Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 447, 2016 г.

Д. В. Руцкий

A_1-РЕГУЛЯРНОСТЬ И ОГРАНИЧЕННОСТЬ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ РИССА В БАНАХОВЫХ РЕШЁТКАХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

§0. Введение

Пусть Ω – некоторое σ-конечное измеримое пространство с мерой μ, точки $\omega \in \Omega$ которого играют роль дополнительной переменной. Мы рассматриваем банаховы решётки измеримых функций X на измеримом пространстве $\mathbb{R}^n \times \Omega$, т.е. банаховы пространства X измеримых функций на $\mathbb{R}^n \times \Omega$, такие, что условие $|g| \leqslant f$ для всякой измеримой функции g и некоторой функции $f \in X$ влечёт $g \in X$ и $\|g\|_X \leqslant \|f\|_X$. Решётка X обладает свойством Фату, если для всяких функций $f_n, f \in X$, таких, что $\|f_n\|_X \leqslant 1$ и $f_n \to f$ почти всюду, также справедливо $f \in X$ и $\|f\|_X \leqslant 1$. Подробнее о решётках измеримых функций см., например, [8]; в настоящей работе нам понадобится ещё лишь понятие порядково сопряжённой к X решётки X', состоящей из измеримых функций g, таких, что норма $\|g\|_{X'} = \sup\limits_{f \in X, \|f\|_X = 1} \int |fg|$ конечна.

Представляет интерес проблема описания решёток X, в которых ограничены операторы Кальдерона–Зигмунда, и в частности, преобразования Рисса R_j; подробнее об этих операторах см., например, [6]. Не вдаваясь в подробности, отметим, что в работах [4] и [5] была получена следующая характеризация.

Теорема 1. *Пусть X – банахова решётка измеримых функций на $\mathbb{R}^n \times \Omega$, обладающая свойством Фату, p-выпуклая и q-вогнутая при некоторых $1 < p, q < \infty$. Предположим, что T – некоторый оператор Кальдерона–Зигмунда на пространстве $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^n)$, такой, что оба оператора T и T^* невырожденные. Следующие условия эквивалентны.*

Ключевые слова: A_1-регулярность, веса Макенхаупта, обратное неравенство Гёльдера, максимальный оператор Харди–Литлвуда, преобразования Рисса, операторы Кальдерона–Зигмунда.

(1) *Максимальный оператор Харди–Литлвуда M ограничен в X и в X'.*
(2) *Все операторы Кальдерона–Зигмунда ограничены в X.*
(3) *Оператор T ограничен в X.*

Переход $1 \Rightarrow 2$ практически сразу получается из неравенства Койфмана–Феффермана, если лишь предположить, что решётка X' является нормирующим пространством для X; см. [4, предложение 5]. С другой стороны, доказательство перехода $3 \Rightarrow 1$ довольно сложное. Оно использует теорему о неподвижной точке, некоторые довольно тонкие весовые оценки, и существенным образом опирается на сделанные предположения о решётке X. Хотя рассматриваемый класс невырожденных операторов довольно широк (требуется лишь, чтобы по какому-то направлению ядро оператора вело себя как функция $|x|^{-n}$, и, в частности, годится любое (одно) преобразование Рисса R_j), накладываемые на решётку X ограничения выпуклости и вогнутости представляются избыточными. В настоящей работе мы установим следующий результат.

Теорема 2. *Пусть X – банахова решётка измеримых функций на $\mathbb{R}^n \times \Omega$, обладающая свойством Фату. Следующие условия эквивалентны.*

(1) *Максимальный оператор Харди–Литлвуда M ограничен в X и в X'.*
(2) *Все операторы Кальдерона–Зигмунда ограничены в X.*
(3) *Все преобразования Рисса R_j ограничены в X.*

Таким образом, если заменить предположения пункта 3 теоремы 1 на “стандартную” для гармонического анализа в $\mathbb{R}^n$ ограниченность всех преобразований Рисса, то удаётся снять накладываемые на решётку X ограничения нетривиальной p-выпуклости и q-вогнутости. Более того, переход $3 \Rightarrow 1$ теоремы 2 имеет довольно простое доказательство, ключевым моментом которого является полученная в работе [7] характеризация условия

$$|R_j w| \leqslant cw, \quad 1 \leqslant j \leqslant n \tag{1}$$

(см. предложение 9 ниже). Оказывается, из этого условия следует, что вес w принадлежит классу Макенхаупта A_∞, что уточняет результат, полученный в работе [7]. Отметим, что в отличие от одномерного случая, условия на вес w, достаточные для свойства (1), по-прежнему неясны.

