Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 447, 2016 г.

А. Н. Медведев

СРАВНЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ГЛАДКОСТИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ И ЕЁ МОДУЛЯ ДЛЯ ВЕРХНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

§1. Введение

Пусть F – аналитическая функция в круге, непрерывная вплоть до границы, и пусть известно, что ее модуль на границе обладает некоторой гладкостью, например, удовлетворяет некоторому условию типа Гёльдера. Хорошо известно, что при естественных предположениях о нулях, для самой функции F гарантирована половинная гладкость во всем круге (проверять ее, разумеется, достаточно лишь на границе), причем результат точен. Подробный исторический обзор можно найти в [8], мы укажем здесь ссылку только на первую детальную публикацию [3]. В только что упомянутой недавней работе [8] был впервые рассмотрен локальный вариант задачи: оказалось, что гёльдерова гладкость функции $|F|$ всего лишь в одной точке влечет половинную гладкость функции F в той же точке – правда, в некотором интегральном смысле (см. формулировки ниже).

Аналогичные задачи для функций, аналитических в полуплоскости, – как для глобальной гладкости, так и для гладкости в отдельных точках – практически нигде не рассматривались, за исключением, разве что, статьи [1]. Цель настоящей заметки – восполнить этот пробел. Отметим, что гёльдеровы условия на окружности и на прямой, разумеется, не переходят друг в друга при конформном отображении круга на полуплоскость. Поэтому мы просто попытаемся провести в случае полуплоскости рассуждения, аналогичные использованным в круге, и посмотреть на результат. Он заведомо должен выглядеть не совсем так, как в круге, поскольку на прямой гёльдеровы условия порядка (скажем) α и $\alpha/2$ несравнимы (первое сильнее на малых расстояниях, второе – на больших), а логарифмический интеграл (он входит в оценки) берется относительно меры Пуассона, так что его значение

Ключевые слова: гёльдеровы условия, мера Пуассона, логарифмический интеграл, средняя осцилляция, преобразование Гильберта, внешняя функция.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 14-01-00198-А.

может сильно меняться при сдвиге функции. Последнее подсказывает, что количественные соотношения, вероятно, должны зависеть еще и от положения точки, в которой мы меряем гладкость, на вещественной прямой.

С упомянутым чуть выше условием на нули мы поступим самым радикальным образом: будем считать, что функция F – внешняя. Во всех предыдущих публикациях (см. список литературы в [8] и саму эту статью) указанный случай был основным как с содержательной, так и с технической точки зрения: поняв его, добавить внутренние и "граничные" нули обычно довольно просто.

Хотя мы работаем с произвольными модулями непрерывности, условия регулярности, на них наложенные, говорят о том, что фактически мы рассматриваем здесь гладкости, меньшие 1. Как и в [8], мы занимаемся гладкостью в фиксированной точке; глобальные результаты в этом круге вопросов следуют из локальных с помощью общих соображений.

1.1. Внешние функции в верхней полуплоскости. За информацией, касающейся классов Харди в верхней полуплоскости $\mathbb{H}_+$, мы отсылаем читателя к [4]. Напомним, что мере Лебега на окружности соответствует мера Пуассона $dP(t) = \frac{dt}{1+t^2}$ на прямой.

Пусть h – вещественнозначная функция на прямой, для которой $h \in L^1(dP)$. Определим ее *интеграл Шварца* формулой

$$\mathcal{S}h(z) = \frac{1}{\pi}\int\left(\frac{1}{z-t} + \frac{t}{1+t^2}\right)h(t)dt, \quad z \in \mathbb{H}_+. \tag{1}$$

Пусть теперь задана неотрицательная функция φ на прямой, удовлетворяющая условию $\log\varphi \in L^1(dP)$. *Внешней функцией*, построенной по φ, называется функция $\mathcal{O}_\varphi = \exp(\mathcal{S}\log\varphi)$. Отметим, что функция $\mathcal{O}_\varphi$ имеет граничные значения и по модулю совпадает с φ на $\mathbb{R}$.

