Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 447, 2016 г.

Н. А. Широков

ГЛАДКОСТЬ ГОЛОМОРФНОЙ В ШАРЕ ФУНКЦИИ И ЕЕ МОДУЛЯ НА СФЕРЕ

Теорема В. П. Хавина–Ф. А. Шамояна [1] утверждает, что если функция f аналитична в единичном круге $\mathbb{D}$, непрерывна в замкнутом круге $\overline{\mathbb{D}}$ и ее модуль $|f|$ удовлетворяет условию Гёльдера порядка α, $0 < \alpha \leqslant 1$, на единичной окружности $\mathbb{T}$, то в предположении $f(z) \neq 0$ при $z \in \mathbb{D}$ оказывается, что функция f удовлетворяет в $\overline{\mathbb{D}}$ условию Гёльдера порядка $\frac{\alpha}{2}$, и этот показатель неулучшаем.[1] С. В. Кисляков [2] поставил вопрос о выполнении аналога теоремы В. П. Хавина–Ф. А. Шамояна в единичном шаре $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, в какой-то форме. Оказывается, что в шаре аналог упомянутой теоремы действительно справедлив.

Обозначим через $H^\alpha(S^n)$, $H^\alpha(\overline{\mathbb{B}}^n)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $S^n = \partial\,\mathbb{B}^n$, пространства функций φ, определенных на S^n и, соответственно, на $\mathbb{B}^n$ и удовлетворяющих условию

$$|\varphi(z) - \varphi(\zeta)| \leqslant C_\varphi \|z-\zeta\|^\alpha,\ z,\zeta \in S^n \text{ или } z,\zeta \in \overline{\mathbb{B}}^n$$

с полунормой

$$\big|\,\varphi\,\big|_{\alpha,S^n} \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{z,\zeta\in S^n\\ z\neq\zeta}} \frac{|\varphi(z)-\varphi(\zeta)|}{\|z-\zeta\|^\alpha}, \qquad \big|\,\varphi\,\big|_{\alpha,\overline{\mathbb{B}}^n} \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{z,\zeta\in\overline{\mathbb{B}}^n\\ z\neq\zeta}} \frac{|\varphi(z)-\varphi(\zeta)|}{\|z-\zeta\|^\alpha}.$$

Если $n = 1$, то пишем, соответственно, $H^\alpha(\mathbb{T})$ и $H^\alpha(\overline{\mathbb{D}})$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть функция f голоморфна в шаре $\mathbb{B}^n$, $n \geqslant 2$, и непрерывна в замкнутом шаре $\overline{\mathbb{B}}^n$. Предположим, что $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{B}^n$, и $|f| \in H^\alpha(S^n)$, $0 < \alpha \leqslant 1$. Тогда $f \in H^{\frac{\alpha}{2}}(\overline{\mathbb{B}}^n)$.*

Замечание. Показатель $\frac{\alpha}{2}$ неулучшаем, что будет показано в другой работе.

Ключевые слова: голоморфные функции, классы Гёльдера, теорема В. П. Хавина–Ф. А. Шамояна.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 14-01-00198_а.

[1]В литературе это утверждение известно также как теорема Л. Карлесона–И. Якобса в соответствии с устным сообщением Л. Карлесона.

Для доказательства нам понадобятся результаты из [3]. Если проследить за различными постоянными, встречающимися в доказательствах теорем 8 и 5 в главе 2, то получится следующее утверждение. Пусть F – внешняя в $\mathbb{D}$ функция, $0 < \alpha \leqslant 1$. Предположим, что с некоторыми постоянными $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ выполняются условия

$$\big\| \, |F| \, \big\|_{\alpha,\mathbb{T}} \leqslant C_1 \tag{1}$$

и

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \big| \log |F(\zeta)| \big| \, |d\,\zeta| \leqslant C_2. \tag{2}$$

Теорема A. *В предположениях* (1) *и* (2) *существует постоянная* $C_3 = C_3(C_1, C_2, \alpha)$ *такая, что*

$$\big\| \, F \, \big\|_{\frac{\alpha}{2},\overline{\mathbb{D}}} \leqslant C_3. \tag{3}$$

Кроме количественного результата (3), относящегося к внешней функции, мы будем использовать результаты из [3], относящиеся к влиянию сингулярного множителя. Пусть μ – положительная сингулярная мера на $\mathbb{T} = \partial\,\mathbb{D}$,

$$S_\mu(z) = \exp\Big(- \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \, d\mu(\zeta) \Big), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{4}$$

Анализируя доказательства леммы 1.11 и теоремы 2 из главы 1 в [3], получаем следующий результат.