Следует отметить, что, в отличие от теоремы 1, условия, накладываемые на решётку X в теореме 2, уже не обязательно предполагают, что множество $X \cap \mathrm{L}_2$ плотно по норме в решётке X, и операторы Кальдерона–Зигмунда поэтому уже, вообще говоря, не определены естественным образом на всём множестве X. Чтобы обойти это затруднение, мы будем считать, что оператор Кальдерона–Зигмунда T ограничен из решётки X в нормированную решётку Y, если для всякого $f \in X \cap \mathrm{L}_2$ выполнены условия $Tf \in Y$ и $\|Tf\|_Y \leqslant c\|f\|_X$ с некоторой константой c, не зависящей от f.

Теорема 2, так же, как и результаты статей [4] и [5], даёт, в частности, положительный ответ на поставленный в [1, проблема A.17] вопрос, имеющий отношение к случаю пространств Лебега $\mathrm{L}_{p(\,\cdot\,)}$ с переменным показателем $p(\,\cdot\,)$. При этом результат [1, теорема 5.42] о нетривиальной выпуклости и вогнутости при условии, что преобразования Рисса ограничены в пространстве $\mathrm{L}_{p(\,\cdot\,)}$, становится избыточным, поскольку его можно получить из теоремы 2 и соответствующего (более простого) результата [2, теорема 4.7.1] для ограниченности максимального оператора в $\mathrm{L}_{p(\,\cdot\,)}$. Ещё один подход к этому случаю можно найти в замечаниях после [4, предложение 17].

В [4, теорема 19] был отмечен следующий общий критерий ограниченности операторов Кальдерона–Зигмунда между различными решётками (мы формулируем его с учётом введённого понятия ограниченности).

Теорема 3. *Пусть X, Y и Z – банаховы решётки измеримых функций на $\mathbb{R}^n \times \Omega$, обладающие свойством Фату. Если максимальный оператор M ограничен из X в Z и из Y' в Z', то всякий оператор Кальдерона–Зигмунда T ограничен из X в Y.*

Из условий теоремы 3 вытекает соотношение $X \subset Z \subset Y$. Возникает естественный вопрос о необходимости этих условий: если невырожденный оператор Кальдерона–Зигмунда ограничен из X в Y, то можно ли найти некоторую решётку Z, удовлетворяющую условиям теоремы 3? Оказывается, что в частном случае, когда максимальный оператор ограничен в решётке Y' и в качестве невырожденного оператора берутся все преобразования Рисса, результат статьи [7] позволяет практически сразу получить положительный ответ на этот вопрос при $Z = Y$.

Теорема 4. *Пусть X и $Y \supset X$ – банаховы решётки измеримых функций на $\mathbb{R}^n \times \Omega$, обладающие свойством Фату. Предположим, что максимальный оператор M ограничен в решётке Y'. Следующие условия эквивалентны.*

(1) *Максимальный оператор M ограничен из X в Y.*
(2) *Все операторы Кальдерона–Зигмунда ограничены из X в Y.*
(3) *Все преобразования Рисса R_j ограничены из X в Y.*

Этот результат, однако, интересен лишь в довольно специфическом случае, когда максимальный оператор ограничен в решётке Y', но не в Y, поскольку его ограниченность в обеих решётках Y и Y' автоматически влечёт (см. теорему 2) ограниченность всех операторов Кальдерона–Зигмунда в решётке Y, а значит, и из X в Y для произвольной решётки $X \subset Y$. Используя некоторые оценки, аналогичные [4, предложение 17], нетрудно показать, что условие $Y \supset X$ в действительности вытекает из пункта 3 теоремы 4; об этом будет сказано в других работах.

