Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 447, 2016 г.

Д. А. Полякова

К ПРОБЛЕМЕ О ПОРОЖДАЮЩИХ ПРОСТРАНСТВ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ С СИСТЕМОЙ ВЕСОВЫХ ОЦЕНОК

§1. Введение

Пусть E – некоторое локально выпуклое пространство аналитических функций, $p \in \mathbb{N}$. Предположим, что в пространстве E заданы набор функций $a_1, \dots, a_p$ и набор подмножеств $G_1, \dots, G_p$, причем $a_i G_i \subset E$, $1 \leqslant i \leqslant p$. Говорят, что функции $a_1, \dots, a_p$ и подмножества $G_1, \dots, G_p$ порождают все пространство E, если $\sum\limits_{i=1}^{p} a_i G_i = E$. Заметим, что в случае, когда пространство E представляет собой кольцо, естественно рассматривать $G_1 = \dots = G_p = E$ и говорить, что функции $a_1, \dots, a_p$ порождают пространство E.

Описание порождающих, как известно (см., напр., [1]), применяется для решения задач о факторизации операторов свертки, а также задач о нормальной разрешимости систем уравнений свертки.

В настоящей работе задача о порождающих решается в пространстве $H_\Phi(\mathbb{C})$ целых функций, удовлетворяющих системе равномерных весовых оценок

$$|f(z)| \leqslant C_n \, e^{\varphi_n(z)}, \ z \in \mathbb{C}, \ n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Отметим сразу, что семейство равномерных оценок (1) может быть заменено на эквивалентное семейство интегральных оценок

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)| \, e^{-\varphi_n(z)} \, dz \leqslant \widetilde{C}_n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Рассматривается важный с точки зрения приложений класс двучленных весовых последовательностей $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$, состоящих из радиальных и нерадиальной компонент:

$$\varphi_n(z) = u_n(|z|) + v(z), \ z \in \mathbb{C}, \ n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Ключевые слова: целые функции; проективные весовые пространства; порождающие; системы уравнений свертки.

Во-первых, соответствующие пространства $H_\Phi(\mathbb{C})$ включают в себя как частный случай классические пространства $[\alpha, \sigma]$ целых функций, имеющих при порядке $\alpha > 0$ тип не выше $\sigma \geqslant 0$. Порядок α может быть заменен на уточненный порядок $\alpha(r)$. Во-вторых, сильные сопряженные ко многим исследуемым с различных точек зрения пространствам бесконечно дифференцируемых и аналитических функций могут быть изоморфно реализованы как пространства целых функций $H_\Phi(\mathbb{C})$, задаваемые весовыми последовательностями вида (2). В частности, к таким пространствам бесконечно дифференцируемых и аналитических функций относятся пространства ультрадифференцируемых функций (УДФ) Румье (см. [2–6], а также [7]), пространства голоморфных функций, имеющих заданный рост вблизи границы круговой области (см., напр., [8]) и др.

Основным результатом работы является теорема 1, в которой при естественных и легко проверяемых ограничениях на весовую последовательность Φ установлены необходимые и достаточные условия того, чтобы функции $a_1, \ldots, a_p$ из $H_\Phi(\mathbb{C})$ и подмножества $G_1, \ldots, G_p$ порождали все пространство $H_\Phi(\mathbb{C})$.

В качестве простого приложения теоремы 1 получены условия нормальной разрешимости систем уравнений свертки в пространствах УДФ Румье и, в частности, в известных классах Жевре (теорема 2).

Опишем коротко место теоремы 1 среди известных к настоящему времени результатов о порождающих.

История задачи о порождающих восходит к работе [9], где была установлена известная теорема о короне, содержащая полное описание порождающих пространства $E = H_\infty(D)$ функций, аналитических и ограниченных в единичном круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. На основании теоремы о короне в статье [10] проблема о порождающих была решена для пространства $E = H_0(\mathbb{C})$ целых функций экспоненциального типа.

Мощным инструментом в исследовании проблемы о порождающих, как и многих других проблем, стала известная теорема Хёрмандера о существовании решения $\overline{\partial}$-задачи

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g \tag{3}$$

с весовой L_2-оценкой (см. [11, теорема 4.4.2]). Здесь $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $z = x + iy$. Данный результат позволил решить в [12] задачу о порождающих в произвольном весовом пространстве $H_\varphi(\Omega)$ функций, аналитических в открытом множестве Ω в $\mathbb{C}^N$ и удовлетворяющих

при некоторых $C, \varepsilon > 0$ оценке

$$|f(z)| \leqslant C\, e^{\varepsilon\varphi(z)}, \quad z \in \Omega.$$

В работах [13, 14] задача о порождающих исследовалась в том же пространстве $H_\varphi(\Omega)$, но в несколько иной постановке. Именно, вместо конечного набора функций $a_1, \dots, a_p$ рассматривался счетный набор $a_1, a_2, \dots$. Предполагалось, что данные функции удовлетворяют при некотором $s \geqslant 2$ неравенству

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i(z)|^s \leqslant C\, e^{\varepsilon\varphi(z)}, \quad z \in \Omega. \tag{4}$$

Изучался также случай $s = \infty$, когда неравенство (4) заменяется оценкой

$$|a_i(z)| \leqslant C\, e^{\varepsilon\varphi(z)}, \quad z \in \Omega, \ \ i \in \mathbb{N}.$$

В статье [15] результат Хёрмандера из [12] был обобщен на случай произвольного индуктивного пространства $H_\Phi(\Omega)$, задаваемого некоторой неубывающей по n весовой последовательностью $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$. Пространство $H_\Phi(\Omega)$ состоит из аналитических в Ω функций f, удовлетворяющих при некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ условию

$$|f(z)| \leqslant C\, e^{\varphi_n(z)}, \ z \in \Omega. \tag{5}$$

Доказательство по-прежнему было основано на теореме Хёрмандера о разрешимости $\overline{\partial}$-задачи.

Наиболее близкой к настоящей работе является статья О. В. Епифанова [16], где проблема о порождающих исследовалась в проективном пространстве $H_\Phi(\Omega)$, задаваемом невозрастающей по n весовой последовательностью $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$. Отметим, что в [16] рассматривался одномерный случай, когда Ω – область в $\mathbb{C}$. Проективное пространство $H_\Phi(\Omega)$ состоит из аналитических в Ω функций f таких, что

$$|f(z)| \leqslant C_n\, e^{\varphi_n(z)}, \ z \in \Omega, \ n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

В [16, теорема 4] установлено полное описание порождающих проективных пространств $H_\Phi(\Omega)$. Данный результат получен при двух следующих основных предположениях.

Во-первых, предполагается, что $\overline{\partial}$-задача (3) имеет решение в соответствующем пространстве $L^\infty_\Phi(\Omega)$ измеримых в Ω функций, удовлетворяющих семейству оценок (6), при любой правой части $g \in L^\infty_\Phi(\Omega)$. Указанное ограничение приходится накладывать в связи с тем, что в проективных пространствах, в отличие от индуктивных, не удается

использовать классическую теорему Хёрмандера о разрешимости $\overline{\partial}$-задачи, поскольку в данном случае вместо одной весовой оценки (5) необходимо удовлетворить системе оценок (6). В [16, теорема 3] получены необходимые и достаточные условия на весовую последовательность Φ, при которых в проективном пространстве $L^\infty_\Phi(\Omega)$ справедлив аналог теоремы Хёрмандера о разрешимости $\overline{\partial}$-задачи. Основным таким условием является следующее:

> (A) для всякой функции $\xi \in L^\infty_\Phi(\Omega)$ найдется функция $l \in L^\infty_\Phi(\Omega)$, $l = \sup\{|f| : f \in I\}$, где I – локально ограниченное семейство аналитических в Ω функций, такая что $|\xi| \leqslant l$.

Понятно, что проверка условия (A) достаточно затруднительна и требует громоздкого построения требуемой функции l для каждой конкретной весовой последовательности Φ.

Второе основное предположение результата О. В. Епифанова о порождающих связано с переходом от произвольной функции $\xi(z)$ к функции $\xi^*(z) = \sup\{|\xi(z+t)| : |t| \leqslant d(z)\}$, где

$$d(z) = \frac{1}{2}\min\Big\{\frac{1}{1+|z|}, \operatorname{dist}(z, \mathbb{C}\setminus\Omega)\Big\},$$

$z \in \Omega$. Именно, функции ξ и ξ^* должны мало отличаться в определенном смысле.