Теорема B. *Пусть функция* F *аналитична в* $\mathbb{D}$, $F \in H^\beta(\overline{\mathbb{D}})$, $0 < \beta < 1$, *и* μ *– сингулярная мера на* $\mathbb{T}$. *Предположим, что с некоторыми постоянными* $C_4 > 0$, $C_5 > 0$, $C_6 > 0$ *выполняются соотношения* $\big\| \, F \, \big\|_{\beta,\overline{\mathbb{D}}} \leqslant C_4$, $\mu(\mathbb{T}) \leqslant C_5$ *и для точек* $\zeta \in \mathbb{T} \setminus \operatorname{supp} \mu$ *справедливо неравенство*

$$|F(\zeta)| \leqslant C_6 |S'_\mu(\zeta)|^{-\beta}, \tag{5}$$

где внутренняя функция S_μ *построена по* μ *в* (4). *Тогда* $FS_\mu \in H^\beta(\overline{\mathbb{D}})$ *и* $\big\| \, FS_\mu \, \big\|_{\beta,\overline{\mathbb{D}}} \leqslant C_7$, $C_7 = C_7(C_4, C_5, C_6, \beta)$.

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть $\zeta \in S^n$, при $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$ положим $f_\zeta(\lambda) = f(\lambda\zeta)$. Тогда функция f_ζ непрерывна в $\overline{\mathbb{D}}$, поскольку f непрерывна в $\overline{\mathbb{B}}^n$, и $f_\zeta(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{D}$.

Отметим, что для любого $\zeta \in S^n$ выполняется равенство

$$f_\zeta(0) = f(\mathbb{O}_n). \tag{6}$$

Умножая, если необходимо, функцию f на некоторую постоянную, полагаем, что выполняются соотношения

$$|f(z)| < 1, \quad z \in \overline{\mathbb{B}}^n, \tag{7}$$

и

$$\big\| |f| \big\|_{\alpha, S^n} < 1. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что для любого $\zeta \in S^n$ имеем неравенства

$$|f_\zeta(\lambda)| < 1, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{D}}, \tag{7'}$$

и

$$\big\| |f_\zeta| \big\|_{\alpha, \mathbb{T}} < 1. \tag{8'}$$

Функция f_ζ имеет факторизацию Неванлинны в $\mathbb{D}$:

$$f_\zeta(\lambda) = F_\zeta(\lambda) \cdot S_{(\zeta)}(\lambda), \tag{9}$$

где F_ζ – внешний, а $S_{(\zeta)}$ – внутренний множители в $\mathbb{D}$; так как $f_\zeta(\lambda) \neq 0$ при $\lambda \in \mathbb{D}$, то $S_{(\zeta)}$ – сингулярный множитель. Обозначим через μ_ζ сингулярную меру (если сингулярный множитель присутствует), по которому строится внутренний множитель по формуле (4). Тогда (9) и (6) влекут равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \log |F_\zeta(\lambda)| \, |d\lambda| - \mu_\zeta(\mathbb{T}) = \log |f_\zeta(0)| = \log |f(\mathbb{O}_n)|,$$

или с учетом соотношений $|F_\zeta(\lambda)| = |f_\zeta(\lambda)| < 1$ при $\lambda \in \mathbb{T}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \big|\log |f_\zeta(\lambda)|\big| \, |d\lambda| + \mu_\zeta(\mathbb{T}) = \big|\log |f(\mathbb{O}_n)|\big|. \tag{10}$$

Пусть $C_1^0 = \big|\log |f(\mathbb{O}_n)|\big|$. Тогда (10) при любом $\zeta \in S^n$ влечет неравенства

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \big|\log |f_\zeta(\lambda)|\big| \, |d\lambda| \leqslant C_1^0 \tag{11}$$