Следствие 5. *Предположим, что Y – банахова решётка измеримых функций на $\mathbb{R}^n \times \Omega$, обладающая свойством Фату. Если максимальный оператор M ограничен в решётке Y', то решётка Y_M, определяемая нормой $\|f\|_{Y_M} = \|Mf\|_Y$ – наибольшая по включению среди всех решёток X, таких, что все преобразования Рисса ограничены из X в Y.*

В частности, в случае окружности вместо $\mathbb{R}^n$ и при $Y = \mathrm{L}_1$ преобразование Гильберта H, если оно ограничено из решётки X в L_1, обязательно факторизуется через включение $X \subset \mathrm{L}\log\mathrm{L}$ в пространство Зигмунда $\mathrm{L}\log\mathrm{L}$, что влечёт (рассматривая решётки $X = \mathrm{L}_\infty(w)$) классическую теорему Зигмунда о характеризации вещественного пространства H_1.

§1. Доказательство теоремы 2

Для простоты мы определяем вес w как измеримую почти всюду положительную функцию. Следующее утверждение хорошо известно (см., например, доказательство достаточности в [9, предложение 1]).

Предложение 6. *Пусть X – банахова решётка измеримых функций, а некоторое преобразование Q ограничено в X с нормой A. Тогда для всякой функции $f \in X$, $f \neq 0$, найдётся некоторый вес $w \geqslant |f|$, такой, что $\|w\|_X \leqslant 2\|f\|_X$ и $|Qw| \leqslant cw$ с некоторой константой c, не зависящей от функции f.*

В самом деле, можно заменить функцию f на некоторую её почти всюду положительную мажоранту с незначительным увеличением нормы (см., например, [9, предложение 14]), итеративно образовать последовательность $w_0 = f$, $w_j = |Qw_{j-1}|$ при $j \in \mathbb{N}$, и убедиться в том, что вес $w = \sum\limits_{j\geqslant 0} \frac{1}{(2A)^j} w_j$ обладает требуемыми свойствами.

Для дальнейшего нам понадобится следующее понятие.

Определение 7. *Пусть заданы числа α и β. Вес w на $\mathbb{R}^n \times \Omega$ принадлежит классу $\mathrm{F}^{\alpha}_{\beta}$ с константой C, если для любого шара $B \subset \mathbb{R}^n$ при почти всех $\omega \in \Omega$ выполнено условие*

$$\lim_{\substack{\alpha' \to \alpha+0,\\ \beta' \to \beta+0}} \left(\frac{1}{|B|} \int\limits_B w^{\frac{1}{\alpha'}}(\,\cdot\,,\omega) \right)^{\alpha'} \left(\frac{1}{|B|} \int\limits_B w^{-\frac{1}{\beta'}}(\,\cdot\,,\omega) \right)^{\beta'} \leqslant C. \qquad (2)$$

Определение 8. *Предположим, что X – квазинормированная решётка измеримых функций на $\mathbb{R}^n \times \Omega$. Решётка X называется $\mathrm{F}^{\alpha}_{\beta}$-регулярной с константами (C, m), если для всякого $f \in X$, $f \neq 0$, найдётся мажоранта $w \in X$, $w \geqslant |f|$, такая, что $\|w\|_X \leqslant m\|f\|_X$ и $w \in \mathrm{F}^{\alpha}_{\beta}$ с константой C.*

Отметим, что при $\alpha, \beta \geqslant 0$ понятие класса $\mathrm{F}^{\alpha}_{\beta}$ совпадает (с точностью до определения константы) с введённым ранее в [5] и [10] определением класса $\mathrm{F}^{\alpha}_{\beta}$ через факторизацию, которое, впрочем, в настоящей работе нам не понадобится. Также при $\alpha, \beta \geqslant 0$ классы $\mathrm{F}^{\alpha}_{\beta}$ совпадают с классами весов Макенхаупта, появляющимся в вопросах, связанных с оценками дробных интегралов; см. [3]. Предельный переход в формуле (2) расшифровывается следующим образом. Если какой-то из параметров α или β равен 0, то предел соответствующего среднего превращается в существенный супремум, например

$$\lim_{\beta' \to 0+0} \left(\frac{1}{|B|} \int\limits_B w^{-\frac{1}{\beta'}}(\,\cdot\,,\omega) \right)^{\beta'} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in B} w^{-1}(x,\omega) = \left[\operatorname*{ess\,inf}_{x\in B} w(x,\omega) \right]^{-1},$$