В настоящей работе сформулированы простые и легко проверяемые условия на весовую последовательность (2), при которых в соответствующем проективном пространстве $H_\Phi(\mathbb{C})$ получено полное описание порождающих. При этом вслед за работой [17] вместо функции $d(z)$, которая использовалась в [16] и в случае $\Omega = \mathbb{C}$ совпадала с $\frac{1}{2(1+|z|)}$, мы рассматриваем более общую функцию расстояния $\rho(z)$. В связи с тем, что $\rho(z)$ может быть значительно меньше $d(z)$, это позволяет расширить область применения полученных результатов. В работе приводится пример проективного пространства $H_\Phi(\mathbb{C})$, для которого может быть использована теорема 1 настоящей работы, а соответствующий результат из [16] неприменим (см. пример 1).

Структура статьи следующая. Во втором параграфе формулируются основные предположения на весовые последовательности (2), а также основной результат работы. Доказательство основного результата

содержится в §3. В §4 в качестве одного из приложений устанавливаются условия нормальной разрешимости систем уравнений свертки в пространствах УДФ Румье и, в частности, в классах Жевре.

§2. Основной результат

Под *проективной весовой последовательностью* будем понимать произвольную невозрастающую по n последовательность $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ непрерывных функций $\varphi_n : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. При каждом $n \in \mathbb{N}$ определим следующее банахово пространство целых функций:

$$H_{\varphi_n}(\mathbb{C}) = \Big\{ f \in H(\mathbb{C}) \,:\, \|f\|_{\varphi_n} = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi_n(z)}} < \infty \Big\}.$$

Ясно, что $H_{\varphi_{n+1}}(\mathbb{C})$ непрерывно вложено в $H_{\varphi_n}(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$. Образуем проективный предел

$$H_{\Phi}(\mathbb{C}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_{\varphi_n}(\mathbb{C}).$$

Для того чтобы ввести рассматриваемый в настоящей статье класс пространств $H_{\Phi}(\mathbb{C})$, нам понадобятся некоторые вспомогательные сведения.

Регулярной функцией расстояния (см. [17]) называется невозрастающая непрерывно дифференцируемая функция $\rho : [0, \infty) \to (0, 1]$, удовлетворяющая условиям:

$$\rho'(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty\,; \quad \ln \rho(e^x) \text{ вогнута на } \mathbb{R}.$$

В частности, регулярными функциями расстояния являются

$$\rho(t) \equiv 1\,; \quad \rho(t) = \frac{1}{(1+t)^s},\ s > 0\,; \quad \rho(t) = e^{-at^s},\ a > 0,\ s > 0.$$

Положим $\rho(z) := \rho(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$.

Далее, функция $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ называется *ρ-устойчивой*, если при некотором $C_0 > 0$

$$|\varphi(z) - \varphi(\zeta)| \leqslant C_0 \text{ для всех } z, \zeta \in \mathbb{C} \text{ с } |z - \zeta| \leqslant \rho(z).$$

Перейдем к определению последовательностей (2). Пусть

$$U = (u_n)_{n=1}^{\infty}$$

– невозрастающая по n последовательность непрерывных неубывающих функций $u_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, причем выполнены условия:

($\mathcal{U}_1$) $u_n(e^x)$ выпукла на $[0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$;

($\mathcal{U}_2$) семейство $U = (u_n)_{n=1}^{\infty}$ равномерно ρ-устойчиво на $[0,\infty)$, т. е. существует $C_0 > 0$ такое, что

$$|u_n(t) - u_n(s)| \leqslant C_0 \text{ для всех } t, s \in [0,\infty) \text{ с } |t-s| \leqslant \rho(t),\ n \in \mathbb{N};$$

($\mathcal{U}_3$) для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеется $D_n > 0$, при котором

$$u_{n+1}(t) + \ln \frac{1+t^2}{\rho(t)} \leqslant u_n(t) + D_n,\ t \geqslant 0.$$

Далее, пусть функция $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ обладает свойствами

($\mathcal{V}_1$) $v \in SH(\mathbb{C})$, где $SH(\mathbb{C})$ – класс субгармонических в $\mathbb{C}$ функций;

($\mathcal{V}_2$) v ρ-устойчива в $\mathbb{C}$.

Положим $\varphi_n(z) = u_n(|z|) + v(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$; $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$.

Сформулированные ограничения на весовую последовательность являются естественными при рассмотрении проективных весовых пространств. Во всех упоминавшихся во введении работах [9–16] на веса накладываются условия субгармоничности, разделенности весов и относительно малого изменения весовой последовательности по шару некоторого радиуса. Принципиально новым моментом по сравнению с указанными работами является введение в условия вслед за работой [17] функции $\rho(z)$. Заметим также, что условия ($\mathcal{U}_1$) – ($\mathcal{U}_3$), ($\mathcal{V}_1$), ($\mathcal{V}_2$) достаточно легко проверять.

В статье [18] было показано, что если весовая последовательность Φ вида (2) удовлетворяет условиям ($\mathcal{U}_1$) – ($\mathcal{U}_3$), ($\mathcal{V}_1$), ($\mathcal{V}_2$), то, во-первых, в соответствующем пространстве измеримых функций

$$L_{\Phi}^{\infty}(\mathbb{C}) = \left\{ f \text{ измерима в } \mathbb{C} :\ \|f\|_{\varphi_n} < \infty,\ \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\overline{\partial}$-задача (3) имеет решение при любой правой части $g \in L_{\Phi}^{\infty}(\mathbb{C})$, и, во-вторых, проективное пространство $H_{\Phi}(\mathbb{C})$ является слабо приведенным. Последнее означает, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $H_{\Phi}(\mathbb{C})$ плотно в $H_{\varphi_m}(\mathbb{C})$ по норме $\|\cdot\|_{\varphi_n}$. Данные факты являются основополагающими при исследовании пространств $H_{\Phi}(\mathbb{C})$.

Перейдем к постановке задачи о порождающих для пространств $H_{\Phi}(\mathbb{C})$. Данную задачу естественно рассматривать для функций a_1, $\ldots$, a_p из $H_{\Phi}(\mathbb{C})$ и подмножеств $G_1, \ldots, G_p$ пространства $H_{\Phi}(\mathbb{C})$, имеющих ту же проективную структуру, что и само пространство $H_{\Phi}(\mathbb{C})$, и таких, что $a_i G_i \subset H_{\Phi}(\mathbb{C})$, $1 \leqslant i \leqslant p$.

Начнем с определения подпространств G_i, $1 \leqslant i \leqslant p$. Пусть при каждом i от 1 до p заданы непрерывные функции $\xi_i = \xi_i(t) : [0,\infty) \to$

$[0,\infty)$ и $w_i:\mathbb{C}\to[0,\infty)$. Положим $\xi_i(z):=\xi_i(|z|)$ и $r_i(z):=\xi_i(z)+w_i(z)$, $z\in\mathbb{C}$, $1\leqslant i\leqslant p$.

Будем предполагать, что функции r_i субгармоничны в $\mathbb{C}$, $1\leqslant i\leqslant p$, а также что проективные весовые последовательности

$$\Phi^i=(\varphi_n^i)_{n=1}^{\infty}\ \text{ и }\ \Phi^{i,j}=(\varphi_n^{i,j})_{n=1}^{\infty},\ 1\leqslant i\leqslant p,\ 1\leqslant j\leqslant p, \tag{7}$$

где $\varphi_n^i(z):=\varphi_n(z)-r_i(z)$, $\varphi_n^{i,j}(z):=\varphi_n(z)-r_i(z)-r_j(z)$, $z\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$, $1\leqslant i\leqslant p$, $1\leqslant j\leqslant p$, имеют вид (2) и обладают свойствами $(\mathcal{U}_1)-(\mathcal{U}_3)$ и $(\mathcal{V}_1)$, $(\mathcal{V}_2)$. Здесь и далее буквы i или i,j вверху обозначают верхние индексы, а не показатели степени.

В качестве подпространств G_i рассмотрим проективные весовые пространства $H_{\Phi^i}(\mathbb{C})$, порожденные последовательностями Φ^i, $1\leqslant i\leqslant p$.