Определим *преобразование Гильберта* функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ формулой

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi}\int\left(\frac{1}{x-t} + \frac{t}{1+t^2}\right)f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Значения $\mathcal{H}f(x)$ определены почти во всех точках x, если $f \in L^1(dP)$.

Отметим, что, говоря о преобразовании Гильберта на прямой, часто подразумевают оператор, действующий по правилу

$$\mathcal{H}_0 f(x) = \frac{1}{\pi} v.p. \int \frac{f(t)}{x-t} dt, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Однако выражение в (3) определено лишь при $f \in L^1((1+|t|)^{-1}dt)$, в то время как мы имеем дело с $L^1(dP)$. Впрочем, если $f \in L^1((1+|t|)^{-1}dt)$, то $\mathcal{H}f = \mathcal{H}_0 f + c$ (это будет использовано в дальнейшем).

Граничные значения внешней функции $\mathcal{O}_\varphi$, как известно, совпадают с $\varphi \exp(i\mathcal{H} \log \varphi)$.

1.2. Постановка задачи. Функцию Φ на полуоси $[0, \infty)$ будем называть *квазивогнутой*, если выполнены следующие условия: $\Phi(0) = 0$; $\Phi(t)$ положительна и возрастает при $t > 0$; $\Phi(t)/t$ почти убывает при $t > 0$, т.е. найдется такая постоянная C_Φ, что выполнено неравенство

$$\frac{\Phi(u)}{u} \leqslant C_\Phi \frac{\Phi(v)}{v}, \quad v \leqslant u. \tag{QC}$$

Теперь рассмотрим некоторую неотрицательную измеримую функцию φ, заданную на $\mathbb{R}$ и удовлетворяющую условию $\log \varphi \in L^1(dP)$. Пусть $\mathcal{O}_\varphi$ – внешняя функция, построенная по φ. Фиксируем точку x и предположим, что найдется такая регулярная квазивогнутая функция ω, что выполнено условие

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \leqslant \omega(|x-y|), \quad y \in \mathbb{R}. \tag{SC}$$

Под *регулярностью* мажоранты ω мы подразумеваем выполнение неравенств

$$\int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t} dt \leqslant C_\omega^1 \omega(\delta); \quad \delta \int_\delta^{+\infty} \frac{\omega(t)}{t^2} dt \leqslant C_\omega^2 \omega(\delta), \quad \delta > 0. \tag{RG}$$

Характер этих ограничений как раз и указывает на то, что нас интересует обычная гёльдерова гладкость порядка меньше 1 для функции φ в одной точке. Если, однако, $\varphi \in \mathrm{Lip}_\omega(\mathbb{R})$, то, разумеется, одна и та же мажоранта $K_{\varphi,\omega}\omega$ обслуживает все точки x, где

$$K_{\varphi,\omega} := \sup_{x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{\omega(|x-y|)}.$$

Гладкость внешней функции, как и в случае окружности, мы будем измерять в терминах средних осцилляций. Пусть $r > 1$, а f – некоторая измеримая функция на прямой, не обязательно вещественнозначная.

Средней осцилляцией функции f по промежутку $I \subset \mathbb{R}$ будем называть значение

$$\Omega_r(f, I) = \inf_c \left(\frac{1}{|I|} \int\limits_I |f - c|^r \right)^{\frac{1}{r}},$$

где нижняя грань берется по всевозможным постоянным c.

Приведем один результат для окружности из статьи [8] в только что введенных обозначениях. Как и в [8], он формулируется для (2π)-периодического продолжения функции φ на вещественную прямую.

