehat{\varphi}, e^{\lambda z}\right\rangle=\left\langle\varphi, \delta_{\lambda}\right\rangle=\varphi(\lambda),\ \left\langle e^{z \lambda}, \widehat{f}\right\rangle=\left\langle\delta_{z}, f\right\rangle=f(z).$$

После кратного дифференцирования (по λ и по z) получаем:

$$\left(D^{n} \varphi\right)(\lambda)=\left\langle\widehat{\varphi}, z^{n} e^{\lambda z}\right\rangle,\ \left(D^{n} f\right)(z)=\left\langle\lambda^{n} e^{z \lambda}, \widehat{f}\right\rangle,\ n \in \mathbf{N} \cup\{0\}. \tag{15}$$

2. Дуальные отображения. Пусть Ω_0, Ω – односвязные области в $\mathbf{C}$; $u: O(\Omega) \to O(\Omega_0)$, $v: P(\Omega_0) \to P(\Omega)$ – линейные непрерывные отображения; $u^*: O^*(\Omega_0) \to O^*(\Omega)$, $v^*: P^*(\Omega) \to P^*(\Omega_0)$ – их сопряженные отображения. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
O^*(\Omega_0) \arrow[r, "u^*"] \arrow[d, "L_{\Omega_0}"'] & O^*(\Omega) \arrow[d, "L_\Omega"] \\
P(\Omega_0) \arrow[r, "v"'] & P(\Omega)
\end{tikzcd}
\overset{(*)}{\longleftrightarrow}
\begin{tikzcd}
O(\Omega) \arrow[r, "u"] & O(\Omega_0) \\
P^*(\Omega) \arrow[r, "v^*"'] \arrow[u, "L_\Omega^*"] & P^*(\Omega_0) \arrow[u, "L_{\Omega_0}^*"']
\end{tikzcd}$$

Если эта диаграмма коммутативна, то есть справедливы соотношения:

$$v \circ L_{\Omega_0}=L_{\Omega} \circ u^{*},\ u \circ L_{\Omega}^{*}=L_{\Omega_0}^{*} \circ v^{*},$$

то отображение v называется *дуальным* по отношению к отображению u и обозначается символом $u^{\circledast}$, а отображение u называется *дуальным* по отношению к отображению v и обозначается символом $v^{\circledast}$. Для дуальных отображений справедливы соотношения:

$$u^{\circledast}=L_{\Omega} \circ u^{*} \circ L_{\Omega_0}^{-1},\ v^{\circledast}=L_{\Omega_0}^{*} \circ v^{*} \circ\left(L_{\Omega}^{*}\right)^{-1}.$$

Значит, для любых $\varphi \in P(\Omega_0)$ и $f \in O(\Omega)$ справедливы соотношения:

$$\left\langle u^{\circledast}(\varphi), \widehat{f}\right\rangle=\left\langle L_{\Omega} \circ u^{*} \circ\left(L_{\Omega_0}\right)^{-1}(\varphi),\left(L_{\Omega}^{*}\right)^{-1}(f)\right\rangle=\langle\widehat{\varphi}, u(f)\rangle, \tag{16}$$

$$\left\langle\widehat{\varphi}, v^{\circledast}(f)\right\rangle=\left\langle\left(L_{\Omega_0}\right)^{-1}(\varphi), L_{\Omega_0}^{*} \circ v^{*} \circ\left(L_{\Omega}^{*}\right)^{-1}(f)\right\rangle=\left\langle v(\varphi), \widehat{f}\right\rangle.$$

Если в первом соотношении положить $f(z) := e^{\lambda z}$, $z \in \Omega$, то из (14) вытекает, что для любого фиксированного $\lambda \in \mathbf{C}$ справедливы равенства

$$u^{\circledast}(\varphi)(\lambda) = \left\langle u^{\circledast}(\varphi), \delta_\lambda \right\rangle = \left\langle u^{\circledast}(\varphi), \widehat{e^{\lambda z}} \right\rangle = \left\langle \widehat{\varphi}, u(e^{\lambda z}) \right\rangle. \tag{17}$$

Если же во втором соотношении положить $\varphi(\lambda) = e^{z\lambda}$, $\lambda \in \mathbf{C}$, то из (13) вытекает, что для любого фиксированного $z \in \Omega_0$ справедливы равенства

$$v^{\circledast}(f)(z) = \left\langle \delta_z, v^{\circledast}(f) \right\rangle = \left\langle \widehat{e^{z\lambda}}, v^{\circledast}(f) \right\rangle = \left\langle v(e^{z\lambda}), \widehat{f} \right\rangle. \tag{18}$$

Кроме того, по определению сопряженных отображений $(u^*)^* = u$ и $(v^*)^* = v$. Отсюда и из (11) следует, что

$$(u^{\circledast})^* = \left(L_{\Omega_0}^{-1}\right)^* \circ u \circ L_\Omega^* = \left(L_{\Omega_0}^*\right)^{-1} \circ u \circ L_\Omega^*,$$

$$(v^{\circledast})^* = \left(\left(L_\Omega^*\right)^{-1}\right)^* \circ v \circ L_{\Omega_0} = L_\Omega^{-1} \circ v \circ L_{\Omega_0}.$$

Значит,

$$\left(u^{\circledast}\right)^{\circledast} = L_{\Omega_0}^* \circ \left(\left(L_{\Omega_0}^*\right)^{-1} \circ u \circ L_\Omega^*\right) \circ \left(L_\Omega^*\right)^{-1} = u, \tag{19}$$

$$\left(v^{\circledast}\right)^{\circledast} = L_\Omega \circ \left(L_\Omega^{-1} \circ v \circ L_{\Omega_0}\right) \circ L_{\Omega_0}^{-1} = v.$$

3. Дуальное определение дифференциального оператора бесконечного порядка. Пусть Ω_0, Ω – односвязные области, $\Omega_0 \subseteq \Omega$. Многочлен $g(\lambda)$ степени m порождает линейный непрерывный дифференциальный оператор порядка m

$$g(D) : O(\Omega) \to O(\Omega_0) |\, f(z) \mapsto \sum_{k=0}^{m} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} (D^k f)(z).$$

Дуальный оператор $g(D)^{\circledast}$ действует из пространства $P(\Omega_0)$ в пространство $P(\Omega)$. При этом в силу (17) и (15)

$$g(D)^{\circledast}(\varphi)(\lambda) = \left\langle \widehat{\varphi}, g(D)\left(e^{\lambda z}\right) \right\rangle = \left\langle \widehat{\varphi}, g(\lambda) e^{\lambda z} \right\rangle = g(\lambda)\varphi(\lambda).$$

Из этих соотношений вытекает, что дуальный оператор $g(D)^{\circledast}$ совпадает с оператором $v_g : P(\Omega_0) \to P(\Omega)$ умножения на многочлен $g(\lambda)$. Значит, в силу (19) дифференциальный оператор $g(D)$ совпадает с дуальным оператором $v_g^{\circledast} : O(\Omega) \to O(\Omega_0)$.

Пусть $g(\lambda)$ – целая функция. Дуальная связь дифференциальных операторов конечного порядка с операторами умножения позволяет дать определение непрерывного дифференциального оператора бесконечного порядка $g(D)$, действующего из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(\Omega_0)$. Для этого предположим, что выполнены следующие условия:

4^0: линейный оператор v_g умножения на целую функцию $g(\lambda)$ действует из пространства $P(\Omega_0)$ в пространство $P(\Omega)$ и является непрерывным;

5^0: существует такая последовательность многочленов $g_n(\lambda)$, что последовательность $v_{g_n}(e^{z\lambda}) = g_n(\lambda)e^{z\lambda}$ сходится к $v_g(e^{z\lambda}) = g(\lambda)e^{z\lambda}$ в топологии пространства $P(\Omega)$ равномерно по z на компактах из Ω_0.

Если $f \in O(\Omega)$ и $z \in \Omega_0$, то из соотношений (18) и условия 4^0 вытекает, что

$$\left(v_{g_n}^{\circledast}(f)\right)(z) = \left\langle v_{g_n}\left(e^{z\lambda}\right), \widehat{f}\right\rangle = \left\langle g_n(\lambda)e^{z\lambda}, \widehat{f}\right\rangle,$$

$$\left(v_g^{\circledast}(f)\right)(z) = \left\langle v_g\left(e^{z\lambda}\right), \widehat{f}\right\rangle = \left\langle g(\lambda)e^{z\lambda}, \widehat{f}\right\rangle.$$

В силу условия 5^0

$$\left(v_g^{\circledast}(f) - v_{g_n}^{\circledast}(f)\right)(z) = \left\langle g(\lambda)e^{z\lambda} - g_n(\lambda)e^{z\lambda}, \widehat{f}\right\rangle \to 0$$

равномерно на компактах из Ω_0. Значит, $v_{g_n}^{\circledast}(f) \to v_g^{\circledast}(f)$ в пространстве $O(\Omega_0)$. С другой стороны, в силу (15)

$$\left\langle g_n(\lambda)e^{z\lambda}, \widehat{f}\right\rangle = \left(g_n(D)f\right)(z),$$

следовательно, $g_n(D)f \to v_g^{\circledast}(f)$ в пространстве $O(\Omega_0)$. Легко увидеть, что элемент $v_g^{\circledast}(f) \in O(\Omega_0)$ не зависит от выбора последовательности многочленов $g_n(\lambda)$, удовлетворяющей условию 5^0. Следовательно, при выполнении условий 4^0 и 5^0, соотношение

$$\left(g(D)f\right)(z) := \left(v_g^{\circledast}(f)\right)(z) = \left\langle g(\lambda)e^{z\lambda}, \widehat{f}\right\rangle \tag{20}$$

можно использовать в качестве определения линейного непрерывного дифференциального оператора бесконечного порядка $g(D) : O(\Omega) \to O(\Omega_0)$.