что означает, что класс F_0^1 совпадает с классом весов Макенхаупта A_1. Если параметр отличен от 0, то соответствующий предельный переход можно (стандартным образом) опустить, просто заменив α' на α или β' на β. Легко видеть, что класс F_{p-1}^1 совпадает с классом весов Макенхаупта A_p при $p \geqslant 1$, а класс $\mathrm{F}_{-1}^{1/q}$ совпадает с классом весов RH_q, удовлетворяющих обратному неравенству Гёльдера с некоторым показателем $q > 1$; подробнее про эти классы см., например, [6, глава 5]. Также очевидно, что $w \in \mathrm{F}_\beta^\alpha$ влечёт $w^\varepsilon \in \mathrm{F}_{\beta\varepsilon}^{\alpha\varepsilon}$ для всякого $\varepsilon \geqslant 0$ с соответствующей оценкой константы. Классы F_β^α позволяют удобно работать с весами, степени которых (в том числе и отрицательные степени) лежат в классах A_p или RH_q.

Доказательство следующего утверждения содержится в доказательстве утверждения [7, лемма 2.1] (с точностью до некоторых несущественных деталей; мы принимаем в нём $q = \frac{n}{n-1}$).

Предложение 9. *Предположим, что w – некоторый (почти всюду положительный) вес, $w(\,\cdot\,,\omega) \in \mathrm{L}_p(\mathbb{R}^n)$ при некотором $p > 1$ и почти всех $\omega \in \Omega$, и $|R_j w| \leqslant cw$ при всех j. Тогда $w \in \mathrm{F}^1_{-\frac{n}{n-1}}$ с некоторой оценкой константы, не зависящей от w (при фиксированном c).*

Нетрудно заметить, что условие на вес w в заключении предложения 9 есть не что иное, как стандартное условие $w \in \mathrm{A}_\infty$.

Теорема 10. *Пусть w – некоторый вес. Следующие условия эквивалентны с подходящими оценками констант.*

(1) $w \in \mathrm{A}_\infty$.
(2) $w \in \mathrm{F}_\beta^1 = \mathrm{A}_{1+\beta}$ *при некотором* $\beta > 0$.
(3) $w \in \mathrm{F}_{-1}^\alpha = \mathrm{RH}_{\frac{1}{\alpha}}$ *при некотором* $0 < \alpha < 1$.
(4) $w \in \mathrm{F}_{-\gamma}^1$ *при некотором (эквивалентно, при всех)* $\gamma > 1$.

В самом деле, эквивалентность первых трёх условий теоремы 10 хорошо известна (см., например, [6, глава 5, §5.1, теорема 3]). Проверим переход $2 \Rightarrow 4$. Для произвольного шара B и почти всех $\omega \in \Omega$ по неравенству Йенсена (с выпуклой функцией $t \mapsto t^{-\frac{\beta}{\gamma}}$) имеем

$$\frac{1}{|B|}\int\limits_B w(\,\cdot\,,\omega) \leqslant c\left[\frac{1}{|B|}\int\limits_B w^{-\frac{1}{\beta}}(\,\cdot\,,\omega)\right]^{-\beta}$$
$$= c\left(\left[\frac{1}{|B|}\int\limits_B w^{-\frac{1}{\beta}}(\,\cdot\,,\omega)\right]^{-\frac{\beta}{\gamma}}\right)^{\gamma} \leqslant c\left[\frac{1}{|B|}\int\limits_B w^{\frac{1}{\gamma}}(\,\cdot\,,\omega)\right]^{\gamma},$$

где c – константа из условия 2, что даёт условие 4. Для проверки перехода 4 $\Rightarrow$ 2 заметим, что $w^{\frac{1}{\gamma}} \in \mathrm{F}_{-1}^{\frac{1}{\gamma}}$, и по переходу 3 $\Rightarrow$ 2 имеем $w^{\frac{1}{\gamma}} \in \mathrm{F}_{\beta'}^{1}$ при некотором $\beta' > 0$. Из условия 4 тогда получаем для произвольного шара B и почти всех $\omega \in \Omega$:

$$\frac{1}{|B|}\int\limits_B w(\,\cdot\,,\omega) \leqslant c\left[\frac{1}{|B|}\int\limits_B w^{\frac{1}{\gamma}}(\,\cdot\,,\omega)\right]^{\gamma} \leqslant c_1\left[\frac{1}{|B|}\int\limits_B w^{-\frac{1}{\beta'\gamma}}(\,\cdot\,,\omega)\right]^{-\beta'\gamma}$$

с подходящими константами c и c_1, что означает, что условие 2 выполнено при $\beta = \beta'\gamma$.