Теорема (поточечная). *Пусть $r > 1$. Если $\varphi(x) > 0$, то для всякого промежутка $I \ni x$, $|I| \leqslant 4\pi$, выполнено неравенство $\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \leqslant C\omega(\sqrt{|I|})$, с постоянной C, зависящей от постоянных из условий* (RG) *и* (QC), *а также* $\|\log \varphi\|_{L^1(\mathbb{T})}$.

Следует отметить, что в случае $\varphi(x) = 0$ гладкость в точке не падает, т.е. верна оценка $\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \leqslant \omega(|I|)$. Как объяснялось в [8], известные ранее равномерные оценки выводятся из приведенной теоремы с помощью соображений общего характера.

Следствие (равномерное). *Если $\varphi \in \mathrm{Lip}_\omega(\mathbb{T})$ с регулярной квазивогнутой мажорантой ω, то $\mathcal{O}_\varphi \in \mathrm{Lip}_{\omega(\sqrt{\cdot})}(\mathbb{T})$, с $\mathrm{Lip}_{\omega(\sqrt{\cdot})}$-постоянной, обусловленной постоянными из условий* (RG) *и* (QC), *величиной* $\|\log \varphi\|_{L^1(\mathbb{T})}$, *и Lip_ω-постоянной функции φ.*

Мы хотим получить нечто подобное для случая прямой. Как уже упоминалось, буквальных аналогов ожидать не следует.

§2. Падение гладкости для внешних функций в верхней полуплоскости. Зависимость от положения точки

Приступим теперь к формулировке и обсуждению основных результатов данной работы. Пусть дана неотрицательная измеримая функция φ, для которой $\log \varphi \in L^1(dP)$. *Для удобства, будем молчаливо предполагать до конца статьи, что $\varphi(t) \leqslant 1$ для всех t.* Поскольку мы думаем об ограниченных аналитических функциях в полуплоскости, это нормировочное условие не умаляет общности. Однако оно несколько сокращает как вычисления, так и формулировки. Фиксируем точку x и считаем, что, как и выше, задана мажоранта модуля непрерывности функции φ, т. е. выполнено неравенство (SC) с квазивогнутой функцией ω, удовлетворяющей условиям регулярности (RG). Обозначим $M_x = \max\{1, x^2\}$.

Теорема 1. *При сделанных предположениях, пусть еще* $r > 1$. *Тогда для любого промежутка* $I \ni x$ *выполнено следующее. Если* $\varphi(x) = 0$, *то* $\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \leqslant \omega(|I|)$, *а если* $\varphi(x) > 0$, *то существуют постоянные* A^1 *и* A^2, *зависящие от значения* $\varphi(x)$ *и мажоранты* ω, *с перечисленными ниже свойствами.*

(1) *Если* $|I| \geqslant A^1$, *то* $\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \leqslant C^1\omega(|I|)$, *где константа* C^1 *зависит только от постоянной из условия квазивогнутости* (QC) *для* ω.

(2) *Если* $A^2 \leqslant |I| \leqslant A^1$, *то* $\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \leqslant C^2(\omega(|I|) + \omega(\sqrt{|I|}))$, *где константа* C^2 *обусловлена тем же, чем и* C^1.

(3) *Если* $|I| \leqslant A^2$, *то* $\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \leqslant M_x C^3(\omega(|I|) + \omega(\sqrt{|I|}))$, *где* C^3 *зависит от* $\|\log\varphi\|_{L^1(dP)}$ *и от постоянных из условия квазивогнутости* (QC) *и условий регулярности* (RG) *для* ω.

Как и ожидалось, теорема 1 не дает нам падения гладкости в "чистом" виде, т. е. из неё не следует условие $\sup_{I\ni x} \Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I)/\omega(\sqrt{|I|}) < \infty$. Для длинных отрезков I последнее неравенство и вообще вряд ли возможно по естественным причинам: оно становится *сильнее* такого же условия без квадратного корня. При маленьких I, разумеется, в п. 2 и 3 главный член – тот, в котором участвует квадратный корень, то есть мы наблюдаем падение гладкости вдвое. Новым по сравнению с окружностью является зависимость константы в оценке от положения точки x (см. п. 3) для "довольно коротких" отрезков I. Автор не занимался построением примеров, однако скорее всего эта зависимость – не дефект метода, а отражает реальность.