В силу [18, теорема 2], при каждом i от 1 до p множество всех мультипликаторов из $H_{\Phi^i}(\mathbb{C})$ в $H_\Phi(\mathbb{C})$, т. е. тех целых функций μ, для которых $\mu H_{\Phi^i}(\mathbb{C})\subset H_\Phi(\mathbb{C})$, совпадает с

$$M_i=\Big\{\mu\in H(\mathbb{C})\,|\,\forall m\in\mathbb{N}\ \ \exists n\in\mathbb{N}:\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|\mu(z)|}{e^{u_m(z)-u_n(z)+r_i(z)}}<\infty\Big\}.$$

При этом каждый мультипликатор $\mu\in M_i$ является непрерывным, т. е. оператор умножения $\Lambda_\mu:f\mapsto\mu f$ действует непрерывно из $H_{\Phi^i}(\mathbb{C})$ в $H_\Phi(\mathbb{C})$, $1\leqslant i\leqslant p$.

Пусть при каждом $1\leqslant i\leqslant p$ целые функции $a_i(z)$ принадлежат множествам M_i. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{p}a_iH_{\Phi^i}(\mathbb{C})\subset H_\Phi(\mathbb{C})$. Будем говорить, что *функции* $a_1,\dots,a_p$ *и подмножества* $H_{\Phi^1}(\mathbb{C}),\dots,H_{\Phi^p}(\mathbb{C})$ *порождают* $H_\Phi(\mathbb{C})$, если

$$\sum_{i=1}^{p}a_iH_{\Phi^i}(\mathbb{C})=H_\Phi(\mathbb{C}). \tag{8}$$

Заметим, что так как $a_i\in M_i$, $1\leqslant i\leqslant p$, то

$$\forall m\in\mathbb{N}\ \ \exists n\in\mathbb{N},\exists C>0:\ \ \sum_{i=1}^{p}\frac{|a_i(z)|}{e^{r_i(z)}}\leqslant C\,e^{u_m(z)-u_n(z)},\ z\in\mathbb{C}. \tag{9}$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *При перечисленных ограничениях функции $a_1, \dots, a_p$ и подмножества $H_{\Phi^1}(\mathbb{C}), \dots, H_{\Phi^p}(\mathbb{C})$ порождают $H_\Phi(\mathbb{C})$ в том и только в том случае, если*

$$\forall m \in \mathbb{N} \ \ \exists n \in \mathbb{N}, \exists B > 0: \ \ \sum_{i=1}^{p} \frac{|a_i(z)|}{e^{r_i(z)}} \geqslant B\, e^{-u_m(z)+u_n(z)}, \ z \in \mathbb{C}. \quad (10)$$

Сформулируем простое следствие теоремы 1 для случая, когда $G_i = H_\Phi(\mathbb{C})$, $1 \leqslant i \leqslant p$, т. е. когда $r_i(z) \equiv 0$, $1 \leqslant i \leqslant p$. При этом все M_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, совпадают со множеством всех мультипликаторов пространства $H_\Phi(\mathbb{C})$:

$$M\big(H_\Phi(\mathbb{C})\big) = \Big\{\mu \in H(\mathbb{C}) \,|\, \forall m \in \mathbb{N} \ \ \exists n \in \mathbb{N} : \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|}{e^{u_m(z)-u_n(z)}} < \infty\Big\}.$$

Следствие 1. *Пусть Φ – проективная весовая последовательность вида (2), обладающая свойствами $(\mathcal{U}_1) - (\mathcal{U}_3)$ и $(\mathcal{V}_1)$, $(\mathcal{V}_2)$;*

$$a_i \in M\big(H_\Phi(\mathbb{C})\big), \quad 1 \leqslant i \leqslant p.$$

Равенство $\sum\limits_{i=1}^{p} a_i H_\Phi(\mathbb{C}) = H_\Phi(\mathbb{C})$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\forall m \in \mathbb{N} \ \ \exists n \in \mathbb{N}, \exists B > 0: \ \ \sum_{i=1}^{p} |a_i(z)| \geqslant B\, e^{-u_m(z)+u_n(z)}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Замечание 1. На практике (см. [2]– [7]) часто встречаются частные случаи последовательностей (2), когда $u_n(t) = q_n u(t)$, $\infty > q_n \downarrow q \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$; $v(z) = \widetilde{v}(|\operatorname{Im} z|)$, $z \in \mathbb{C}$. В связи с этим сделаем следующее полезное замечание. Именно, нетрудно видеть, что если $u(t)$ – непрерывная неубывающая ρ-устойчивая на $[0, \infty)$ функция, причем $u(e^t)$ выпукла на $[0, \infty)$ и $\ln \frac{t}{\rho(t)} = o(u(t))$ при $t \to \infty$, то последовательность $U = \big(q_n u(t)\big)_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{U}_1) - (\mathcal{U}_3)$. В свою очередь, если $\widetilde{v} = \widetilde{v}(t)$ – неубывающая выпуклая на $[0, \infty)$ функция, для которой $\widetilde{v}'_+(t + \rho(t))\rho(t) \leqslant C$ при $t \geqslant 0$, то функция $v(z) = \widetilde{v}(|\operatorname{Im} z|)$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{V}_1)$, $(\mathcal{V}_2)$.

В завершение параграфа приведем пример применения теоремы 1 в случае, когда соответствующий результат из [16] неприменим.

Пример 1. Пусть $\rho(t) = e^{-t^s}$, $s > 0$; $\alpha > s$; $\beta \geqslant \alpha + 2$; $\infty > q_n \downarrow q \geqslant 0$. Рассмотрим весовую последовательность

$$\Phi = \left(q_n|z|^\alpha + 2|\operatorname{Im} z|^\beta\right)_{n=1}^\infty. \tag{11}$$

Воспользуемся только что сделанным замечанием. В данном случае $u(t) = t^\alpha$, причем $\alpha > s$, так что $\ln \frac{t}{\rho(t)} = \ln t + t^s = o(u(t))$ при $t \to \infty$. Для функции $\widetilde{v}(t) = 2t^\beta$ выполняется условие

$$\widetilde{v}'_+(t + \rho(t))\rho(t) = 2\beta(t + e^{-t^s})^{\beta-1} e^{-t^s} \to 0,\ t \to \infty.$$

Таким образом, заключаем, что весовая последовательность (11) удовлетворяет условиям $(\mathcal{U}_1)-(\mathcal{U}_3)$, $(\mathcal{V}_1)$, $(\mathcal{V}_2)$. Выпишем соответствующее проективное пространство $H_\Phi(\mathbb{C})$:

$$H_\Phi(\mathbb{C}) = \left\{f \in H(\mathbb{C}) : \forall n \in \mathbb{N}\ \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp(q_n|z|^\alpha + 2|\operatorname{Im} z|^\beta)} < \infty\right\}.$$

В качестве подмножеств пространства $H_\Phi(\mathbb{C})$ для решения задачи о порождающих возьмем два одинаковые подпространства

$$\begin{aligned} H_{\Phi^1}(\mathbb{C}) &= H_{\Phi^2}(\mathbb{C}) \\ &= \left\{f \in H(\mathbb{C}) : \forall n \in \mathbb{N}\ \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp(q_n|z|^\alpha + |\operatorname{Im} z|^\beta)} < \infty\right\}. \end{aligned}$$

Это означает, что в приведенных выше обозначениях $r_1(z) = r_2(z) = |\operatorname{Im} z|^\beta$, $z \in \mathbb{C}$. Следовательно, при всех $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ и i, j, принимающих значения 1,2, имеем:

$$\varphi_n^i(z) = q_n|z|^\alpha + |\operatorname{Im} z|^\beta, \quad \varphi_n^{i,j}(z) = q_n|z|^\alpha. \tag{12}$$

Как и последовательность (11), последовательности (12) удовлетворяют условиям $(\mathcal{U}_1) - (\mathcal{U}_3)$, $(\mathcal{V}_1)$, $(\mathcal{V}_2)$.