Далее предположим, что односвязные области Ω_0, Ω и круг $U_\varepsilon := \Delta\left(0;\varepsilon\right)$ таковы, что $\Omega_0 + U_\varepsilon \subseteq \Omega$. Пусть $g(\lambda) \in P_\varepsilon$,

$$g_n(\lambda) := \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}\lambda^k$$

– частичные суммы ряда Тейлора функции $g(\lambda)$. Легко показать, что $g_n(\lambda) \to g(\lambda)$ в пространстве P_ε. При этом $g_n(\lambda)e^{z\lambda} \to g(\lambda)e^{z\lambda}$ в топологии пространства $P(\Omega)$, причем сходимость равномерна по z на компактах из Ω_0 [12, лемма 3.1]. Кроме того, оператор умножения на функцию $g(\lambda)$ переводит элементы пространства $P(\Omega_0)$ в элементы пространства $P(\Omega)$ и является непрерывным [13, теорема 14.2]. Это означает, что условия 4^0 и 5^0 выполнены и соотношение (20) определяет линейный непрерывный дифференциальный оператор $g(D) : O(\Omega) \to O(\Omega_0)$. При этом для любого $f \in O(\Omega)$ имеет место представление

$$g(D)f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} D^k f \tag{21}$$

и ряд сходится равномерно на компактах из Ω_0.

Если $g(\lambda)$ – целая функция минимального типа при порядке 1, то выберем произвольный компакт $d \Subset \Omega$ и подберем $\varepsilon > 0$ и односвязную область $\Omega_0(d)$ так, что $d \Subset \Omega_0(d)$ и $\Omega_0(d) + U_\varepsilon \subseteq \Omega$. Последовательность частичных сумм $g_n(\lambda)$ ряда Тейлора функции $g(\lambda)$ сходится к ней в пространстве P_ε, следовательно, $g_n(\lambda)e^{z\lambda} \to g(\lambda)e^{z\lambda}$ в топологии пространства $P(\Omega)$, причем сходимость равномерна по $z \in d$. В силу произвольности выбора компакта $d \Subset \Omega$ сходимость является равномерной по z на компактах из Ω. При этом оператор умножения на функцию $g(\lambda)$ переводит элементы пространства $P(\Omega)$ в элементы пространства $P(\Omega)$ и является непрерывным. Это означает, что условия 4^0 и 5^0 выполнены и соотношение (20) определяет линейный непрерывный дифференциальный оператор $g(D) : O(\Omega) \to O(\Omega)$. При этом для любого $f \in O(\Omega)$ имеет место представление (21), в котором ряд сходится равномерно на компактах из Ω.

4. Симметризация дифференциальных операторов. Как и прежде, предполагаем, что целая функция $\pi(z)$ имеет минимальный тип при порядке 1 и для нее существует оператор π-симметризации $\mathrm{sym} : O(\mathbf{C}) \to O_\pi(\mathbf{C})$. π-симметричные многочлены тоже являются целыми функциями минимального типа при порядке 1. Отсюда следует, что каждый π-симметричный многочлен $p \circ \pi \in \mathbf{C}[\pi(z)]$ определяет линейный непрерывный дифференциальный оператор $p(\pi(D)) : O(\Omega) \to O(\Omega)$. Совокупность всех таких операторов образует кольцо, которое мы обозначим символом $\mathbf{C}[\pi(D)]$.

По свойству 2 оператора π-симметризации для любой функции $g \in P_\varepsilon$ ее π-симметризация $\operatorname{sym} g$ тоже принадлежит пространству P_ε. Дифференциальный оператор

$$(\operatorname{sym} g)(D) : O(\Omega) \to O(\Omega_0)$$

называем *π-симметризацией дифференциального оператора* $g(D)$ и обозначаем символом $\operatorname{sym} g(D)$.

Если $g(\lambda) \equiv \lambda^n$, то функцию $(\operatorname{sym} g)(z)$ мы ранее обозначили символом $s_n(z)$, значит, оператор $\operatorname{sym} g(D)$ в этом случае естественно обозначать символом $s_n(D)$. Из условия 2^0 вытекает, что функция $s_n(z)$ имеет минимальный тип при порядке 1, значит, оператор $s_n(D)$ является линейным непрерывным дифференциальным оператором, действующим из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(\Omega)$.

Для любого $h \in U_\varepsilon$ функция $g(\lambda) := e^{h\lambda}$ принадлежит пространству P_ε. В силу (15) соответствующий дифференциальный оператор $g(D) := e^{hD}$ ставит в соответствие функции $f \in O(\Omega)$ ее сдвиг

$$\left\langle e^{h\lambda} e^{z\lambda}, \widehat{f} \right\rangle = \left\langle e^{\lambda(z+h)}, \widehat{f} \right\rangle = f(z+h)$$

на шаг h. π-симметризацию оператора e^{hD} обозначаем символом $\operatorname{sym} e^{hD}$. Образ $\left(\operatorname{sym} e^{hD}\right)(f) \in O(\Omega_0)$ называем *π-симметричным сдвигом функции $f \in O(\Omega)$ на шаг h* и обозначаем символом $\operatorname{sym} f(z+h)$.

Отметим некоторые свойства π-симметричного сдвига.

Свойство 4. *Для любых $z \in \Omega_0$ и $h \in U_\varepsilon$ имеют место представления*

$$\operatorname{sym} f(z+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \left(s_n(D) f\right)(z) = \left\langle e^{z\lambda} \left(\operatorname{sym}_\zeta e^{h\zeta}\right)(\lambda), \widehat{f} \right\rangle,$$

причем ряд сходится равномерно по (z, h) на компактах из бицилиндра $\Omega_0 \times U_\varepsilon$.

Доказательство. Пусть d и d' – компакты в Ω_0 и U_ε соответственно, $\varepsilon' \in (|d'|, \varepsilon)$, где $|d'| := \max_{h \in d'} |h|$. Легко показать, что частичные суммы

$$g_m(\zeta, h) := \sum_{n=0}^{m} \frac{h^n}{n!} \zeta^n$$

сходятся к $e^{h\zeta}$ по норме пространства $P[1; \varepsilon']$ равномерно по $h \in d'$. Значит, $g_m(\zeta, h) \to e^{h\zeta}$ в топологии пространства P_ε равномерно по

$h \in d'$. По свойству 3 оператора π-симметризации

$$\operatorname{sym}_\zeta \sum_{n=0}^{m} \frac{h^n}{n!} \zeta^n = \sum_{n=0}^{m} \frac{h^n}{n!} \operatorname{sym}_\zeta \zeta^n \to \operatorname{sym}_\zeta e^{h\zeta}$$

в топологии пространства P_ε равномерно по $h \in d'$. Значит,

$$e^{z\lambda} \sum_{n=0}^{m} \frac{h^n}{n!} s_n(\lambda) = e^{z\lambda} \sum_{n=0}^{m} \frac{h^n}{n!} \left(\operatorname{sym}_\zeta \zeta^n\right)(\lambda) \to e^{z\lambda} \left(\operatorname{sym}_\zeta e^{h\zeta}\right)(\lambda)$$

в топологии пространства $P(\Omega)$, причем сходимость будет равномерной по $z \in d$ и $h \in d'$ [12, лемма 3.1]. При этом по дуальному определению дифференциального оператора (20)

$$\left\langle s_n(\lambda) e^{z\lambda}, \widehat{f} \right\rangle = \left(s_n(D) f\right)(z).$$

Отсюда вытекает, что

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{h^n}{n!} \left(s_n(D) f\right)(z) \to \left\langle e^{z\lambda} \left(\operatorname{sym}_\zeta e^{h\zeta}\right)(\lambda), \widehat{f} \right\rangle$$

равномерно по $z \in d$ и $h \in d'$. □

Из доказанного свойства вытекает, что π-симметричный сдвиг $\operatorname{sym} f(z+h)$ является аналитической функцией на бицилиндре $\Omega_0 \times U_\varepsilon$.

Свойство 5. *Для любых* $h \in U_\varepsilon$ и $\lambda \in \mathbf{C}$ *выполняется соотношение*

$$\left(\operatorname{sym} e^{hD}\right)\left(e^{\lambda z}\right) = e^{\lambda z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} s_n(\lambda) = e^{\lambda z} \left(\operatorname{sym}_\zeta e^{h\zeta}\right)(\lambda),$$

причем ряд сходится равномерно по (z, h) *на компактах из бицилиндра* $\Omega_0 \times U_\varepsilon$.