Для наглядности полезно несколько загрубить результат теоремы 1.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1, *пусть* $\varphi(x) > 0$. *Тогда найдется константа* C, *зависящая от тех же параметров, что и постоянная* C^3 *из теоремы* 1 *и такая, что для всякого промежутка* $I \ni x$ *выполнена оценка* $\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \leqslant M_x C(\omega(|I|) + \omega(\sqrt{|I|}))$.

Множитель M_x растет как x^2 при $x \to \infty$. Поэтому для функции $\varphi \in \mathrm{Lip}_\omega(\mathbb{R})$ мы не можем утверждать, что $\mathcal{O}_\varphi \in \mathrm{Lip}_{\omega(\,\cdot\,)+\omega(\sqrt{\cdot})}(\mathbb{R})$, даже несмотря на то, что постоянные "C" можно в этом случае взять одинаковыми для всех точек x. По-другому дела обстоят, если интересоваться лишь конечными промежутками. Если $\varphi \in \mathrm{Lip}_\omega(J)$ для некоторого промежутка J, то постоянную M_x на J можно ограничить некоторой абсолютной константой M_J, а значит неравенство из теоремы 2 будет выполнено равномерно по всем точкам $x \in J$. Последнее позволяет стандартным образом восстановить оценки на модуль непрерывности функции из оценок на ее средние осцилляции (см. [5, с. 105]). Поэтому имеем следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть функция φ такая же, как и прежде. Предположим, что условие* (SC) *выполнено для всех точек x некоторого промежутка $J \subset \mathbb{R}$ с регулярной квазивогнутой мажорантой ω. Тогда $\mathcal{O}_\varphi \in \mathrm{Lip}_{\omega(\sqrt{\cdot})}(J)$, с $\mathrm{Lip}_{\omega(\sqrt{\cdot})}$-постоянной, зависящей от J, от постоянных из условий регулярности и определения квазивогнутости для ω и от $\|\log\varphi\|_{L^1(dP)}$.*

Пристальный взгляд на вычисления, ведущие к теореме 1, показывает, что, тем не менее, оценочная постоянная в п. 3 перестает зависеть от x, если еще сильнее ограничить длину интервала I сверху. Справедливо следующее утверждение, в котором от положения точки x вместо постоянной в оценке зависит длина интервала, на котором эта оценка выполнена.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1, *а* $\varphi(x) > 0$. *Тогда найдется такое число B* (*оно зависит от x и величины $\varphi(x)$*), *что для всякого промежутка $I \ni x$, $|I| \leqslant B$, выполнено неравенство $\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \leqslant C(\omega(|I|) + \omega(\sqrt{|I|}))$, с постоянной C, обусловленной теми же параметрами, что и постоянная C^3 из теоремы* 1, *в частности, не зависящей от положения точки x.*

Для величины B в п. 3.3 будет дана вполне явная формула, из которой, в частности, видно, что при больших x эта величина убывает как x^{-2}.

Сформулируем еще утверждение в том же стиле о равномерных гёльдеровских оценках.

Следствие 2. *Предположим, что $\varphi \in \mathrm{Lip}_\omega(\mathbb{R})$, где ω – некоторая регулярная квазивогнутая мажоранта. Тогда для всякой точки x, для которой $\varphi(x) > 0$, найдется такой промежуток J_x, что $\mathcal{O}_\varphi \in \mathrm{Lip}_{\omega(\,\cdot\,)+\omega(\sqrt{\cdot})}(J_x)$, причем с универсальной $\mathrm{Lip}_{\omega(\,\cdot\,)+\omega(\sqrt{\cdot})}$-постоянной, обусловленной теми же параметрами, что и в следствии* 1 (*кроме параметра $|J_x|$, от которого она не зависит*).