и

$$\mu_\zeta(\mathbb{T}) \leqslant C_1^0. \tag{12}$$

В соответствии с [4], гл. 6, для голоморфной в шаре $\overline{\mathbb{B}}^n$ функции f определим радиальную производную: если $z \neq \mathbb{O}_n$, $\|z\| = r < 1$, $\zeta = \frac{1}{r} z \in S^n$, то

$$\mathcal{R} f(z) \stackrel{\text{def}}{=} r \frac{\partial}{\partial r} f(r\zeta). \tag{13}$$

Если $f(z) = f(\mathbb{O}_n) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} F_k(z)$, F_k – однородные многочлены степени k, то

$$\mathcal{R}f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} kF_k(z), \tag{14}$$

а также при $f_\zeta(\lambda) = f(\lambda\zeta)$, $\zeta \in S^n$, $\lambda \in \mathbb{D}$, имеем равенство

$$\mathcal{R}f(\lambda\zeta) = \lambda f'_\zeta(\lambda). \tag{15}$$

Напомним, что по теореме Харди–Литтлвуда ([5, гл. 7, п. 5]) для функции φ, аналитической в круге $\mathbb{D}$ и непрерывной в замкнутом круге $\overline{\mathbb{D}}$, из соотношений $\varphi \in H^\beta(\overline{\mathbb{D}})$, $0 < \beta < 1$, $\left\| \varphi \right\|_{\beta,\overline{\mathbb{D}}} = C_3$, следует, что существует постоянная $\widehat{C}_\beta$ такая, что при $\lambda \in \mathbb{D}$ выполняется соотношение

$$|\varphi'(\lambda)| \leqslant \widehat{C}_\beta \cdot C_3 (1 - |\lambda|)^{\beta-1}. \tag{16}$$

Далее, по теореме Рудина ([4, гл. 6, теорема 6.4.10]), если функция f голоморфна в шаре $\mathbb{B}^n$ и непрерывна в замкнутом шаре $\overline{\mathbb{B}}^n$, то соотношение

$$|\mathcal{R}f(z)| \leqslant C_4 (1 - \|z\|)^{\beta-1} \tag{17}$$

влечет $f \in H^\beta(\overline{\mathbb{B}}^n)$,

$$\left\| f \right\|_{\beta,\overline{\mathbb{B}}^n} \leqslant C^*_{\beta,n} \cdot C_4 \tag{18}$$

с постоянной $C^*_{\beta,n}$, зависящей от β и n.

Применим соотношения (11)–(18) для завершения доказательства теоремы.

Прежде всего, если $Z_\zeta \subset \mathbb{T}$ – множество граничных нулей функции f_ζ, то при $\lambda \in \mathbb{T} \setminus Z_\zeta$ в силу (12) находим, что

$$|S'_{(\zeta)}(\lambda)| = 2 \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{d\mu_\zeta(\lambda_0)}{|\lambda - \lambda_0|^2} \leqslant 2 \cdot \frac{1}{\operatorname{dist}^2(\lambda, Z_\zeta)} \cdot \mu_\zeta(\mathbb{T}) \leqslant \frac{2C_1^0}{\operatorname{dist}^2(\lambda, Z_\zeta)}. \tag{19}$$

Поскольку $|f_\zeta(\lambda)| < \operatorname{dist}^\alpha(\lambda, Z_\zeta)$, формула (19) дает оценку

$$|f_\zeta(\lambda)| < (2C_1^0)^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \Big(\frac{1}{|S'_\zeta(\lambda)|}\Big)^{\frac{\alpha}{2}} = C_3^0 \cdot \Big(\frac{1}{|S'_\zeta(\lambda)|}\Big)^{\frac{\alpha}{2}}. \tag{20}$$

При выводе соотношения (19) мы воспользовались тем, что $f \in C(\overline{\mathbb{B}}^n)$ а, значит, $f_\zeta \in C(\overline{\mathbb{D}})$, и тогда $\operatorname{supp} \mu_\zeta \subset Z_\zeta$. Теперь, применяя теорему А, из (11) и (3) получаем, что

$$\left\| F_\zeta \right\|_{\frac{\alpha}{2},\overline{\mathbb{D}}} \leqslant C_4^0, \quad C_4^0 = C_3(1, C_1^0, \frac{\alpha}{2}),$$