Доказательство. С одной стороны, по дуальному определению дифференциального оператора (20) и по свойству (14) имеем

$$s_n(D) e^{\lambda z} = e^{\lambda z} s_n(\lambda),$$

значит, по свойству 4

$$\left(\operatorname{sym} e^{hD}\right)\left(e^{\lambda z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} s_n(D) e^{\lambda z} = e^{\lambda z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} s_n(\lambda).$$

С другой стороны, по определению оператора $\operatorname{sym} e^{hD}$ для любого $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ имеем

$$(\operatorname{sym} e^{hD})(e^{\lambda_0 z}) = \langle e^{z\lambda} \left(\operatorname{sym}_\zeta e^{h\zeta}\right)(\lambda), \widehat{e^{\lambda_0 z}}\rangle.$$

Учитывая, что $\widehat{e^{\lambda_0 z}} = \delta_{\lambda_0}$ – функционал из $P^*(\Omega)$, действующий по правилу $\varphi \mapsto \varphi(\lambda_0)$, получаем

$$(\operatorname{sym} e^{hD})(e^{\lambda_0 z}) = \langle e^{z\lambda} \left(\operatorname{sym}_\zeta e^{h\zeta}\right)(\lambda), \delta_{\lambda_0}\rangle = e^{\lambda_0 z} \left(\operatorname{sym}_\zeta e^{h\zeta}\right)(\lambda_0).$$

Тем самым свойство доказано. □

Свойство 6. *Отображение* $(\operatorname{sym} e^{hD})^{\circledast} : P(\Omega_0) \to P(\Omega)$, *дуальное по отношению к отображению* $\operatorname{sym} e^{hD} : O(\Omega) \to O(\Omega_0)$, *действует по правилу*

$$\varphi(\lambda) \mapsto \varphi(\lambda) \left(\operatorname{sym}_\zeta e^{h\zeta}\right)(\lambda).$$

Доказательство. Выберем произвольную функцию $\varphi \in P(\Omega_0)$. Для любого фиксированного $\lambda \in \mathbf{C}$ функция $e^{\lambda z}$ принадлежит $O(\Omega)$, причем функционал $\widehat{e^{\lambda z}}$ принадлежит $P^*(\Omega)$ и действует по правилу $\varphi \to \varphi(\lambda)$. В силу соотношений (16)

$$\left((\operatorname{sym} e^{hD})^{\circledast}(\varphi)\right)(\lambda) = \left\langle (\operatorname{sym} e^{hD})^{\circledast}(\varphi), \widehat{e^{\lambda z}} \right\rangle = \langle \widehat{\varphi}, (\operatorname{sym} e^{hD})(e^{\lambda z})\rangle.$$

По свойству 5

$$\left((\operatorname{sym} e^{hD})^{\circledast}(\varphi)\right)(\lambda) = \langle \widehat{\varphi}, e^{\lambda z} \left(\operatorname{sym}_\zeta e^{h\zeta}\right)(\lambda)\rangle.$$

Функционал $\widehat{\varphi}$ лежит в пространстве $O^*(\Omega_0)$ и действует по переменной z. Значит,

$$\left((\operatorname{sym} e^{hD})^{\circledast}(\varphi)\right)(\lambda) = \langle \widehat{\varphi}, e^{\lambda z}\rangle \left(\operatorname{sym}_\zeta e^{h\zeta}\right)(\lambda) = \varphi(\lambda)(\operatorname{sym}_\zeta e^{h\zeta})(\lambda).$$

Свойство доказано. □

§4. Симметричная свертка

1. Оператор симметричной свертки. Напомним, что выбранная ранее целая функция $\pi(z)$ имеет минимальный тип при порядке 1 и для нее существует оператор π-симметризации $\operatorname{sym} : O(\mathbf{C}) \to O_\pi(\mathbf{C})$. По свойству 4 π-симметричного сдвига для любого $h \in U_\varepsilon$ π-симметричный сдвиг $\operatorname{sym} f(z+h)$ произвольной функции $f \in O(\Omega)$ лежит в пространстве $O(\Omega_0)$. Выберем произвольный элемент φ из $P(\Omega_0)$.

Его дуальный элемент $\widehat{\varphi}$ лежит в $O^*(\Omega_0)$. Рассмотрим *оператор π-симметричной свертки*, который произвольной функции $f \in O(\Omega)$ ставит в соответствие функцию

$$(\widehat{\varphi} * f)(h) := \langle \widehat{\varphi}, \operatorname{sym} f(z+h) \rangle \,, \; h \in U_\varepsilon.$$

По свойству 4 π-симметричного сдвига функция $(\widehat{\varphi} * f)(h)$ принадлежит пространству $O(U_\varepsilon)$, значит, оператор π-симметричной свертки $\widehat{\varphi} * \cdot$ является отображением из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(U_\varepsilon)$.

Рассмотрим свойства оператора π-симметричной свертки.

Свойство 7. *Оператор $\widehat{\varphi} * \cdot : O(\Omega) \to O(U_\varepsilon) \,|f \mapsto \widehat{\varphi} * f$ есть линейное непрерывное отображение.*

Доказательство. Линейность оператора $\widehat{\varphi} * \cdot$ вытекает из линейности оператора π-симметричного сдвига. Убедимся в его непрерывности. Пусть d_φ – определяющее множество аналитического функционала $\widehat{\varphi} \in O^*(\Omega_0)$. Выберем произвольный компакт d в U_ε, произвольную точку $z' \in d_\varphi$ и ее δ-окрестность $U_\delta(z') \subseteq \Omega$. Так как $\rho_\varphi := \rho(d_\varphi, \partial\Omega) > \rho(\Omega_0, \partial\Omega) \geqslant \varepsilon$, то можно считать, что $\delta \in (\varepsilon, \rho_\varphi)$. Пусть $|d| := \max_{h \in d} |h|$. Так как d – компакт в U_ε, то $|d| \in (0, \varepsilon)$. Выберем произвольное $\varepsilon_0 \in (|d|, \varepsilon)$. По условию 3^0 из определения оператора π-симметризации найдутся такие $N \in \mathbf{N}$ и $R > 0$, что для выбранного ε_0 и всех $n \geqslant N$ вне круга $|z| < R$ выполняется неравенство (2).

Во-первых, если $f \in O(\Omega)$ и $z \in U_\delta(z')$, то для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$|(s_n(D)f)(z)| \leqslant A M_f \left(\frac{n}{\varepsilon_0 e} \right)^n,$$

где $M_f := \sup\limits_{z \in U_\delta(z')} |f(z)|$, константа $A > 0$ зависит только от ε и δ. Действительно, пусть $R_k := \frac{k}{\varepsilon}$ и K – целая часть $[R\varepsilon]$ числа $R\varepsilon$. Если целое k больше K, то

$$R_k = \frac{k}{\varepsilon} \geqslant \frac{[R\varepsilon] + 1}{\varepsilon} \geqslant R.$$

Значит, для любых $n \geqslant N$ и $k > K$ имеем

$$\left| s_n^{(k)}(0) \right| \leqslant \frac{k!}{R_k^k} \sup_{|z| \leqslant R_k} |s_n(z)| \leqslant k! \left(\frac{n}{\varepsilon_0 e} \right)^n \frac{e^{\varepsilon R_k}}{R_k^k} = k! \left(\frac{n}{\varepsilon_0 e} \right)^n \frac{e^k \varepsilon^k}{k^k}.$$

При этом, если $z \in U_\delta(z')$, то $\left|f^{(k)}(z)\right| \leqslant M_f k! \delta^{-k}$, значит, для всех целых $n \geqslant N$ имеем

$$\begin{aligned}
&|(s_n(D)f)(z)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_n^{(k)}(0)}{k!} f^{(k)}(z)\right| \\
&\leqslant M_f \left(\sum_{k=0}^{K} \left|s_n^{(k)}(0)\right| \delta^{-k} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \left|s_n^{(k)}(0)\right| \delta^{-k}\right) \\
&\leqslant M_f \left(\frac{n}{\varepsilon_0 e}\right)^n \left(\sum_{k=0}^{K} k! \frac{e^{\varepsilon R}}{R^k \delta^k} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^k \frac{e^k k!}{k^k}\right) \leqslant AM_f \left(\frac{n}{\varepsilon_0 e}\right)^n.
\end{aligned}$$

Во-вторых, перебирая всевозможные z' из компакта d_φ, получаем оценку для всех z из δ-окрестности $d_\varphi(\delta)$ компакта d_φ:

$$|(s_n(D)f)(z)| \leqslant AM_f(d_\varphi) \left(\frac{n}{\varepsilon_0 e}\right)^n,$$

где $M_f(d_\varphi) := \sup_{z \in d_\varphi(\delta)} |f(z)|$ и $n \geqslant N$. Значит, для всех z из $d_\varphi(\delta)$ и всех $h \in d$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} \frac{h^n}{n!} (s_n(D)f)(z)\right| \leqslant AM_f(d_\varphi) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!} \left(\frac{|d|}{\varepsilon_0}\right)^n.$$

Так как $|d| < \varepsilon_0$, то последний ряд сходится. Его сумму обозначим через $B(d)$. Компакт d_φ является определяющим для функционала $\widehat{\varphi}$, значит,

$$\left|\left\langle \widehat{\varphi}, \sum_{n=N}^{\infty} \frac{h^n}{n!} (s_n(D)f)(z)\right\rangle\right| \leqslant AB(d)C(d_\varphi)M_f(d_\varphi)$$

равномерно по $h \in d$. Здесь константа $C(d_\varphi)$ не зависит от $f \in O(\Omega)$.

В-третьих, если $f_k \to 0$ в пространстве $O(\Omega)$, то $M_{f_k}(d_\varphi) \to 0$ и $s_n(D)f_k \to 0$ в пространстве $O(\Omega)$ для любого целого $n \geqslant 0$. Значит, по свойству 4 π-симметричного сдвига

$$\begin{gathered}
|\langle \widehat{\varphi}, \operatorname{sym} f_k(z+h)\rangle| \\
\leqslant \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|h|^n}{n!} |\langle \widehat{\varphi}, (s_n(D)f_k)(z)\rangle| + AB(d)C(d_\varphi)M_{f_k}(d_\varphi) \to 0
\end{gathered}$$

равномерно по $h \in d$. В силу произвольности выбора компакта d из U_ε заключаем, что оператор $\widehat{\varphi} * \cdot : O(\Omega) \to O(U_\varepsilon)$ есть линейное непрерывное отображение. Тем самым свойство доказано. $\square$

Дуальное отображение по отношению к оператору π-симметричной свертки $\widehat{\varphi} * \cdot : O(\Omega) \to O(U_\varepsilon)$ действует из пространства $P(U_\varepsilon)$ в пространство $P(\Omega)$. При этом пространство $P(U_\varepsilon)$ совпадает с введенным ранее пространством P_ε.