Множество мультипликаторов из $H_{\Phi^i}(\mathbb{C})$ в $H_\Phi(\mathbb{C})$, $i = 1, 2$, совпадает с

$$M = \left\{\mu \in H(\mathbb{C}) : \forall \varepsilon > 0\ \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|}{\exp(\varepsilon|z|^\alpha + |\operatorname{Im} z|^\beta)} < \infty\right\}.$$

Таким образом, теорема 1 позволяет решить задачу о порождающих в пространстве $H_\Phi(\mathbb{C})$ для подпространств $H_{\Phi^1}(\mathbb{C})$, $H_{\Phi^2}(\mathbb{C})$ и произвольных целых функций $a_1, a_2 \in M$. Именно, для того чтобы функции $a_1, a_2 \in M$ и подмножества $H_{\Phi^1}(\mathbb{C})$, $H_{\Phi^2}(\mathbb{C})$ порождали все

пространство $H_\Phi(\mathbb{C})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists B>0:\quad |a_1(z)|+|a_2(z)|\geqslant B\exp\big(-\varepsilon|z|^\alpha+|\operatorname{Im}z|^\beta\big),\ z\in\mathbb{C}.$$

Покажем теперь, что данная задача о порождающих не может быть решена за счет применения теоремы 4 из [16]. Одним из предположений указанного результата является условие

$$\forall\varepsilon>0\quad \frac{R^*(z)}{R(z)}=O\big(e^{\varepsilon|z|^\alpha}\big),\ |z|\to\infty, \tag{13}$$

где $R(z)=e^{|\operatorname{Im}z|^\beta}$, $R^*(z)=\sup\big\{|R(z+w)|:|w|\leqslant\frac{1}{2(1+|z|)}\big\}$, $z\in\mathbb{C}$. Нетрудно видеть, что при выбранных α и β условие (13) нарушено. Действительно, пусть $z_n=in$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда

$$\frac{R^*(z_n)}{R(z_n)}=\exp\Big[\Big(n+\frac{1}{2(1+n)}\Big)^\beta-n^\beta\Big]=\exp\Big[n^\beta\Big(1+\frac{1}{2n(1+n)}\Big)^\beta-n^\beta\Big]$$
$$\geqslant\exp\frac{\beta n^{\beta-1}}{2(1+n)}\geqslant\exp\frac{\beta}{4}\,n^\alpha=\exp\frac{\beta}{4}\,|z_n|^\alpha,\ n\in\mathbb{N}.$$

В заключение заметим, что константу α можно, вообще говоря, заменить на некоторый уточненный порядок $\alpha(|z|)\to\alpha$.

§3. Доказательство основного результата

Схема доказательства теоремы 1 в основном повторяет краткую схему, приведенную в [16]. Но имеются и новые отличительные моменты, связанные с введением функции $\rho(z)$ и применением результатов из [17, 18].

Доказательство теоремы 1 *в части необходимости.* Пусть выполнено равенство (8). Тогда оператор

$$L_a:(g_1,\dots,g_p)\in\times_{i=1}^p H_{\Phi^i}(\mathbb{C})\mapsto\sum_{i=1}^p a_ig_i$$

действует непрерывно из $\times_{i=1}^p H_{\Phi^i}(\mathbb{C})$ на $H_\Phi(\mathbb{C})$. В пространстве

$$\times_{i=1}^p H_{\Phi^i}(\mathbb{C})$$

рассматривается естественная топология, задаваемая набором норм

$$\|(g_1,\dots,g_p)\|_n:=\max\big\{\|g_i\|_{\varphi_n^i}:1\leqslant i\leqslant p\big\},\ n\in\mathbb{N}.$$

Поскольку $\times_{i=1}^p H_{\Phi^i}(\mathbb{C})$ и $H_\Phi(\mathbb{C})$ – пространства Фреше, отображение L_a открыто. Это означает, что для любого $m\in\mathbb{N}$ имеются

$n \in \mathbb{N}$ и $C > 0$, при которых для каждой функции $g \in H_\Phi(\mathbb{C})$ найдется разложение $g = \sum\limits_{i=1}^{p} a_i g_i$ с $g_i \in H_{\Phi^i}(\mathbb{C})$, $1 \leqslant i \leqslant p$, такое, что $\|(g_1, \ldots, g_p)\|_m \leqslant C\, \|g\|_{\varphi_n}$.

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$. Пользуясь последним условием для $m+1$ вместо m, найдем $n \geqslant m+1$ и $C > 0$, при которых для всякой функции $g \in H_\Phi(\mathbb{C})$ и некоторого ее разложения $g = \sum\limits_{i=1}^{p} a_i g_i$ выполняется оценка

$$\max\left\{\|g_i\|_{\varphi^i_{m+1}} : 1 \leqslant i \leqslant p\right\} \leqslant C\|g\|_{\varphi_n},\ g \in H_\Phi(\mathbb{C}).$$

Тогда

$$|g_i(z)| \leqslant \|g_i\|_{\varphi^i_{m+1}} \exp \varphi^i_{m+1}(z) \leqslant C\|g\|_{\varphi_n}\, e^{\varphi_{m+1}(z) - r_i(z)},$$
$$z \in \mathbb{C},\ 1 \leqslant i \leqslant p.$$

Следовательно, для произвольной функции $g \in H_\Phi(\mathbb{C})$ получаем:

$$|g(z)| \leqslant \sum_{i=1}^{p} |a_i(z)|\, |g_i(z)| \leqslant C\|g\|_{\varphi_n}\, e^{\varphi_{m+1}(z)} \sum_{i=1}^{p} \frac{|a_i(z)|}{e^{r_i(z)}},\ z \in \mathbb{C}. \tag{14}$$

Как уже было отмечено в §2, при наложенных ограничениях проективный предел $H_\Phi(\mathbb{C})$ является слабо приведенным. Значит, найдется номер $l \geqslant n$ такой, что $H_\Phi(\mathbb{C})$ плотно в $H_{\varphi_l}(\mathbb{C})$ по норме $\|\cdot\|_{\varphi_n}$.

Пользуясь [17, предложение 3.3], по субгармонической ρ-устойчивой функции $\varphi_{l+4}(z)$ построим семейство $\{f_\zeta : \zeta \in \mathbb{C}\}$ целых функций такое, что

$$f_\zeta(\zeta) = \rho(\zeta)\, e^{\varphi_{l+4}(\zeta)},\ \zeta \in \mathbb{C}; \tag{15}$$

$$|f_\zeta(z)| \leqslant \frac{M}{\rho^2(z)}(1 + |z|^2)^4\, e^{\varphi_{l+4}(z)},\ z, \zeta \in \mathbb{C}. \tag{16}$$

Из (16) в силу $(\mathcal{U}_3)$ вытекает, что

$$|f_\zeta(z)| \leqslant \widetilde{M}\, e^{\varphi_l(z)},\ z, \zeta \in \mathbb{C},$$

где $\widetilde{M} := M \exp\{D_{l+3} + D_{l+2} + D_{l+1} + D_l\}$. Таким образом, $f_\zeta \in H_{\varphi_l}(\mathbb{C})$ и $\|f_\zeta\|_{\varphi_l} \leqslant \widetilde{M}$ при всех $\zeta \in \mathbb{C}$.

Теперь для каждой функции f_ζ, $\zeta \in \mathbb{C}$, найдем $g_\zeta \in H_\Phi(\mathbb{C})$ с $\|f_\zeta - g_\zeta\|_{\varphi_n} \leqslant \min\left\{\frac{\rho(\zeta)}{2} \exp\left(\varphi_{l+4}(\zeta) - \varphi_n(\zeta)\right), \widetilde{M}\right\}$. Тогда, во-первых,

$$\|g_\zeta\|_{\varphi_n} \leqslant \|g_\zeta - f_\zeta\|_{\varphi_n} + \|f_\zeta\|_{\varphi_n} \leqslant \widetilde{M} + \|f_\zeta\|_{\varphi_l} \leqslant 2\widetilde{M}.$$

А во-вторых, с учетом формулы (15) находим:

$$|g_\zeta(\zeta)| \geqslant f_\zeta(\zeta) - |f_\zeta(\zeta) - g_\zeta(\zeta)| \geqslant$$

$$\geqslant \rho(\zeta)\, e^{\varphi_{l+4}(\zeta)} - \frac{\rho(\zeta)}{2}\, e^{\varphi_{l+4}(\zeta)-\varphi_n(\zeta)}\, e^{\varphi_n(\zeta)} = \frac{\rho(\zeta)}{2}\, e^{\varphi_{l+4}(\zeta)}.$$

Применяя оценку (14) для функций g_ζ, $\zeta \in \mathbb{C}$, получаем, что

$$\frac{\rho(\zeta)}{2}\, e^{\varphi_{l+4}(\zeta)} \leqslant |g_\zeta(\zeta)| \leqslant 2C\widetilde{M}\, e^{\varphi_{m+1}(\zeta)} \sum_{i=1}^{p} \frac{|a_i(\zeta)|}{e^{r_i(\zeta)}},\ \zeta \in \mathbb{C}.$$

Следовательно, при всех $\zeta \in \mathbb{C}$ справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{|a_i(\zeta)|}{e^{r_i(\zeta)}} \geqslant \frac{1}{4C\widetilde{M}} \exp\Big\{u_{l+4}(\zeta) - \Big(u_{m+1}(\zeta) + \ln\frac{1}{\rho(\zeta)}\Big)\Big\}$$
$$\geqslant B\, e^{u_{l+4}(\zeta)-u_m(\zeta)},$$

где $B := \frac{1}{4C\widetilde{M}\, e^{D_m}}$, а D_m – константа из условия $(\mathcal{U}_3)$. Тем самым необходимость условия (10) доказана.