Теперь всё готово для доказательства перехода 3 $\Rightarrow$ 1 теоремы 2. По [9, предложение 1] ограниченность максимального оператора в решётках X и X' эквивалентна их A_1-регулярности. Для этого по [4, предложение 12] (см. также [5, предложение 8] с простым доказательством в более общих предположениях) достаточно показать, что A_∞-регулярны обе решётки X и X'. По двойственности преобразования Рисса ограничены не только в решётке X, но также и в решётке X' в смысле, обозначенном в замечании после теоремы 2; таким образом, достаточно показать, что A_∞-регулярна решётка X, а A_∞-регулярность решётки X' получится тем же самым способом.

Из условия следует, что преобразования Рисса ограничены в решётках $Z_a = X \cap a\mathrm{L}_2$ с нормой $\|f\|_{Z_a} = \|f\|_X \vee a^{-1}\|f\|_{\mathrm{L}_2}$ равномерно по $a > 0$. Применяя предложение 6 к решётке Z_a и к оператору $Qg = \sum_j |R_j g|$, получаем, что всякая функция $g \in Z_a$, $g \neq 0$, имеет мажоранту $w \geqslant |g|$, такую, что $w > 0$ почти всюду, $\|w\|_{Z_a} \leqslant 2\|g\|_{Z_a}$ и $|Qw| \leqslant cw$ с подходящей константой c. Последнее условие влечёт $|R_j w| \leqslant cw$ при всех j. Из предложения 9 получается условие $w \in \mathrm{F}^1_{-\frac{n}{n-1}}$, а значит (по теореме 10), $w \in \mathrm{A}_p \subset \mathrm{A}_\infty$ при некотором $p > 1$ с подходящей оценкой константы.

Таким образом, решётки Z_a A_p-регулярны равномерно по $a > 0$. Отметим, что именно сейчас нам понадобится свойство Фату; в рассуждениях до этого места можно было обойтись лишь предположением о том, что решётка X' является нормирующим пространством для X. Мы воспользуемся следующим результатом.

Предложение 11 ([9, предложение 18]). *Пусть X – банахова решетка измеримых функций на $\mathbb{R}^n \times \Omega$, обладающая свойством Фату. Пусть множество*

$$F \subset B_X^+ = \{f \in X \mid f \geqslant 0, \|f\|_X \leqslant 1\}$$

таково, что для всех значений $\alpha > 0$ и каждой функции $f \in F$ существует функция $g \in X$, такая, что $g \geqslant |f|$, $\|g\|_X \leqslant m + \alpha$ и $g \in \mathrm{A}_p$ с константой $C + \alpha$. Тогда для всех функций из множества $\{f \mid \|f\|_X = 1\} \cap \overline{F}$, где $\overline{F}$ – замыкание множества F относительно сходимости по мере, существуют A_p-мажоранты в решетке X с константами (C, m).

По доказанному, множество $F = B_X^+ \cap \bigcup_{a>0} Z_a$ удовлетворяет условиям предложения 11 с некоторыми константами (C, m), и легко видеть, что замыкание $\overline{F}$ множества F относительно сходимости по мере совпадает с множеством B_X^+: достаточно взять любой вес $w \in \mathrm{L}_2$ и приблизить произвольную функцию $f \in B_X^+$ последовательностью $f_n = f \wedge nw \in F$. Таким образом, всякая неотрицательная функция $f \in X$ имеет A_p-мажоранту с подходящими оценками констант, что завершает доказательство теоремы 2.

§2. Доказательство теоремы 4

Для перехода $3 \Rightarrow 1$ теоремы 4 мы установим чуть более общее утверждение.