Свойство 8. *Дуальное отображение $P_\varepsilon \to P(\Omega)$ по отношению к оператору π-симметричной свертки $\widehat{\varphi} * \cdot : O(\Omega) \to O(U_\varepsilon)$ действует по правилу*

$$g \mapsto \varphi \operatorname{sym} g.$$

Доказательство. Сопряженная операция по отношению к оператору π-симметричной свертки $\widehat{\varphi} * \cdot$ переводит функционал $\widehat{g} \in O^*(U_\varepsilon)$ в функционал $\widehat{\psi} \in O^*(\Omega)$ по правилу $\left\langle \widehat{\psi}, f \right\rangle = \langle \widehat{g}, \widehat{\varphi} * f \rangle$. Отсюда следует, что дуальная операция по отношению к оператору π-симметричной свертки переводит функцию $g(\lambda) = \langle \widehat{g}, e^{\lambda z} \rangle \in P_\varepsilon$ в функцию $\psi(\lambda) = \left\langle \widehat{\psi}, e^{\lambda z} \right\rangle \in P(\Omega)$. По определению функционала $\widehat{\psi}$ и по свойству 5 оператора π-симметричного сдвига, имеем

$$\psi(\lambda) = \left\langle \widehat{g}, \left\langle \widehat{\varphi}, e^{\lambda z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} s_n(\lambda) \right\rangle \right\rangle = \varphi(\lambda) \left\langle \widehat{g}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} s_n(\lambda) \right\rangle$$

$$= \varphi(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle \widehat{g}, h^n \rangle}{n!} s_n(\lambda) = \varphi(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} s_n(\lambda) = \varphi(\lambda) \left(\operatorname{sym} g\right)(\lambda).$$

Значит, $\psi = \varphi \operatorname{sym} g$. Тем самым свойство доказано. $\square$

2. Дуальные подпространства и дуальные аннуляторы. Понятие дуального элемента порождает понятие дуального подпространства и понятие дуального аннулятора. Определим эти понятия. Если $W \subseteq O(\Omega)$ и $I \subseteq P(\Omega)$ – замкнутые подпространства, то замкнутые подпространства $\widehat{W} := (L_\Omega^*)^{-1}(W) \subseteq P^*(\Omega)$ и $\widehat{I} := L_\Omega^{-1}(I) \subseteq O^*(\Omega)$ называем *дуальными подпространствами* подпространств W и I соответственно. Если $W^0 \subseteq O^*(\Omega)$ и $I^0 \subseteq P^*(\Omega)$ – аннуляторы замкнутых подпространств $W \subseteq O(\Omega)$ и $I \subseteq P(\Omega)$, то замкнутые подпространства $\widehat{W^0} := L_\Omega(W^0) \subseteq P(\Omega)$ и $\widehat{I^0} := L_\Omega^*(I^0) \subseteq O(\Omega)$ называем *дуальными аннуляторами* подпространств W и I соответственно. Из (12) легко вытекает, что дуальный аннулятор $\widehat{W^0}$ совпадает с аннулятором дуального подпространства $\widehat{W}$, а дуальный аннулятор $\widehat{I}^0$ совпадает с аннулятором дуального подпространства $\widehat{I}$, то есть

$$\widehat{W}^0 = \left(\widehat{W}\right)^0, \ \widehat{I}^0 = \left(\widehat{I}\right)^0.$$

По свойствам биполяр между совокупностью $\{W\}$ всех замкнутых подпространств в $O(\Omega)$ и совокупностью $\{V\}$ всех замкнутых подпространств в $O^*(\Omega)$ можно установить взаимно однозначное соответствие по правилу ортогональности:

$$W = V^0, \ V = W^0.$$

Отсюда вытекает, что между совокупностью $\{W\}$ замкнутых подпространств в $O(\Omega)$ и совокупностью $\{I\}$ замкнутых подпространств в $P(\Omega)$ можно установить взаимно однозначное соответствие по следующему правилу:

$$W = \widehat{I}^0, \ I = \widehat{W}^0.$$

3. Однородное уравнение симметричной свертки. Выберем произвольную функцию $\varphi \in P(\Omega_0)$ и рассмотрим однородное уравнение π-симметричной свертки

$$\widehat{\varphi} * f = 0, \ f \in O(\Omega). \tag{22}$$

В силу линейности и непрерывности оператора π-симметричной свертки множество W_φ решений $f \in O(\Omega)$ уравнения (22) есть замкнутое подпространство в $O(\Omega)$.

Совокупность J_φ всех элементов из $P(\Omega)$, допускающих представление в виде $p\varphi$, где $p \in \mathbf{C}[\pi(z)]$, называется *полиномиальной оболочкой* (точнее, $\mathbf{C}[\pi(z)]$-оболочкой) функции φ в пространстве $P(\Omega)$, а ее замыкание $I_\varphi = \overline{J_\varphi}$ в топологии $P(\Omega)$ называется *замкнутой полиномиальной оболочкой* функции φ в пространстве $P(\Omega)$. Следующее предложение вскрывает строение дуального аннулятора подпространства W_φ.

Свойство 9. *Дуальный аннулятор $\widehat{W}_\varphi^0$ замкнутого подпространства W_φ совпадает с замкнутой полиномиальной оболочкой I_φ функции φ в пространстве $P(\Omega)$.*

Доказательство. Подпространство W_φ решений уравнения (22) есть ядро оператора π-симметричной свертки $u : O(\Omega) \to O(U_\varepsilon)$. По свойству 7 оператор u является непрерывным. Так как пространства $O(\Omega)$

и $O(U_\varepsilon)$ являются рефлексивными, то второе сопряженное отображение $(u^*)^*$ совпадает с u. Отсюда вытекает, что ортогональное подпространство $W_\varphi^0 \subseteq O^*(\Omega)$ совпадает с замыканием в $O^*(\Omega)$ образа $u^*(O^*(U_\varepsilon))$. Последнее равносильно тому, что дуальный аннулятор $\widehat{W}_\varphi^0$ совпадает с замыканием в $P(\Omega)$ образа $u^\circledast(P(U_\varepsilon))$, где $u^\circledast$ – дуальная к u операция. По свойству 8 дуальный аннулятор $\widehat{W}_\varphi^0$ совпадает с замыканием в $P(\Omega)$ множества элементов вида $\varphi \operatorname{sym} g$, где $g \in P(U_\varepsilon)$. Частичные суммы g_n ряда Тейлора функции g сходятся к ней в топологии пространства $P(U_\varepsilon)$. Значит, по свойству 3 оператора π-симметризации справедливо соотношение $p_n := \operatorname{sym} g_n \to \operatorname{sym} g$ в топологии пространства $P(U_\varepsilon)$. Билинейная операция

$$P(\Omega_0) \times P(U_\varepsilon) \to P(\Omega) \,|\, (\psi, \phi) \mapsto \psi\phi$$

является раздельно непрерывной, значит, $\varphi p_n \to \varphi \operatorname{sym} g$ в топологии пространства $P(\Omega)$. Поэтому элементы вида $\varphi \operatorname{sym} g$ можно аппроксимировать в топологии пространства $P(\Omega)$ элементами вида $p\varphi$, где $p \in \operatorname{sym} \mathbf{C}[\lambda]$. Но по условию 2^0 из определения оператора π-симметризации $\operatorname{sym} \mathbf{C}[\lambda] = \mathbf{C}[\pi(z)]$. Значит, элементы вида $\varphi \operatorname{sym} g$ можно аппроксимировать в топологии пространства $P(\Omega)$ элементами вида $p\varphi$, где $p \in \mathbf{C}[\pi(z)]$. Это и требовалось доказать. □

Совокупность $W_{\widehat{\varphi}}$ всех функций $f \in O(\Omega)$, для которых $\langle \widehat{\varphi}, p(D)f \rangle = 0$ при любом выборе $p(D)$ из кольца $\mathbf{C}[\pi(D)]$, называется *полиномиальным ядром* (точнее $C[\pi(D)]$-ядром) функционала $\widehat{\varphi}$ в пространстве $O(\Omega)$. Легко увидеть, что $W_{\widehat{\varphi}}$ – замкнутое $\pi(D)$-инвариантное подпространство в $O(\Omega)$.

Лемма 4.1. *Аннулятор $I_\varphi^0 \subseteq P^*(\Omega)$ совпадает с совокупностью V_φ всех функционалов $\widehat{f} \in P^*(\Omega)$, для которых $\left\langle p\varphi, \widehat{f} \right\rangle = 0$ при любом выборе p из кольца $\mathbf{C}[\pi(z)]$.*

Доказательство. Действительно, при любом выборе p из кольца $\mathbf{C}[\pi(z)]$ имеет место включение $p\varphi \in J_\varphi \subseteq I_\varphi$. Значит, если $\widehat{f} \in I_\varphi^0$, то $\left\langle p\varphi, \widehat{f} \right\rangle = 0$. Это означает, что $\widehat{f} \in V_\varphi$, то есть $I_\varphi^0 \subseteq V_\varphi$. С другой стороны, если $\widehat{f} \in V_\varphi$, то при любом выборе p из кольца $\mathbf{C}[\pi(z)]$ имеет место равенство $\left\langle p\varphi, \widehat{f} \right\rangle = 0$. Следовательно, $\widehat{f} \in J_\varphi^0 = I_\varphi^0$ и, значит, $V_\varphi \subseteq I_\varphi^0$. □

Свойство 10. *Множество* W_φ *решений однородного уравнения* π-*симметричной свертки* (22) *совпадает с полиномиальным ядром* $W_{\widehat{\varphi}}$ *функционала* $\widehat{\varphi}$ *в пространстве* $O(\Omega)$.