Прежде чем доказывать теорему 1 в части достаточности, установим следующую вспомогательную лемму. Заметим, что без доказательства данный факт приведен в [16, неравенство (5)]. Через $SH_0(\mathbb{C})$ здесь и далее будет обозначаться подкласс класса $SH(\mathbb{C})$ субгармонических в $\mathbb{C}$ функций, состоящий из функций вида $\sup\{\ln|f| : f \in I\}$, где I – локально ограниченное семейство целых функций.

Лемма 1. *Всякая функция k из класса $e^{SH_0(\mathbb{C})}$, т. е. имеющая вид $k = \sup\{|f| : f \in I\}$, где I – локально ограниченное в $\mathbb{C}$ семейство целых функций, является локально липшицевой, так что всюду в $\mathbb{C}$ имеет обобщенную производную $\frac{\partial k}{\partial \overline{z}}$, причем*

$$\Big|\frac{\partial k}{\partial \overline{z}}(z)\Big| \leqslant \frac{1}{\rho(z)} \sup\big\{k(z+\zeta) : |\zeta| \leqslant \rho(z)\big\},\ z \in \mathbb{C}, \tag{17}$$

где функция $\rho : \mathbb{C} \to (0,\infty)$ может быть выбрана произвольно.

Доказательство. Возьмем произвольные $t, z \in \mathbb{C}$ и $\varepsilon > 0$. Найдем целую функцию $g \in I$ такую, что $k(t) < |g(t)| + \varepsilon$. Так как при этом $k(z) \geqslant |g(z)|$, то

$$k(t) - k(z) < |g(t)| + \varepsilon - |g(z)| \leqslant |g(t) - g(z)| + \varepsilon$$
$$\leqslant \sup\{|f(t) - f(z)| : f \in I\} + \varepsilon.$$

В силу равноправия точек t, z и произвольности $\varepsilon > 0$, заключаем, что

$$|k(t) - k(z)| \leqslant \sup\{|f(t) - f(z)| : f \in I\}.$$

Пусть теперь $z \in \mathbb{C}$ фиксировано, $C_z = \{w : |w - z| = \rho(z)\}$, $M := \sup\{|f(w)| : w \in C_z, f \in I\}$, $0 < \delta < \rho(z)$. Тогда для всех $f \in I$ и $t \in \mathbb{C}$ с $|t - z| \leqslant \delta$ имеем:

$$|f(t) - f(z)| = \Big|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_z} \frac{f(w)}{w - t}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_z} \frac{f(w)}{w - z}\,dw\Big| \leqslant \frac{M|t - z|}{\rho(z) - \delta}.$$

Таким образом, $|k(t) - k(z)| \leqslant \frac{M|t-z|}{\rho(z)-\delta}$ для всех указанных t, откуда, очевидно, вытекает, что функция k является локально липшицевой.

При этом

$$\Big|\frac{\partial k}{\partial \overline{z}}(z)\Big| \leqslant \limsup_{t \to z} \frac{|k(t) - k(z)|}{|t - z|} \leqslant \frac{M}{\rho(z) - \delta}.$$

В силу произвольности $\delta > 0$, учитывая, что $M \leqslant \sup\big\{k(z + \zeta) : |\zeta| \leqslant \rho(z)\big\}$, получаем оценку (17). $\square$

Доказательство теоремы 1 *в части достаточности.* Пусть выполнено условие (10). Возьмем произвольную функцию $f \in H_\Phi(\mathbb{C})$ и построим $g_i \in H_{\Phi^i}(\mathbb{C})$, $1 \leqslant i \leqslant p$, такие, что $f = \sum\limits_{i=1}^{p} a_i g_i$.

I. Сначала проведем доказательство для случая $r_i \in SH_0(\mathbb{C})$, $1 \leqslant i \leqslant p$.

Обозначим для удобства $R_i(z) := e^{r_i(z)}$, $z \in \mathbb{C}$, $1 \leqslant i \leqslant p$. Будем в дальнейшем опускать аргумент z, если это не вызывает недоразумений.

1) Заметим, что, в силу условия (9),

$$\forall m \in \mathbb{N}\ \ \exists n \in \mathbb{N}, \exists C > 0 : \ \ \frac{|a_i|}{R_i^2} \leqslant C\, e^{u_m - u_n - r_i} \ \text{ в } \mathbb{C},\ 1 \leqslant i \leqslant p. \qquad (18)$$

Покажем, что аналогичное условие выполняется и для $\big|\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\big(\frac{\overline{a_i}}{R_i^2}\big)\big|$. Зафиксируем $1 \leqslant i \leqslant p$.

Так как $a_i \in H(\mathbb{C})$, то

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(|a_i|^2) = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(a_i \overline{a_i}) = a_i \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\overline{a_i}) \ \text{ и } \ \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(|a_i|^2) = 2|a_i| \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(|a_i|),$$

откуда $\left|\frac{\partial}{\partial\overline{z}}(\overline{a_i})\right| = 2\left|\frac{\partial}{\partial\overline{z}}(|a_i|)\right|$. Следовательно,

$$\left|\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\Big(\frac{\overline{a_i}}{R_i^2}\Big)\right| \leqslant 2\left|\frac{\partial}{\partial\overline{z}}(|a_i|)\right| R_i^{-2} + |\overline{a_i}|\, 2R_i^{-3}\left|\frac{\partial}{\partial\overline{z}}(R_i)\right|. \tag{19}$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$ фиксировано, а $n \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ найдены по m в соответствии с условием (9). Тогда

$$|a_i| \leqslant C\, e^{u_m - u_n + r_i} \quad \text{в } \mathbb{C}. \tag{20}$$

Из этого на основании леммы 1 с учетом условия $(\mathcal{U}_2)$ и ρ-устойчивости функции r_i заключаем, что всюду в $\mathbb{C}$ справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial}{\partial\overline{z}}(|a_i|)\right| \leqslant C_1\,\frac{1}{\rho}\,e^{u_m - u_n + r_i}.$$

Аналогично, поскольку функция R_i принадлежит классу $e^{SH_0(\mathbb{C})}$, по той же лемме 1 получаем, что всюду в $\mathbb{C}$ верно неравенство

$$\left|\frac{\partial}{\partial\overline{z}}(R_i)\right| \leqslant C_2\,\frac{1}{\rho}\,e^{r_i}.$$

Возвращаясь к (19) и используя (20), получаем, что

$$\left|\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\Big(\frac{\overline{a_i}}{R_i^2}\Big)\right| \leqslant 2(C_1 + C\,C_2)\,\frac{1}{\rho}\,e^{u_m - u_n - r_i} \leqslant \widetilde{C}\,e^{u_m - u_{n+1} - r_i},$$

где $\widetilde{C} = 2(C_1 + C\,C_2)\,e^{D_n}$, а D_n – константа из условия $(\mathcal{U}_3)$.

Итак, для $\left|\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\big(\frac{\overline{a_i}}{R_i^2}\big)\right|$ выполняется аналог условия (18).

2) Для $1 \leqslant i \leqslant p$ и $1 \leqslant j \leqslant p$ положим

$$\Gamma_{ij} = \frac{\overline{a_j}}{R_j^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\Big(\frac{\overline{a_i}}{R_i^2}\Big) - \frac{\overline{a_i}}{R_i^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\Big(\frac{\overline{a_j}}{R_j^2}\Big); \quad \gamma_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{p}\frac{|a_k|^2}{R_k^2}\right)^{-2}\cdot f\cdot\Gamma_{ij}.$$

Заметим сразу, что $\gamma_{ij} = -\gamma_{ji}$, $\gamma_{ii} = 0$, $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant p$.