Предложение 12. *Пусть X и $Y \supset X$ – банаховы решётки измеримых функций на $\mathbb{R}^n \times \Omega$, обладающие свойством Фату. Предположим, что решётка Y' $\mathrm{A}_{\frac{n}{n-1}}$-регулярна. Если все преобразования Рисса R_j ограничены из X в Y, то максимальный оператор M также ограничен из X в Y.*

Пусть $f \in X \cap \mathrm{L}_2$. Обозначим для удобства $Rf = \left(|f|^2 + \sum\limits_j |R_j f|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Рассмотрим подробнее доказательство предложения 9. В нём получается оценка

$$|f| * P_t \leqslant C\left([Rf]^\varepsilon * P_t\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \tag{3}$$

при всех $t > 0$ с некоторой константой C, не зависящей от f, при $\varepsilon = \frac{n-1}{n}$, где $P_t(y) = c_n \frac{t}{(t^2+|y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$, $y \in \mathbb{R}^n$ – ядро Пуассона.

По сделанным предположениям $Rf \in Y$ с подходящей оценкой нормы, а решётка Y^ε является A_1-регулярной по [9, предложение 4], поэтому для функции $[Rf]^\varepsilon$ найдётся некоторая A_1-мажоранта $v \in Y^\varepsilon$ с подходящей оценкой нормы. Используя хорошо известную поточечную оценку свёртки с ядром Пуассона (см., например, [6, глава 2, §2.1, (16)]), получаем из (3) оценку

$$|f| * P_t \leqslant C\left(v * P_t\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \leqslant C\left(Mv\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \leqslant c_1 v^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

при всех $t > 0$ с некоторой константой c_1, не зависящей от f. Отсюда получается, что $Mf \leqslant c_2 \sup\limits_{t>0} |f| * P_t \in Y$ с некоторой зависящей только от n константой c_2 и подходящей оценкой нормы. Пользуясь свойством Фату решёток X и Y и монотонностью оператора M, оценку $\|Mf\|_Y \leqslant c\|f\|_X$ легко распространить с функций $f \in X \cap \mathrm{L}_2$ на всё пространство X. Предложение 12 доказано.

Литература

1. D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, *Variable Lebesgue Spaces.* Foundations and Harmonic Analysis. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2013.
2. L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Růžička, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2017. Springer-Verlag, Berlin, 2011.
3. B. Muckenhoupt, R. L. Wheeden, *Weighted norm inequalities for fractional integrals.* — Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1974), 261–274.
4. D. V. Rutsky, *A_1-regularity and boundedness of Calderón-Zygmund operators.* — Studia Mathematica **221**, No. 3 (2014), 231–247.
5. D. V. Rutsky, *A_1-regularity and boundedness of Calderón-Zygmund operators.* II. Preprint, 2015. `http://arxiv.org/abs/1505.00518`.
6. E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.* Princeton University Press, 1993.
7. И. М. Васильев, *Свойство $\log(f) \in BMO(\mathbb{R}^n)$ в терминах преобразований Рисса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **416**, No. 41 (2013), 59–69.

8. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ.* БХВ–Петербург, 2004.
9. Д. В. Руцкий, BMO-*регулярность в решётках измеримых функций на пространствах однородного типа.* — Алгебра и Анализ **23**, No. 2 (2011), 248–295.
10. Д. В. Руцкий, *Замечания об* A_p*-регулярных решетках измеримых функций.* — Алгебра и Анализ **27**, No. 5 (2015), 153–169.

Rutsky D. V. A_1-regularity and boundedness of Riesz transforms in Banach lattices of measurable functions.

Suppose that X is a Banach lattice of measurable functions on $\mathbb{R}^n \times \Omega$ having the Fatou property. We show that the boundedness of all Riesz transforms R_j in X is equivalent to the boundedness of the Hardy–Littlewood maximal operator M in both X and X', and thus to the boundedness of all Calderón–Zygmund operators in X. We also prove a result for the case of operators between lattices: if $Y \supset X$ is a Banach lattice with the Fatou property such that the maximal operator is bounded in Y', then the boundedness of all Riesz transforms from X to Y is equivalent to the boundedness of the maximal operator from X to Y, and thus to the boundedness of all Calderón–Zygmund operators from X to Y.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191023, Санкт-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27
Россия
E-mail: rutsky@pdmi.ras.ru

Поступило 6 июня 2016 г.