Доказательство. По свойству 9 имеем $I_\varphi = \widehat{W}_\varphi^0$, значит, $W_\varphi = \widehat{I}_\varphi^0 = L_\Omega^*(I_\varphi^0)$. По доказанной лемме аннулятор $I_\varphi^0 \subseteq P^*(\Omega)$ совпадает с совокупностью V_φ всех функционалов $\widehat{f} \in P^*(\Omega)$, для которых $\left\langle p\varphi, \widehat{f}\right\rangle = 0$ при любом выборе p из кольца $\mathbf{C}[\pi(z)]$. Значит, W_φ совпадает с совокупностью всех функций $f \in O(\Omega)$, для которых $\left\langle p\varphi, \widehat{f}\right\rangle = 0$ при любом выборе p из кольца $\mathbf{C}[\pi(z)]$. Осталось заметить, что по формуле (16) справедливы равенства

$$\left\langle p\varphi, \widehat{f}\right\rangle = \left\langle v_p\left(\varphi\right), \widehat{f}\right\rangle = \langle \widehat{\varphi}, v_p^{\circledast}(f)\rangle = \langle \widehat{\varphi}, p(D)f\rangle\,,$$

где $v_p : P(\Omega) \to P(\Omega)$ – оператор умножения на p, $v_p^{\circledast}$ – его дуальный оператор. $\square$

§5. Полиномиальная аппроксимация

1. Плотность многочленов. Пусть $\pi(z)$ – целая функция минимального типа при порядке 1. Выберем произвольную функцию $\varphi \in P(\Omega)$ и обозначим символом O_φ (точнее, $O_\varphi(\Omega)$) пространство всех целых функций g, для которых произведение $(g \circ \pi)\,\varphi$ принадлежит пространству $P(\Omega)$. Отображение

$$u_\varphi\colon O_\varphi \to P(\Omega)|\, g \mapsto (g \circ \pi)\,\varphi$$

является взаимно однозначным. Наделим O_φ локально выпуклой топологией, индуцированной из $P(\Omega)$ отображением u_φ. Если область Ω является выпуклой, ограниченной и содержит начало, то можно дать простое независимое описание топологии пространства O_φ. Пусть $h_\Omega(\theta)$ – опорная функция области Ω в смысле комплексного анализа, $m \in \mathbf{N}$, $h_m(z) := \left(h_\Omega(\arg z) - \frac{1}{m}\right)|z|$, $O_{\varphi,m}$ – векторное пространство всех целых функций g, для которых конечна норма

$$\|g\|_m := \sup_{z\in\mathbf{C}} \frac{|g(\pi(z))\varphi(z)|}{\exp h_m(z)}.$$

Хорошо известное описание топологии пространства $P(\Omega)$ позволяет сказать, что в рассматриваемом случае пространство O_φ совпадает с индуктивным пределом пространств $O_{\varphi,m} := \left(O_{\varphi,m}; \|g\|_m\right)$ относительно вложений $O_{\varphi,m} \subseteq O_{\varphi,m+1}$, $m \in \mathbf{N}$. Легко убедиться, что пространства $O_{\varphi,m}$ являются банаховыми и вложения $O_{\varphi,m} \subseteq O_{\varphi,m+1}$ являются вполне непрерывными.

Так как $\varphi \in P(\Omega)$ и оператор $v_\pi : P(\Omega) \to P(\Omega)$ умножения на функцию $\pi(z)$ непрерывен, то пространство O_φ включает кольцо многочленов $\mathbf{C}[\lambda]$ и обладает структурой топологического модуля над этим кольцом. Принципиальное значение имеет вопрос плотности кольца многочленов $\mathbf{C}[\lambda]$ в пространстве O_φ.

Говорим, что целая функция $\pi(z)$ удовлетворяет *сильному ограничению*, если существует такой логарифмический вес μ порядка $\rho \in (1, +\infty)$, что для любого $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$ найдутся множество E_ε, радиальная плотность которого меньше ε, и такие константы $\kappa_\varepsilon \in [1; +\infty)$ и $h_\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$, что для любого $\zeta \in \hat{E}_\varepsilon$ выполняются следующие условия: для любого $z \in \pi^{-1}(\zeta) \setminus E_\varepsilon$ верны оценки

$$\kappa_\varepsilon^{-1} \leqslant \frac{\mu(|\zeta|)}{|z|} \leqslant \kappa_\varepsilon;$$

для любого $\zeta' \in \Delta(\zeta; h_\varepsilon) \cap \hat{E}_\varepsilon$ найдется $z' \in \pi^{-1}(\zeta') \setminus E_\varepsilon$, для которого верны оценки

$$\kappa_\varepsilon^{-1} \leqslant \kappa_\zeta^- \leqslant \frac{\mu(|\zeta'|)}{|z'|} \leqslant \kappa_\zeta^+ \leqslant \kappa_\varepsilon,$$

где $\kappa_\zeta^+ - \kappa_\zeta^- \to 0$ при $\zeta \to \infty$, $\zeta \in \hat{E}_\varepsilon$.

В работе [9] показано, что сильное ограничение на функцию $\pi(z)$ будет выполнено, если, например, функция $\pi(z)$ является целой функцией вполне регулярного роста при уточненном порядке $\rho(r) \to \rho' \in (0; 1)$ с постоянным положительным индикатором. Другие примеры приведены в конце работы [9].

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. *Пусть Ω — выпуклая область и $\varphi \in P(\Omega)$. Если целая функция $\pi(z)$ удовлетворяет сильному ограничению, то многочлены секвенциально плотны в пространстве O_φ.*

2. Предварительные сведения. В ходе доказательства теоремы 5.1 нам потребуются некоторые дополнительные сведения о целых π-симметричных функциях.

Лемма 5.1. *Если целая функция $\pi(z)$ удовлетворяет слабому ограничению и для целой π-симметричной функции $\psi := g \circ \pi$ вне некоторого множества E нулевой радиальной плотности выполняется соотношение*

$$\ln |\psi(z)| \leqslant \sigma|z| + o(|z|), \ z \to \infty, \tag{23}$$

где $\sigma > 0$, то при некоторых $A \geqslant 1$ и $K > 0$ π-симметричные многочлены $\psi_n := g_n \circ \pi$, где g_n – частичные суммы ряда Тейлора функции g, удовлетворяют равномерной по z оценке

$$|\psi_n(z)| \leqslant A \exp K\sigma|z|.$$

Константа K зависит от E и $\pi(z)$, но не зависит от ψ.

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$. По условиям слабого ограничения на функцию $\pi(z)$ радиальная плотность множества $E \cup E_\varepsilon$ меньше ε. В статье [9, п. 1.1] показано, что существуют $q > 1$ и окружности $|z| = r_k$, которые не пересекаются с множеством $E \cup E_\varepsilon$ и удовлетворяют условиям: $0 < r_k < r_{k+1} < qr_k$ и $r_k \to +\infty$ при $k \to \infty$. Если $r_k \leqslant |z| \leqslant r_{k+1}$, то в силу (23) имеем

$$\ln |\psi(z)| \leqslant \ln M_\psi(r_{k+1}) \leqslant \sigma r_{k+1} + o(r_{k+1})$$

$$\leqslant q\sigma r_k + o(r_k) \leqslant q\sigma|z| + o(|z|), \ k \to +\infty.$$

Здесь и далее символ $M_f(r)$ обозначает число $\max_{|z| \leqslant r} |f(z)|$. Из полученной оценки вытекает, что при некотором $c > 0$ для всех комплексных z имеет место неравенство

$$\ln |\psi(z)| = \ln |g(\pi(z))| \leqslant 2q\sigma\, |z| + c.$$

По следствию предложения 4 из работы [9] при некотором $C > 0$ для всех комплексных ζ имеет место неравенство

$$\ln |g(\zeta)| \leqslant 8q^2 \kappa_\varepsilon \sigma \mu(|\zeta|) + C,$$

где μ – логарифмический вес из условий слабого ограничения на функцию $\pi(z)$, продолженный на всю полупрямую $[0, +\infty)$. Так как функция μ является уточненным весом нулевого порядка и $q > 1$, то в некоторой окрестности точки $+\infty$ выполняется неравенство $\mu(qr) \leqslant q\mu(r)$, значит, можно так подобрать константу C и логарифмический вес μ, что неравенство $\mu(qr) \leqslant q\mu(r)$ будет выполняться для всех $r \geqslant 0$. В силу неравенств Коши для частичных сумм g_n справедливы равномерные по ζ оценки

$$|g_n(\zeta)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{M_g(q|\zeta|)}{(q|\zeta|)^k}|\zeta|^k \leqslant \tfrac{q}{q-1} M_g(q|\zeta|).$$

Значит, для всех комплексных ζ выполняются неравенства

$$|g_n(\zeta)| \leqslant \tfrac{q}{q-1} e^C \exp\left(8q^2 \kappa_\varepsilon \sigma \mu(q|\zeta|)\right) \leqslant \tfrac{q}{q-1} e^C \exp\left(8q^3 \kappa_\varepsilon \sigma \mu(|\zeta|)\right).$$

Учитывая, что по условию (7) на окружностях $|z| = r_k$ выполняются неравенства

$$\kappa_\varepsilon^{-1}|z| \leqslant \mu(|\pi(z)|) \leqslant \kappa_\varepsilon |z|,$$

заключаем, что на окружностях $|z| = r_k$ выполняются неравенства

$$|\psi_n(z)| = |g_n(\pi(z))| \leqslant \tfrac{q}{q-1} e^C \exp\left(8q^3 \kappa_\varepsilon^2 \sigma |z|\right).$$

Значит, вне круга $|z| \leqslant r_1$ для всех n выполняется неравенство

$$|\psi_n(z)| = |g_n(\pi(z))| \leqslant \tfrac{q}{q-1} e^C \exp\left(8q^4 \kappa_\varepsilon^2 \sigma |z|\right).$$

Так как $\psi_n(z) \to \psi(z)$ в пространстве $O(\mathbf{C})$, то существует такое $N \in \mathbf{N}$, что для всех $n > N$ в круге $|z| \leqslant r_1$ выполняется неравенство

$$|\psi_n(z)| = |g_n(\pi(z))| \leqslant 2M_\psi(r_1) \exp\left(8q^4 \kappa_\varepsilon^2 \sigma |z|\right).$$

Следовательно, для любых n и любых z выполняется неравенство $|\psi_n(z)| \leqslant A \exp K\sigma|z|$, где

$$A := \max\left\{\tfrac{q}{q-1} e^C, 2M_\psi(r_1), B\right\}, \ K := 8q^4 \kappa_\varepsilon^2,$$

$$B := \max_{n \leqslant N} \max_{|z| \leqslant r_1} \frac{|\psi_n(z)|}{\exp\left(K\sigma|z|\right)}.$$

Лемма доказана. □

Две целые функции ψ_1, ψ_2 называются *эквивалентными* (в обозначениях $\psi_1 \sim \psi_2$), если вне некоторого множества нулевой радиальной плотности

$$|\ln|\psi_1(z)| - \ln|\psi_2(z)|| = o(|z|), \ z \to \infty.$$

Введенное отношение эквивалентности рефлексивно, симметрично, транзитивно; оно сохраняется при умножении на эквивалентные функции: если $f_1 \sim f_2$ и $g_1 \sim g_2$, то $f_1 g_1 \sim f_2 g_2$.