Покажем, что $\gamma_{ij} \in L^{\infty}_{\Phi^{i,j}}(\mathbb{C})$, $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant p$. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$. Пользуясь условием (18), найдем $n_0 \in \mathbb{N}$ и $C_0 > 0$, при которых

$$\frac{|a_i|}{R_i^2} \leqslant C_0\,e^{u_m - u_{n_0} - r_i},\ 1 \leqslant i \leqslant p.$$

Далее, в соответствии с пунктом 1), имеются $n_1 \in \mathbb{N}$ и $C_1 > 0$ такие, что

$$\left|\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\Big(\frac{\overline{a_i}}{R_i^2}\Big)\right| \leqslant C_1\,e^{u_{n_0} - u_{n_1} - r_i},\ 1 \leqslant i \leqslant p.$$

Тогда

$$|\Gamma_{ij}| \leqslant 2C_0\,C_1\,e^{u_m - u_{n_1} - r_i - r_j} \quad \text{в } \mathbb{C},\ 1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant p. \tag{21}$$

Оценим величину $\big(\sum\limits_{k=1}^{p}\frac{|a_k|^2}{R_k^2}\big)^{-2}$. На основании неравенства Коши имеем:

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{|a_k|^2}{R_k^2}\geqslant\frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{|a_k|}{R_k}\right)^2.$$

Поэтому

$$\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{|a_k|^2}{R_k^2}\right)^{-2}\leqslant p^2\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{|a_k|}{R_k}\right)^{-4}.$$

Пользуясь условием (10), найдем номера n_2, n_3, n_4, n_5 и константы B_1, B_2, B_3, B_4 такие, что

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{|a_k|}{R_k}\geqslant B_s\,e^{-u_{n_s}+u_{n_{s+1}}}\ \text{ в }\ \mathbb{C},\ s=1,2,3,4.$$

Тогда предыдущая оценка может быть продолжена следующим образом:

$$\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{|a_k|^2}{R_k^2}\right)^{-2}\leqslant p^2\,\frac{1}{B_1}\,e^{u_{n_1}-u_{n_2}}\,\frac{1}{B_2}\,e^{u_{n_2}-u_{n_3}}\,\frac{1}{B_3}\,e^{u_{n_3}-u_{n_4}}\,\frac{1}{B_4}\,e^{u_{n_4}-u_{n_5}}$$

$$=\frac{p^2}{B_1B_2B_3B_4}\,e^{u_{n_1}-u_{n_5}}. \tag{22}$$

Наконец, так как $f\in H_\Phi(\mathbb{C})$, то

$$|f|\leqslant\|f\|_{\varphi_{n_5}}\,e^{u_{n_5}+v}\ \text{ в }\ \mathbb{C}. \tag{23}$$

Объединяя формулы (21), (22) и (23), окончательно получаем, что

$$|\gamma_{ij}|\leqslant C\,e^{u_m+v-r_i-r_j}\ \text{ в }\ \mathbb{C},\quad 1\leqslant i\leqslant p,\quad 1\leqslant j\leqslant p,$$

где $C=\frac{2C_0C_1p^2}{B_1B_2B_3B_4}\,\|f\|_{\varphi_{n_5}}$. Таким образом, $\gamma_{ij}\in L^\infty_{\Phi^{i,j}}(\mathbb{C})$, $1\leqslant i\leqslant p$, $1\leqslant j\leqslant p$.

3) По предположению весовая последовательность $\Phi^{i,j}$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{U}_1)-(\mathcal{U}_3)$, $(\mathcal{V}_1)$, $(\mathcal{V}_2)$. На основании [18, теорема 1] заключаем, что в пространстве $L^\infty_{\Phi^{i,j}}(\mathbb{C})$ неоднородное уравнение Коши-Римана (3) разрешимо при любой правой части $g\in L^\infty_{\Phi^{i,j}}(\mathbb{C})$. Следовательно, найдутся функции $\beta_{ij}\in L^\infty_{\Phi^{i,j}}(\mathbb{C})$ такие, что $\frac{\partial\beta_{ij}}{\partial\overline{z}}=\gamma_{ij}$, $1\leqslant i\leqslant p$, $1\leqslant j\leqslant p$. Естественно, β_{ij} можно выбрать так, чтобы $\beta_{ij}=-\beta_{ji}$, $\beta_{ii}=0$.

При этом $\sum\limits_{j=1}^{p} a_j\beta_{ij} \in L^{\infty}_{\Phi^i}(\mathbb{C})$, $1 \leqslant i \leqslant p$. Действительно, фиксируем $m \in \mathbb{N}$ и находим $n \in \mathbb{N}$ и $C > 0$, при которых справедливы неравенства (18). Тогда

$$|a_j| \leqslant C\, e^{u_m - u_n + r_j},\ 1 \leqslant j \leqslant p.$$

Так как $\beta_{ij} \in L^{\infty}_{\Phi^{i,j}}(\mathbb{C})$, то найдется $D > 0$ такое, что

$$|\beta_{ij}| \leqslant D\, e^{u_n + v - r_i - r_j},\ 1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant p.$$

Значит,

$$\Big|\sum_{j=1}^{p} a_j\beta_{ij}\Big| \leqslant pCD\, e^{u_m + v - r_i} \ \text{ в } \mathbb{C},\ 1 \leqslant i \leqslant p.$$

Далее, положим

$$\alpha_i := \frac{\overline{a_i}}{R_i^2}\, f \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{|a_k|^2}{R_k^2}\right)^{-1},\ 1 \leqslant i \leqslant p.$$

Учитывая, что $R_i \geqslant 1$, и используя снова неравенство Коши, получаем:

$$|\alpha_i| \leqslant \frac{|a_i|}{R_i} \cdot |f| \cdot p \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{|a_k|}{R_k}\right)^{-2} \leqslant p\,|f| \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{|a_k|}{R_k}\right)^{-1},$$

откуда на основании условия (10) по аналогии с пунктом 2) вытекает, что $\alpha_i \in L^{\infty}_{\Phi^i}(\mathbb{C})$, $1 \leqslant i \leqslant p$.

4) Проверим, что функции $g_i := \alpha_i - \sum\limits_{j=1}^{p} a_j\beta_{ij}$, $1 \leqslant i \leqslant p$, являются искомыми. В силу предыдущего пункта, $g_i \in L^{\infty}_{\Phi^i}(\mathbb{C})$, $1 \leqslant i \leqslant p$. Далее, непосредственной проверкой убеждаемся, что $\frac{\partial g_i}{\partial \overline{z}} = 0$, т. е. что $g_i \in H(\mathbb{C})$, $1 \leqslant i \leqslant p$. Наконец, $\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{p} a_i a_j \beta_{ij} = 0$, так что

$$\sum_{i=1}^{p} a_i g_i = \sum_{i=1}^{p} a_i \alpha_i = \sum_{i=1}^{p} \frac{a_i \overline{a_i}}{R_i^2} \cdot f \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{|a_k|^2}{R_k^2}\right)^{-1} = f.$$

Итак, в случае, когда $r_i \in SH_0(\mathbb{C})$, $1 \leqslant i \leqslant p$, теорема 1 в части достаточности доказана.

II. Пусть теперь r_i – субгармонические функции, которые, возможно, не попадают в класс $SH_0(\mathbb{C})$. В силу леммы из [16], найдутся функции $r_i^0 \in SH_0(\mathbb{C})$, $1 \leqslant i \leqslant p$, такие, что

$$r_i(z) \leqslant r_i^0(z) \leqslant \sup\{r_i(z+w) : |w| = \rho(z)\} + 4\ln(1+|z|) - 3\ln\rho(z) + c, \quad z \in \mathbb{C},$$

где c не зависит от z. Поскольку при наложенных ограничениях функции r_i являются ρ-устойчивыми, данные оценки могут быть продолжены следующим образом:

$$r_i(z) \leqslant r_i^0(z) \leqslant r_i(z) + 4\ln(1+|z|) - 3\ln\rho(z) + \widetilde{c},\ z \in \mathbb{C},\ 1 \leqslant i \leqslant p.$$

Учитывая условие $(\mathcal{U}_3)$, легко видеть, что если функции a_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, удовлетворяют условию (10), то они удовлетворяют аналогичному условию с r_i^0 вместо r_i. При этом введенные выше весовые последовательности Φ^i и $\Phi^{i,j}$ будут эквивалентны соответствующим последовательностям $\Psi^i = (\varphi_n - r_i^0)_{n=1}^\infty$ и $\Psi^{i,j} = (\varphi_n - r_i^0 - r_j^0)_{n=1}^\infty$, $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant p$.