C_3 – постоянная из соотношения (3). Далее, применение теоремы В с $C_4 = C_3^0$, $C_5 = C_1^0$, $C_6 = C_4^0$ влечет, что для $f_\zeta = F_\zeta S_{(\zeta)}$ справедливы соотношения

$$f_\zeta \in H^{\frac{\alpha}{2}}(\overline{\mathbb{D}}), \quad \| f_\zeta \|_{\frac{\alpha}{2},\overline{\mathbb{D}}} \leqslant C_5^0, \quad C_5^0 = C_7(C_4^0, C_1^0, C_3^0, \frac{\alpha}{2}).$$

Применяя теорему Харди–Литтлвуда с $\beta = \frac{\alpha}{2}$, из (16) и только что проверенного свойства функции f_ζ находим, что

$$\left|f_\zeta'(\lambda)\right| \leqslant \widehat{C}_{\frac{\alpha}{2}} \cdot C_5^0 \cdot (1-|\lambda|)^{\frac{\alpha}{2}-1}, \quad \lambda \in \mathbb{D}. \tag{21}$$

Учитывая равенство (15) для $z = \lambda\zeta$, $\lambda \in \mathbb{D}$, $\zeta \in S^n$, из (21) заключаем, что

$$|\mathcal{R}f(z)| = |\lambda f_\zeta'(\lambda)| < \widehat{C}_{\frac{\alpha}{2}} \cdot C_5^0 (1-|\lambda|)^{\frac{\alpha}{2}-1} = \widehat{C}_{\frac{\alpha}{2}} \cdot C_5^0 (1-\|z\|)^{\frac{\alpha}{2}-1}. \tag{22}$$

Применяя теорему У. Рудина, частично цитированную в соотношениях (17) и (18), находим, что $f \in H^{\frac{\alpha}{2}}(\overline{\mathbb{B}}^n)$ и $\| f \|_{\frac{\alpha}{2},\overline{\mathbb{B}}^n} \leqslant C^*_{\frac{\alpha}{2},n} \cdot \widehat{C}_{\frac{\alpha}{2}} \cdot C_5^0$, что доказывает теорему 1.

Аналог теоремы 1 справедлив и для более общих областей. Сформулируем соответствующий результат. Пусть Ω – ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, с границей класса C^2.

Обозначим через $H^\alpha(\partial\Omega)$ множество функций φ, заданных на $\partial\Omega$ и удовлетворяющих условию

$$|\varphi(z) - \varphi(\zeta)| \leqslant C_\varphi \|z-\zeta\|^\alpha, \quad z,\zeta \in \partial\Omega, \quad 0 < \alpha \leqslant 1,$$

соответственно, через $H^\beta(\overline{\Omega})$ обозначим множество функций ψ, заданных на $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющих условию

$$|\psi(z) - \psi(\zeta)| \leqslant C_\psi \|z-\zeta\|^\beta, \quad z,\zeta \in \overline{\Omega}, \quad 0 < \beta \leqslant 1.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть область Ω удовлетворяет вышеприведенным условиям, функция f голоморфна в Ω, $f(z) \neq 0$, $z \in \Omega$, и непрерывна в $\overline{\Omega}$. Предположим, что $|f| \in H^\alpha(\partial\Omega)$. Тогда $f \in H^{\frac{\alpha}{2}}(\overline{\Omega})$.*

Литература

1. В. П. Хавин, Ф. А. Шамоян, *Аналитические функции с липшицевым модулем граничных значений.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **19**, (1970), 237–239.
2. С. В. Кисляков, личное сообщение.
3. N. A. Shirokov, *Analytic functions smooth up to the boundary.* — Lecture Notes in Math. **1312**, (1988).
4. У. Рудин, *Теория функций в единичном шаре из C^n*, Мир, М., 1984.

5. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, Мир, М., 1965.

Shirokov N. A. Smoothness of a holomorphic function in a ball and smoothness of its modulus on the sphere.

Let a function f be holomorphic in the unit ball $\mathbb{B}^n$, continuous in the closed ball $\overline{\mathbb{B}}^n$, and let $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{B}^n$. Assume that $|f|$ belongs to the α-Hölder class on the unit sphere S^n, $0 < \alpha \leqslant 1$. The present paper is devoted to the proof of statement that f belongs to the $\alpha/2$-Hölder class on $\overline{\mathbb{B}}^n$.

С.-Петербургский
государственный университет,
Петергоф, Университетский просп. 35,
198504 Санкт-Петербург
E-mail: n.shirokov@spbu.ru

Поступило 14 мая 2016 г.