Доказательство теоремы 5.1 существенно опирается на следующую факторизационную теорему.

Теорема 5.2. *Если целая функция $\pi(z)$ подчинена сильному ограничению, то для любой целой π-симметричной функции ψ экспоненциального типа возможно представление $\psi = \psi_1\psi_2$, где ψ_1, ψ_2 – целые π-симметричные функции и $\psi_1 \sim \psi_2$.*

Эта теорема доказана автором в работе [9, теорема 2]. Для случаев $\pi(z) \equiv z$ и $\pi(z)$ – многочлен факторизационная теорема доказана ранее в работах [14, теорема 4.2, следствие 4.3] и [15, предложение 3.2] соответственно.

Теорему 5.2 можно использовать при расщеплении целой π-симметричной функции ψ экспоненциального типа на $N := 2^k$ эквивалентных сомножителей. Действительно, предположим, что $\psi = \psi_1\psi_2$ и $\psi_1 \sim \psi_2$. При этом $\psi_1 = \psi_{11}\psi_{12}$, $\psi_2 = \psi_{21}\psi_{22}$ и $\psi_{11} \sim \psi_{12}$, $\psi_{21} \sim \psi_{22}$. Тогда $\psi_{11}^2 \sim \psi_1 \sim \psi_2 \sim \psi_{21}^2$. Значит, $\psi_{11} \sim \psi_{21}$ и $\psi_{11} \sim \psi_{12} \sim \psi_{21} \sim \psi_{22}$.

3. Доказательство теоремы 5.1. Если $g \in O_\varphi$, то для некоторого $R > 0$ имеет место включение $g \in O_\varphi(\Omega_R)$, где Ω_R — выпуклая область $\{z \in \Omega : |z| < R\}$. При этом вложение $O_\varphi(\Omega_R) \subseteq O_\varphi$ является непрерывным, значит, без потери общности можно считать, что выпуклая область Ω является ограниченной. Выберем произвольную точку $a \in \Omega$. Область $\Omega - a$ содержит начало и является выпуклой и ограниченной. Пусть $h_{\Omega-a}(\theta)$ – опорная функция области $\Omega - a$ в смысле комплексного анализа, $h_m(z) := \left(h_{\Omega-a}(\arg z) - \frac{1}{m}\right)|z|$, $O_{\varphi,m}$ – векторное пространство целых функций g, для которых конечна норма

$$\|g\|_m := \sup_{z\in\mathbf{C}} \frac{|g(\pi(z))\varphi(z)e^{-az}|}{\exp h_m(z)}.$$

Легко проверить, что отображение

$$P(\Omega) \to P(\Omega - a)|\, \psi(z) \mapsto \psi(z)e^{-az}$$

является топологическим изоморфизмом, значит, пространство O_φ совпадает с индуктивным пределом пространств $O_{\varphi,m} := \left(O_{\varphi,m}; \|g\|_m\right)$ относительно вполне непрерывных вложений $O_{\varphi,m} \subseteq O_{\varphi,m+1}$, $m \in \mathbf{N}$.

Выберем произвольный элемент $g \in O_\varphi$. Пространство O_φ содержит многочлены, значит, для некоторого $m_0 \geqslant 4$ имеет место включение $1 \in O_{\varphi,m_0-3}$. Это означает, что

$$\sup_{z\in\mathbf{C}} \frac{|\varphi(z)e^{-az}|}{\exp h_{m_0-3}(z)} =: \|1\|_{m_0-3} < +\infty. \tag{24}$$

Из определения индуктивного предела вытекает, что при некотором натуральном $m \geqslant m_0$ имеет место включение $g \in O_{\varphi,m-3}$. Значит, для целой функции $f := \psi\varphi$, где $\psi := g \circ \pi$ – целая π-симметричная функция, имеем

$$\sup_{z\in\mathbf{C}} \frac{|f(z)e^{-az}|}{\exp h_{m-3}(z)} =: ||g||_{m-3} < +\infty. \tag{25}$$

Из (24) и (25) вытекает, что функции f и φ являются целыми функциями экспоненциального типа. Отсюда следует, что функция $\psi := \frac{f}{\varphi}$ является целой функцией экспоненциального типа [16, предложение 3.3]. Значит, при некотором $\sigma > 0$ справедливо соотношение

$$\ln|\psi(z)| \leqslant \sigma|z| + o(|z|),\ z \to \infty. \tag{26}$$

Подберем $k \in \mathbf{N}$ и $\varepsilon > 0$ такими, что

$$N := 2^k \geqslant K\sigma(m-1)(m-2)$$

и

$$\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{1}{(m-1)(m-2)} - N^{-1}K\sigma,$$

где K – константа из леммы 5.1. Воспользуемся факторизационной теоремой 5.2. Расщепляем функцию ψ на N множителей: $\psi = \psi_1 \times \ldots \times \psi_N$, где $\psi_i = g_i \circ \pi$ – целые π-симметричные функции и $\psi_i \sim \psi_j$ для любых $i, j \in \{1, \ldots, N\}$. Из (26) вытекает, что вне некоторого множества E нулевой радиальной плотности выполняются оценки

$$\ln|\psi_i(z)| \leqslant N^{-1}\sigma|z| + o(|z|),\ z \to \infty,\ i \in \{1, \ldots, N\}.$$

По лемме 5.1 при некоторых $A_i \geqslant 1$ π-симметричные многочлены $\psi_{i,n} := g_{i,n} \circ \pi$, где $g_{i,n}$ – частичные суммы ряда Тейлора функции g_i, удовлетворяют равномерной по z оценке

$$|\psi_{i,n}(z)| \leqslant A_i \exp N^{-1}K\sigma|z|.$$

Выберем произвольную стремящуюся к бесконечности последовательность радиусов r_s. Далее, используя процедуру, разработанную при доказательстве теоремы 4.4 из [14], для фиксированного $s \in \mathbf{N}$ построим систему π-симметричных многочленов $\psi_{1,n_1}, \ldots, \psi_{N,n_N}$ и систему положительных чисел $R_0 := r_s < R_1 < \ldots < R_N$ со следующими свойствами:

$$
\begin{aligned}
|\psi_{i,n_i}(z)| &\leqslant 2\,|\psi_i(z)| \quad \text{при} \quad |z| \leqslant R_{i-1},\\
|\psi_{i,n_i}(z)| &\leqslant A_i \exp N^{-1} K\sigma|z| \quad \text{при} \quad R_{i-1} \leqslant |z| \leqslant R_i,\\
|\psi_{i,n_i}(z)| &\leqslant \exp \frac{\varepsilon}{2} N^{-1}|z| \quad \text{при} \quad |z| \geqslant R_i.
\end{aligned}
$$

Многочлен $p_s := \prod_{i=1}^{N} \psi_{i,n_i}$ допускает следующие оценки. При $|z| \leqslant R_0$ справедливо неравенство

$$|p_s(z)| \leqslant 2^N \,|\psi_1(z) \times \ldots \times \psi_N(z)| = 2^N \,|\psi(z)|\,, \tag{27}$$

при $|z| \geqslant R_N$ справедливо неравенство

$$|p_s(z)| \leqslant \left(\exp \frac{\varepsilon}{2} N^{-1}|z|\right)^N = \exp \frac{\varepsilon}{2}|z|, \tag{28}$$

а при $R_{i-1} \leqslant |z| \leqslant R_i$ справедливо неравенство

$$|p_s(z)| \leqslant 2^N A\,|\psi_{i+1}(z) \times \ldots \times \psi_N(z)| \exp\{N^{-1}K\sigma|z| + \frac{\varepsilon}{2}N^{-1}(i-1)|z|\}, \tag{29}$$

где константа $A := A_1 \times \cdots \times A_N$ не зависит от s.