Соответственно, рассуждения пунктов 1) и 2), в которых использовалась лемма 1, можно провести с функциями r_i^0 и в результате получить, что $\gamma_{ij} \in L^\infty_{\Psi^{i,j}}(\mathbb{C})$, $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant p$. Затем переходим к совпадающим с $L^\infty_{\Psi^{i,j}}(\mathbb{C})$ пространствам $L^\infty_{\Phi^{i,j}}(\mathbb{C})$, решаем в них с помощью [18, теорема 1] соответствующие $\overline{\partial}$-задачи и находим функции β_{ij}. Далее определяем функции α_i опять с заменой r_i на r_i^0. Тогда α_i принадлежат $L^\infty_{\Psi^i}(\mathbb{C}) = L^\infty_{\Phi^i}(\mathbb{C})$, так что в результате получаем, что $g_i \in H_{\Phi^i}(\mathbb{C})$. Пункт 4) остается фактически без изменений.

Таким образом, теорема 1 в части достаточности доказана и в общем случае.

§4. Приложения основного результата

В настоящем параграфе в качестве простого приложения теоремы 1 устанавливаются условия нормальной разрешимости систем уравнений свертки в пространствах УДФ Румье и, в частности, в известных классах Жевре. Введем указанные пространства.

Пусть ω – весовая функция в смысле [2–6] т. е. непрерывная неубывающая неотрицательная функция на $[0,\infty)$, удовлетворяющая условиям:

(α) для каждого $p > 1$ существует $C > 0$ такое, что

$$\omega(x+y) \leqslant p\big(\omega(x) + \omega(y)\big) + C \text{ при всех } x, y \geqslant 0\,;$$

(α') $\omega(t) = O(t)$ при $t \to \infty$;
(γ) $\ln t = o\big(\omega(t)\big)$ при $t \to \infty$;
(δ) $\varphi_\omega(x) := \omega(e^x)$ выпукла на $[0, \infty)$.

В частности, в качестве $\omega(t)$ могут выступать функции

$$\omega(t) = \ln^\beta(1+t),\ \beta > 1\,; \quad \omega(t) = \frac{t}{\ln^\beta(e+t)},\ \beta > 0\,;$$

$\omega(t) = t^{\alpha(t)}$, где $\alpha(t) \to \alpha \in (0,1]$ – некоторый уточненный порядок.

Положим для удобства $\omega(z) := \omega(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$. Далее, для функции $\varphi_\omega(x) = \omega(e^x)$ введем сопряженную по Юнгу $\varphi^*_\omega(y) = \sup\{xy - \varphi_\omega(x) : x \geqslant 0\}$, $y \geqslant 0$. Пусть $I = (-a, a)$ – заданный конечный или бесконечный интервал в $\mathbb{R}$; $0 < a_m \uparrow a$; $\infty > q_n \downarrow q \geqslant 0$.

Пространством УДФ Румье на интервале I называется следующее весовое пространство бесконечно дифференцируемых на I функций

$$\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I) = \Big\{ f \in C^\infty(I) \,\Big|\, \forall m \in \mathbb{N}\ \ \exists n \in \mathbb{N} : |f|_{n,m} = \sup_{j \in \mathbb{N}_0} \sup_{|x| \leqslant a_m} \frac{|f^{(j)}(x)|}{e^{q_n \varphi^*_\omega(j/q_n)}} < \infty \Big\}.$$

В частности, при $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, пространства $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)$ включают в себя известные классы Жевре.

К настоящему времени более изучен случай пространств УДФ Румье минимального типа, когда $q = 0$ (см. [2–4]). Пространства УДФ Румье нормального типа, когда $q > 0$, исследованы мало (см. [5]).

Для того чтобы определить операторы свертки в $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)$, рассмотрим сопряженное пространство $\big(\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)\big)'$. Пусть пространство $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)$ наделено естественной топологией $\operatorname{proj}_m \operatorname{ind}_n \mathcal{E}_{n,m}$ полунормированных пространств $\mathcal{E}_{n,m} = \{f \in C^\infty(I) : |f|_{n,m} < \infty\}$, $n, m \in \mathbb{N}$. Известно (см., напр., [19]), что сильное сопряженное $\big(\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)\big)'_\beta$ к пространству $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)$ топологически изоморфно следующему пространству целых функций

$$H^q_{\{\omega\},I} = \Big\{ f \in H(\mathbb{C}) \,\Big|\, \exists m \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\ \|f\|_{n,m} = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{q_n \omega(z) + a_m |\operatorname{Im} z|}} < \infty \Big\},$$

наделенному естественной смешанной индуктивно-проективной топологией. Топологический изоморфизм устанавливает преобразование Фурье–Лапласа функционалов

$$\mathcal{F} : \psi \in \left(\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)\right)' \mapsto \widehat{\psi}(z) := \psi_x(e^{-ixz}),\ z \in \mathbb{C}.$$

Нетрудно видеть, что пространство $H^q_{\{\omega\},I}$ представляет собой индуктивный предел рассматриваемых в настоящей работе проективных пространств целых функций. Действительно, обозначим

$$\varphi_{n,m}(z) = q_n\omega(z) + a_m|\operatorname{Im} z|,\ z \in \mathbb{C},\ n, m \in \mathbb{N};$$

$$\Phi_m = (\varphi_{n,m})_{n=1}^{\infty},\ m \in \mathbb{N}.$$

Тогда $H^q_{\{\omega\},I} = \operatorname{ind} H_{\Phi_m}(\mathbb{C})$. При этом проективные весовые последовательности Φ_m, $m \in \mathbb{N}$, удовлетворяют условиям $(\mathcal{U}_1) - (\mathcal{U}_3)$, $(\mathcal{V}_1)$, $(\mathcal{V}_2)$ с $\rho(t) \equiv 1$. Это делает возможным применение к пространствам $H_{\Phi_m}(\mathbb{C})$ результатов работы [18], а также настоящей работы.

Как обычно, операторы свертки в пространстве $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)$ понимаются как сопряженные к операторам умножения, действующим в $H^q_{\{\omega\},I}$. Именно, пусть μ – какой-нибудь (непрерывный) мультипликатор пространства $H^q_{\{\omega\},I}$. Тогда оператор умножения $\Lambda_\mu : f \mapsto \mu f$ действует непрерывно в $H^q_{\{\omega\},I}$. Далее находим линейный непрерывный функционал $\psi_\mu := \mathcal{F}^{-1}(\mu)$ на $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)$, преобразование Фурье–Лапласа которого совпадает с μ, и определяем естественным образом оператор свертки на $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)$:

$$(T_\mu f)(x) := \langle \psi_\mu, f(x+y)\rangle_y, \quad f \in \mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I), \quad x \in I.$$

При этом T_μ будет сопряженным оператором к $\mathcal{F}^{-1} \circ \Lambda_\mu \circ \mathcal{F}$ и будет действовать линейно и непрерывно из $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)$ в $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)$. Под *символом* оператора свертки T_μ мы сразу для удобства понимаем не сам функционал $\psi_\mu \in \left(\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)\right)'$, а его преобразование Фурье–Лапласа μ – мультипликатор пространства $H^q_{\{\omega\},I}$.

Полное описание множества всех символов операторов свертки в пространствах $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)$ установлено в [18, теорема 4]. Поскольку данное множество имеет различный вид в случаях конечного и бесконечного интервала I, мы для определенности далее рассматриваем случай конечного интервала. Итак, пусть интервал I конечен. В силу [18, теорема 4], независимо от типа q множество всех символов операторов

свертки, действующих в $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)$, совпадает с

$$M = \Big\{\mu \in H(\mathbb{C}) \,:\, \forall \varepsilon > 0 \ \ \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|}{e^{\varepsilon\omega(z)+\varepsilon|\operatorname{Im} z|}} < \infty\Big\}.$$

Заметим, что если символ $\mu(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(-i)^k z^k$, $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяет условию

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|}{e^{\varepsilon\omega(z)}} < \infty,$$

то определяемый им оператор свертки T_μ представляет собой дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами:

$$T_\mu f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)}.$$

При этом, как доказано в [20, теорема 3], имеется целый класс пространств, в которых все операторы свертки будут дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами. Это пространства УДФ, задаваемые строгими неквазианалитическими весами ω, т. е. весами, удовлетворяющими условиям:

$$\exists K > 1 \,:\ \ \limsup_{t\to\infty} \frac{\omega(Kt)}{\omega(t)} < K\,;$$

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt < \infty.$$

В частности, данный факт справедлив в классах Жевре ($\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$) на конечном интервале.

Перейдем к исследованию систем уравнений свертки в $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)$.