Оценим произведения $p_s(z)\varphi(z)e^{-az}$. Для этого расщепляем φ на N множителей: $\varphi = \varphi_1 \times \ldots \times \varphi_N$, где φ_i – целые функции и $\varphi_i \sim \varphi_j$ для любых $i, j \in \{1, \ldots, N\}$. Расщепления функций ψ и φ индуцируют расщепление $f = f_1 \times \ldots \times f_N$, в котором $f_i = \psi_i\varphi_i$ – целые функции и $f_i \sim f_j$ для любых $i, j \in \{1, \ldots, N\}$. Из оценки (24) вытекает, что

$$\sup_{z\in\mathbf{C}} \max \left\{1; \frac{\left|\varphi_i\,(z) \exp\left\{-N^{-1}az\right\}\right|}{\exp N^{-1}h_{m-2}(z)}\right\} =: B_i < +\infty, \tag{30}$$

а из оценки (25) вытекает, что

$$\sup_{z\in\mathbf{C}} \max \left\{1; \frac{\left|f_i\,(z) \exp\left\{-N^{-1}az\right\}\right|}{\exp\left(N^{-1}h_{m-2}(z)\right)}\right\} =: C_i < +\infty. \tag{31}$$

В силу (27) при $|z| \leqslant R_0$ имеем

$$\left|p_s(z)\varphi(z)e^{-az}\right| \leqslant 2^N \left|\psi(z)\varphi(z)e^{-az}\right| = 2^N \left|f(z)e^{-az}\right|,$$

значит, в силу (25) при $|z| \leqslant R_0$ имеет место оценка

$$\left|p_s(z)\varphi(z)e^{-az}\right| \leqslant 2^N ||g||_{m-3} \exp h_{m-3}(z). \tag{32}$$

В силу (28), при $|z| \geqslant R_N$ имеем

$$\left|p_s(z)\varphi(z)e^{-az}\right| \leqslant \left|\varphi(z)e^{-az}\right| \exp \frac{\varepsilon}{2}\,|z|\,.$$

При этом

$$\frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{m-3} - \frac{1}{m-2} = \frac{1}{(m-2)(m-3)},$$

значит, в силу (24) при $|z| \geqslant R_N$ имеет место оценка

$$\left|p_s(z)\varphi(z)e^{-az}\right| \leqslant ||1||_{m-3} \exp h_{m-2}(z). \tag{33}$$

При $R_{i-1} \leqslant |z| \leqslant R_i$, в силу (29), имеем

$$\left|p_s(z)\varphi(z)e^{-az}\right| \leqslant 2^N A|e^{-az}||f_{i+1}(z) \times \ldots \times f_N(z)| \times$$

$$\times |\varphi_1(z) \times \ldots \times \varphi_i(z)| \exp\left(N^{-1}K\sigma|z| + \frac{\varepsilon}{2}N^{-1}(i-1)|z|\right).$$

В силу оценок (31) для всех $z \in \mathbf{C}$ имеем

$$\left|f_{i+1}(z) \times \ldots \times f_N(z) \exp\left(-\frac{N-i}{N}az\right)\right|$$

$$\leqslant C \exp\left(\frac{N-i}{N}h_{m-2}(z)\right), \ C := C_1 \times \cdots \times C_N.$$

В силу оценок (30) для всех $z \in \mathbf{C}$ имеем

$$\left|\varphi_1(z) \times \ldots \times \varphi_i(z) \exp\left(-\frac{i}{N}az\right)\right|$$

$$\leqslant B \exp\left(\frac{i}{N}h_{m-2}(z)\right), \ B := B_1 \times \ldots \times B_N.$$

Учитывая, что

$$N^{-1}K\sigma + \frac{\varepsilon}{2}N^{-1}(i-1) \leqslant \frac{1}{m-2} - \frac{1}{m-1} = \frac{1}{(m-1)(m-2)},$$

для всех z из кольца $R_{i-1} \leqslant |z| \leqslant R_i$ получаем

$$\left|p_s(z)\varphi(z)e^{-az}\right| \leqslant 2^N ABC \exp h_{m-1}(z). \tag{34}$$

Из (32), (33) и (34) вытекает, что для всех $z \in \mathbf{C}$ выполняется неравенство

$$\left|p_s(z)\varphi(z)e^{-az}\right| \leqslant D \exp h_{m-1}(z), \tag{35}$$

где $D := \max\left\{2^N ABC, 2^N ||g||_{m-3}, ||1||_{m-3}\right\}$.

Осталось заметить, что последовательность π-симметричных многочленов $p_s := q_s \circ \pi$ сходится к функции $\psi := g \circ \pi$ равномерно на компактах. Из оценки (35) следует, что последовательность многочленов q_s сходится к функции g в пространстве $O_{\varphi,m}$, а это, в свою очередь, означает, что последовательность многочленов q_s сходится к функции g в пространстве O_φ. Теорема 5.1 доказана.

§6. Экспоненциальный синтез в ядре оператора симметричной свертки

1. Спектральный синтез. Соблюдая традицию, оператор $v_\pi : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$ умножения на целую функцию $\pi(z)$ обозначаем символом π, а его сопряженный оператор обозначаем символом π^*. Символом Δ_λ обозначим корневое подпространство оператора π^*, соответствующее собственному значению λ. Алгебраический спектр Λ оператора π^* совпадает с $\mathbf{C}$, а корневое подпространство $\Delta_\lambda \subseteq O^*(\mathbf{C})$ совпадает с линейной оболочкой множества

$$\left\{\delta_\xi^{(j)} : (j,\xi) \in \mathbf{Z}_+ \times \pi^{-1}(\lambda)\right\},$$

где $\delta_\xi^{(j)} \in O^*(\mathbf{C})$ – функционал, действующий по правилу $f \mapsto f^{(j)}(\xi)$ [1, предложение 1].

Пусть Ω – односвязная область в $\mathbf{C}$. Пространство $P(\Omega)$ является всюду плотным подпространством пространства $O(\mathbf{C})$ и вложение $P(\Omega) \subseteq O(\mathbf{C})$ является непрерывным. Значит, сильное сопряженное пространство $O^*(\mathbf{C})$ можно отождествить с подпространством сильного сопряженного пространства $P^*(\Omega)$. При этом вложение $O^*(\mathbf{C}) \subseteq P^*(\Omega)$ является непрерывным. Говорят, что корневой элемент $s \in \Delta_\lambda$ *погружен в подпространство* $V \subseteq P^*(\Omega)$, если $(\pi^* - \lambda)^j s \in V$ для любого $j \in \mathbf{Z}_+$. Замкнутое подпространство $V \subseteq P^*(\Omega)$ *допускает спектральный синтез* (синтез по корневым элементам оператора π^*), если оно совпадает с замыканием линейной оболочки множества корневых элементов оператора π^*, погруженных в V.

Пусть $\varphi \in P(\Omega)$. Для любого полинома p π-симметричный полином $p(\pi(z))$ имеет минимальный тип при порядке 1, значит, произведение $(p \circ \pi)\,\varphi$ принадлежит пространству $P(\Omega)$. Совокупность V_φ всех функционалов $\widehat{f} \in P^*(\Omega)$, для которых $\left\langle (p \circ \pi)\,\varphi, \widehat{f}\right\rangle = 0$ при любом выборе полинома p, называется *полиномиальным ядром функции φ в пространстве* $P^*(\Omega)$. Полиномиальное ядро V_φ совпадает с пересечением

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \left\{\widehat{f} \in P^*(\Omega) : \left\langle \pi^n \varphi, \widehat{f}\right\rangle = 0\right\}$$

и является замкнутым подпространством в $P^*(\Omega)$.

Роль пространства O_φ, введенного в предыдущем параграфе, раскрывается в следующем предложении.

Предложение 6.1. *Если целая функция $\pi(z)$ подчинена слабому ограничению, то следующие утверждения эквивалентны*:

1) *замкнутое подпространство $V_\varphi \subseteq P^*(\Omega)$ допускает спектральный синтез,*

2) *многочлены плотны в пространстве O_φ.*

Доказательство. Говорят, что комплексная плоскость допускает собственное π-исчерпание, если существуют открытые множества G_n, удовлетворяющие условиям: сужение функции $\pi\,(z)$ на каждое множество G_n является собственным отображением на некоторую односвязную область и

$$G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \mathbf{C}.$$

В силу теоремы 4 из работы [1] утверждения 1) и 2) будут эквивалентны, если комплексная плоскость допускает собственное π-исчерпание и полный образ $u_\varphi(O_\varphi)$ отображения

$$u_\varphi : O_\varphi \to P(\Omega)|\, g \mapsto (g \circ \pi)\varphi$$

замкнут в пространстве $P(\Omega)$. В силу предложения 4 из статьи [9] первое условие выполнено. Значит, осталось доказать, что полный образ $u_\varphi(O_\varphi)$ замкнут в пространстве $P(\Omega)$. Для этого покажем, что множество $\{(g \circ \pi)\varphi : g \in O(\mathbf{C})\}$ замкнуто в пространстве $O(\mathbf{C})$. Действительно, если $g_k \in O(\mathbf{C})$ и $(g_k \circ \pi)\varphi \to f$ в пространстве $O(\mathbf{C})$, то $f = \psi\varphi$, где ψ – целая функция. Вне множества нулей N производной π' функция ψ представляется в виде композиции $g \circ \pi$, где g – аналитическая функция на множестве $\mathbf{C} \setminus \pi(N)$, совпадающая с поточечным пределом функций g_k. Легко убедиться, что функция g является локально ограниченной, а множество $\pi(N)$ является устранимым, значит, g – целая функция и $\psi = g \circ \pi$, то есть $f = (g \circ \pi)\varphi$. Следовательно, множество $\{(g \circ \pi)\varphi : g \in O(\mathbf{C})\}$ замкнуто в пространстве $O(\mathbf{C})$. Замкнутость полного образа $u_\varphi(O_\varphi)$ вытекает из представления

$$u_\varphi(O_\varphi) = P(\Omega) \cap \{(g \circ \pi)\varphi : g \in O(\mathbf{C})\}$$

и из непрерывности вложения $P(\Omega) \subseteq O(\mathbf{C})$. □

Из этого предложения и теоремы 5.1 вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 6.1. *Если Ω – выпуклая область и целая функция $\pi(z)$ подчинена сильному ограничению, то замкнутое подпространство $V_\varphi \subseteq P^*(\Omega)$ допускает спектральный синтез.*

2. Экспоненциальный синтез. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} O^*(\Omega) & \xrightarrow{\eta^*} & P^*(\mathbf{C}) & & P(\mathbf{C}) & \xrightarrow{\eta} & O(\Omega) \\ {\scriptstyle L_\Omega}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L^*_{\mathbf{C}}} & \overset{(*)}{\longleftrightarrow} & {\scriptstyle L_{\mathbf{C}}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle L^*_\Omega} \\ P(\Omega) & \xrightarrow[\mu]{} & O(\mathbf{C}) & & O^*(\mathbf{C}) & \xrightarrow[\mu^*]{} & P^*(\Omega) \end{array} \tag{36}$$

Здесь μ^* – отображение, сопряжённое к отображению вложения μ, а η^* – отображение, сопряжённое к отображению вложения η. Отображения μ^*, η^* взаимно однозначны и диаграмма (36) коммутативна, то есть справедливы следующие соотношения:

$$\eta \circ L_{\mathbf{C}} = L^*_\Omega \circ \mu^*,\ \ \mu \circ L_\Omega = L^*_{\mathbf{C}} \circ \eta^* \tag{37}$$

[17, предложение 2.7].

Рассмотрим дуальный оператор $\pi^{\circledast} : P(\mathbf{C}) \to P(\mathbf{C})$ к оператору $\pi : O(\mathbf{C}) \to O(\mathbf{C})$. По формуле (17) оператор $\pi^{\circledast}$ функции $\psi \in P(\mathbf{C})$ ставит в соответствие функцию

$$\pi^{\circledast}(\psi)(\zeta) = \left\langle \widehat{\psi}, \pi(z)e^{\zeta z} \right\rangle = \left\langle \pi^* \widehat{\psi}, e^{\zeta z} \right\rangle,$$

где $\widehat{\psi} \in O^*(\mathbf{C})$ – дуальный элемент функции ψ. Для любого $\psi \in P(\mathbf{C})$ имеем

$$\left((\pi^{\circledast} - \lambda)^n \psi \right)(\zeta) = \left\langle (\pi^* - \lambda)^n\, \widehat{\psi}, e^{\zeta z} \right\rangle, \tag{38}$$

значит, дуальные элементы корневых элементов оператора $\pi^{\circledast}$ являются корневыми элементами оператора π^*. Отсюда вытекает, что алгебраический спектр оператора $\pi^{\circledast}$ совпадает с $\mathbf{C}$, а корневое подпространство, соответствующее собственному значению $\lambda \in \mathbf{C}$, совпадает с дуальным подпространством $\widehat{\Delta_\lambda} \subseteq P(\mathbf{C})$.

Для $j \in \mathbf{Z}_+$ и фиксированного $\xi \in \mathbf{C}$ функция $z \mapsto z^j e^{\xi z}$ принадлежит пространству $P(\mathbf{C})$. В силу (15) для любого функционала $\widehat{\psi} \in P^*(\mathbf{C})$ справедливы равенства

$$\left\langle \widehat{\psi}, z^j e^{\xi z} \right\rangle = \psi^{(j)}(\xi) = \left\langle L^*_{\mathbf{C}}(\widehat{\psi}), \delta^{(j)}_\xi \right\rangle = \left\langle \widehat{\psi}, L_{\mathbf{C}}(\delta^{(j)}_\xi) \right\rangle,$$

значит, $z^j e^{\xi z} = L_{\mathbf{C}}(\delta_\xi^{(j)})$ и $\widehat{z^j e^{\xi z}} = \delta_\xi^{(j)}$. Отсюда вытекает, что корневое подпространство $\widehat{\Delta_\lambda}$ оператора $\pi^{\circledast} : P(\mathbf{C}) \to P(\mathbf{C})$ совпадает с линейной оболочкой множества экспоненциальных одночленов

$$\left\{z^j e^{\xi z} : (j,\xi) \in \mathbf{Z}_+ \times \pi^{-1}(\lambda)\right\}.$$

Взаимная однозначность отображений η и μ^* позволяет считать, что $\Delta_\lambda \subseteq P^*(\Omega)$ и $\widehat{\Delta_\lambda} \subseteq O(\Omega)$. В силу (37) отображение L_Ω^* осуществляет изоморфизм векторных подпространств $\Delta_\lambda \subseteq P^*(\Omega)$ и $\widehat{\Delta_\lambda} \subseteq O(\Omega)$. Отсюда вытекает, что замкнутое подпространство $W \subseteq O(\Omega)$ допускает синтез по корневым элементам оператора $\pi^{\circledast}$ тогда и только тогда, когда его дуальное подпространство $\widehat{W} \subseteq P^*(\Omega)$ допускает синтез по корневым элементам оператора π^*.

Из теоремы 6.1 вытекает справедливость следующей аппроксимационной теоремы.

Теорема 6.2. *Если Ω – выпуклая область и целая функция $\pi(z)$ подчинена сильному ограничению, то всякое решение $f \in O(\Omega)$ однородного уравнения π-симметричной свертки* (22) *можно аппроксимировать в топологии пространства $O(\Omega)$ элементарными решениями.*

Доказательство. По свойству 10 подпространство $W_\varphi \subseteq O(\Omega)$ решений однородного уравнения π-симметричной свертки (22) совпадает с полиномиальным ядром $W_{\widehat{\varphi}}$ функционала $\widehat{\varphi}$ в пространстве $O(\Omega)$. Значит, дуальное подпространство $\widehat{W_{\widehat{\varphi}}} \subseteq P^*(\Omega)$ совпадает с полиномиальным ядром V_φ функции φ в пространстве $P^*(\Omega)$. По теореме 6.1 замкнутое подпространство $V_\varphi \subseteq P^*(\Omega)$ допускает синтез по корневым элементам оператора π^*, значит, замкнутое подпространство $W_\varphi \subseteq O(\Omega)$ допускает синтез по корневым элементам оператора $\pi^{\circledast}$. Осталось сказать, что корневые элементы оператора $\pi^{\circledast}$, лежащие в W_φ, являются элементарными решениями уравнения (22). □

Доказанная аппроксимационная теорема является источником новых результатов по спектральному синтезу в комплексной плоскости. Основу для этого представляют результаты статей [18] и [19] по локальному описанию целых функций. Например, опираясь на эти статьи, можно доказать аппроксимационную теорему для конечных систем однородных уравнений π-симметричной свертки. Первый серьезный шаг в этом направлении сделан в работе [20].

Литература

1. А. Б. Шишкин, *Проективное и инъективное описания в комплексной области. Двойственность.* — Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. **14**, No. 1 (2014), 47–65.
2. И. Ф. Красичков-Терновский, *Инвариантные подпространства аналитических функций.* II. *Спектральный синтез на выпуклых областях.* — Мат. сб. **88**, No. 1 (1972), 3–30.
3. H. Myggli, *Differentialgleichungen unendlich Honer Ordnung mit constanten Koeffizienten.* — Comment Math. Helv. **11** (1938), 151–179.
4. L. Schwartz, *Theorie generale des fonctions moyenne–periodiques.* — Ann. Math. **48** (1947), 857–929.
5. D. G. Dickson, *Convolution equation and harmonic analysis in spaces of entire functions.* — Trans. Amer. Math. Soc. **184** (1973), 373–385.
6. С. Г. Мерзляков, *О подпространствах аналитических функций, инвариантных относительно оператора кратного дифференцирования.* — Матем. заметки **40**, No. 5 (1986), 635–639.
7. А. Б. Шишкин, *Спектральный синтез для оператора, порождаемого умножением на степень независимой переменной.* — Мат. сб. **182**, No. 6 (1991), 828–848.
8. И. Ф. Красичков-Терновский, *Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами* IV. *Синтез.* — Мат. сб. **183**, No. 8 (1992), 23–46.
9. А. Б. Шишкин, *Факторизация целых симметричных функций экспоненциального типа.* — Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика **16**, No. 1 (2016), 42–68.
10. И. Ф. Красичков-Терновский, *Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами* I. *Теорема двойственности.* — Мат. сб. **182**, No. 11 (1991), 1559–1588.
11. И. Ф. Красичков-Терновский, *Инвариантные подпространства аналитических функций.* I. *Спектральный синтез на выпуклых областях.* — Мат. сб. **87(129)**, No. 4 (1972), 459–489.
12. А. Б. Шишкин, *Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.* — Мат. сб. **194**, No. 12 (2003), 123–160.
13. В. Напалков, *Уравнения свертки в многомерных пространствах.* Наука, М. (1982).
14. И. Ф. Красичков-Терновский, *Инвариантные подпространства аналитических функций.* I. *Спектральный синтез на выпуклых областях.* — Мат. сб. **87(129)**, No. 4 (1972), 459–489.
15. И. Ф. Красичков-Терновский, *Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами.* III. *Обильные подмодули.* — Мат. сб. **183**, No. 6 (1992), 55–86.
16. И. Ф. Красичков-Терновский, *Аппроксимационная теорема для однородного уравнения векторной свертки.* —Матем. сб. **195**, No. 9 (2004), 37–57.

17. А. Б. Шишкин, *Проективное и инъективное описания в комплексной области. Спектральный синтез и локальное описание аналитических функций.* Славянск-на-Кубани: Издательский центр филиала ФГБОУ ВПО “КубГУ,” (2013).
18. Т. А. Волковая, А. Б. Шишкин, *Локальное описание целых функций. Исследования по мат. анализу.* Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014, 212–223. (Итоги науки. Юг России. Мат. форум. Т. 8, ч. 1).
19. Т. А. Волковая, А. Б. Шишкин, *Локальное описание целых функций. Подмодули ранга* 1. — Владикавк. матем. журн. **16**, No. 2 (2014), 14–28.
20. Т. А. Волковая, *Синтез в полиномиальном ядре двух аналитических функционалов.* — Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. **14**, No. 3 (2014), 251–262.

Shishkin A. B. Exponential synthesis in the kernel of a symmetric convolution.

The paper describes a certain class of homogeneous equations of convolution type in spaces of analytic functions on convex domains. Sufficient conditions are formulated under which every solution of an equation from this class is approximated by its elementary solutions.

Кубанский государственный университет,
филиал в г. Славянске-на-Кубани,
Ставропольская ул., 149
350040 Краснодар, Россия
E-mail: Shishkin-home@mail.ru

Поступило 11 августа 2016 г.