Пусть $p \in \mathbb{N}$; T_{μ_i} – операторы свертки с символами $\mu_i \in M$, действующие в $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)$. Рассмотрим систему уравнений свертки

$$T_{\mu_i} f = h_i,\ h_i \in \mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I), \quad 1 \leqslant i \leqslant p. \tag{24}$$

Положим $\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_p)$, $T_\mu f := (T_{\mu_1} f, \ldots, T_{\mu_p} f)$. Тогда T_μ – линейный непрерывный оператор, действующий из $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)$ в $\big(\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)\big)^p$. С точностью до изоморфизмов оператор T_μ является сопряженным к

оператору

$$L_\mu : (g_1, \dots, g_p) \in \left(H^q_{\{\omega\},I}\right)^p \mapsto \sum_{i=1}^p \mu_i g_i \in H^q_{\{\omega\},I}.$$

Напомним, что оператор T_μ называется *нормально разрешимым*, если его образ $\operatorname{Im} T_\mu$ замкнут в $\left(\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)\right)^p$. В случае нормальной разрешимости оператора T_μ естественно говорить о нормальной разрешимости системы (24). При этом, как известно, решение системы (24) в $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)$ будет существовать в том и только в том случае, если правая часть $h = (h_1, \dots, h_p)$ этой системы ортогональна ядру сопряженного оператора, т. е. если для любых функционалов $\psi_i \in \left(\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)\right)'$, $1 \leqslant i \leqslant p$, таких, что $\sum\limits_{i=1}^p \mu_i \widehat{\psi}_i = 0$ в $\mathbb{C}$, выполняются равенства

$$\langle \psi_i, h_i \rangle = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant p.$$

Теорема 2. *Пусть интервал I конечен. Если для символов $\mu_1, \dots, \mu_p$ выполняется условие*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists B > 0 : \ \sum_{i=1}^p |\mu_i(z)| \geqslant B\, e^{-\varepsilon\omega(z) - \varepsilon|\operatorname{Im} z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{25}$$

то система (24) *однозначно и нормально разрешима в $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)$.*

Доказательство. Пусть выполнено условие (25). Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и рассмотрим проективное пространство $H_{\Phi_m}(\mathbb{C})$, а также соответствующее пространство $H_{\Phi_{m+1}}(\mathbb{C})$. В $H_{\Phi_{m+1}}(\mathbb{C})$ решим задачу о порождающих для функций $\mu_1, \dots, \mu_p$ и подмножеств $G_1, \dots, G_p$, совпадающих с $H_{\Phi_m}(\mathbb{C})$. В данном случае $r_i(z) = (a_{m+1} - a_m)|\operatorname{Im} z|$, $1 \leqslant i \leqslant p$. Очевидно, что из справедливости условия (25) вытекает справедливость соответствующего условия (10) теоремы 1. Таким образом, $\sum\limits_{i=1}^p \mu_i H_{\Phi_m}(\mathbb{C}) = H_{\Phi_{m+1}}(\mathbb{C})$.

Поскольку последнее равенство выполняется при всех $m \in \mathbb{N}$, то $\sum\limits_{i=1}^p \mu_i H^q_{\{\omega\},I} = H^q_{\{\omega\},I}$. Значит, оператор L_μ отображает $\left(H^q_{\{\omega\},I}\right)^p$ на $H^q_{\{\omega\},I}$ и, соответственно, оператор T_μ инъективен.

Далее, в силу общих результатов теории двойственности (см., напр., [21, Следствие 8.6.4]), из сюръективности оператора L_μ вытекает, что сопряженный оператор L'_μ является слабым изоморфизмом “в”.

Следовательно, его образ $\operatorname{Im} L'_\mu$ слабо замкнут в $\left(H^q_{\{\omega\},I}\right)'$. Тогда, как известно [22, Гл. II, §3, предложение 8], $\operatorname{Im} L'_\mu$ замкнут во всех топологиях, согласующихся с двойственностью между $\left(H^q_{\{\omega\},I}\right)'$ и $H^q_{\{\omega\},I}$. Поскольку пространства $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)$ и $H^q_{\{\omega\},I}$ рефлексивны (по поводу рефлексивности $\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)$ см., например, [2, предложение 4.9]), мы получаем, что $\operatorname{Im} L'_\mu$ замкнут в $\left(\left(H^q_{\{\omega\},I}\right)^p\right)'_\beta \simeq \left(\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)\right)^p$. Таким образом, $\operatorname{Im} T_\mu$ – замкнутое множество в $\left(\mathcal{E}^q_{\{\omega\}}(I)\right)^p$. Теорема доказана. $\square$

Случай бесконечного интервала I может быть рассмотрен аналогично.

Литература

1. В. В. Напалков, *Уравнения свертки в многомерных пространствах*, М.: Наука, 1982.
2. R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor, *Ultradifferentiable functions and Fourier analysis.* — Results Math. **17** (1990), 206–237.
3. R. Meise, B. A. Taylor, D. Vogt, *Equivalence of slowly decreasing conditions and local Fourier expansions.* — Indiana Univ. Math. J. **36** (1987), 729–756.
4. T. Meyer, *Surjectivity of convolution operators on spaces of ultradifferentiable functions of Roumieu type.* — Studia Math. **125** (1997), 101–129.
5. D. A. Abanina, *On Borel's theorem for spaces of ultradifferentiable functions of mean type.* — Res. Math. **44** (2003), 195–213.
6. A. V. Abanin, Pham Trong Tien, *Almost subadditive weight functions form Braun–Meise–Taylor theory of ultradistributions.* — J. Math. Anal. Appl. **363** (2010), 296–301.
7. S. Momm, *Closed principal ideals in nonradial Hörmander algebras.* — Arch. Math. (Basel) **58** (1992), 47–55.
8. A. V. Abanin, Le Hai Khoi, *Pre-dual of the function algebra $A^{-\infty}(D)$ and representation of functions in Dirichlet series.* — Complex Anal. Oper. Theory **5**, No. 4 (2011), 1073–1092.
9. L. Carleson, *Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem.* — Ann. of Math. **72**, No. 2 (1962), 547–559.
10. J. J. Kelleher, B. A. Taylor *An application of the corona theorem to some rings of entire functions.* — Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 246–249.
11. Л. Хёрмандер, *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных*, М.: Мир, 1968.
12. L. Hörmander, *Generators for some rings of analytic functions.* — Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 943–949.
13. Т. Т. Кузбеков, *Об идеалах в некоторых кольцах аналитических функций.* — Изв. вузов. Матем. **10** (1993), 77–80.

14. Т. Т. Кузбеков, *К вопросу о порождающих в некоторых кольцах аналитических функций.* — Матем. заметки **55**, No. 3 (1994), 68–75.
15. А. В. Абанин, *Модификация метода Л. Хёрмандера в задаче о порождающих и ее приложения.* — Изв. вузов. Матем. **8** (1995), 3–12.
16. О. В. Епифанов, *О разрешимости неоднородного уравнения Коши–Римана в классах функций, ограниченных с весом и системой весов.* — Мат. заметки **51**, No. 1 (1992), 83–92.
17. A. V. Abanin, Pham Trong Tien, *Continuation of holomorphic functions and some of its applications.* — Studia Math. **200** (2010), 279–295.
18. Д. А. Полякова, *О разрешимости неоднородного уравнения Коши–Римана в пространствах функций с системой равномерных весовых оценок.* — Изв. вузов. Матем. **10** (2015), 77–82.
19. А. В. Абанин, И. А. Филипьев, *Аналитическая реализация пространств, сопряженных к пространствам бесконечно дифференцируемых функций.* — Сиб. мат. журн. **47**, No. 3 (2006), 485–500.
20. Д. А. Абанина, *Разрешимость уравнений свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на интервале.* — Сиб. мат. журн. **53**, No. 3 (2012), 477–494.
21. Р. Эдвардс, *Функциональный анализ*, М.: Мир, 1969.
22. А. П. Робертсон, В. Дж. Робертсон, *Топологические векторные пространства*, М.: Мир, 1967.

Polyakova D. A. On generators of spaces of entire functions with a system of weighted estimates.

We consider spaces of entire functions with systems of weight estimates. The case of binomial weight sequences consisting of radial and nonradial components is investigated. Under some assumptions on the weight sequence we obtain a complete description of generators in these spaces. We apply this result to the problem of normal solvability of systems of convolution equations in the Roumieu spaces of ultradifferentiable functions and, as a particular case, in Gevrey classes.

Южный федеральный университет;
Южный математический институт
ВНЦ РАН
E-mail: forsites1@mail.ru

Поступило 10 июля 2016 г.