Следует отметить, что длина промежутков J_x в этом следствии стремится к 0 при $x \to \infty$. Напоследок, не вдаваясь в детали, отметим, что для неограниченных функций φ верен аналог теоремы 1 и последующих результатов, но с более сложной зависимостью постоянных A_1 и A_2 от значения $\varphi(x)$.

§3. Доказательство основных результатов

Фиксируем точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Рассмотрим неотрицательную измеримую функцию φ, всюду строго меньшую единицы, удовлетворяющую условию $\log\varphi \in L^1(dP)$ и непрерывную в точке x_0, для которой выполнена оценка $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leqslant \omega(|x - x_0|)$ при всех $x \in \mathbb{R}$, где мажоранта ω – неотрицательная квазивогнутая функция, заданная на $[0, +\infty)$ и удовлетворяющая условиям регулярности (RG). Следует отметить, что если необходимо построить искомые оценки только в точке x_0, то и требовать ограниченность сверху единицей достаточно только для $\varphi(x_0)$.

3.1. Подготовительные результаты. Нам понадобится ряд вспомогательных утверждений, приводимых ниже. Первое очевидно и формулируется только для ссылок.

Утверждение 1. *Для всякого промежутка $I \subset \mathbb{R}$ и набора точек $x, y \in I, t \notin 3I$ верно неравенство $|x - t| \geqslant |y - t|/2$.*

Обратимся теперь к мажоранте ω. Рассмотрим ее *почти обратную* функцию $\widetilde{\omega}$, заданную по правилу $\widetilde{\omega}(s) = \min\{t : \omega(t) = s\}$. Отметим, что функция $\widetilde{\omega}$ возрастает и имеет предел 0 в точке 0, а также что $\omega(\widetilde{\omega}(s)) = s$. Имеют место (см. [8, с. 56], [5, с. 110]) следующие утверждения.

Утверждение 2. *Если для некоторого $\gamma > 0$ функция $t \mapsto \omega(t)/t^\gamma$ почти убывает, то функция $s \mapsto s/\widetilde{\omega}^\gamma(s)$ тоже почти убывает.*

Утверждение 3. *Предположим, что $\varphi(x_0) > 0$. Тогда найдется такое пороговое значение $A = A(\omega, \varphi(x_0)) \asymp \widetilde{\omega}(\varphi(x_0))$, что $\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)/2$ всякий раз, когда $|x - x_0| \leqslant A$.*

Замечание 3.1 (о выборе постоянной A)**.** Пусть $0 < \varphi(x_0) < 1$. Нам понадобится уточнить выбор порогового значения из утверждения 3. Нам подойдет любое значение, меньшее, чем $\widetilde{\omega}(\varphi(x_0)/2)$, однако удобно будет считать, что оно меньше 1. Если $\widetilde{\omega}(1) \leqslant 1$, то, очевидно, ничего уменьшать не надо и мы можем взять $A := \widetilde{\omega}(\varphi(x_0)/2) < 1$. Пусть теперь $\widetilde{\omega}(1) > 1$. Заметим, что $\widetilde{\omega}(\varphi(x_0)/2) \leqslant \widetilde{\omega}(\varphi(x_0)) < \widetilde{\omega}(1)$. Положим $A := (\widetilde{\omega}(1))^{-1}\widetilde{\omega}(\varphi(x_0)/2)$. Понятно, что такое A меньше 1 и для него утверждение 3 по-прежнему верно (в частности, $A \asymp \widetilde{\omega}(\varphi(x_0))$).

Рассмотрим теперь множество $L_{x_0} := \{x : |x - x_0| \leqslant A\}$. Мы будем использовать следующее элементарное утверждение (см. [8, с. 69], [5, с. 110]).

Утверждение 4. *Пусть $\varphi(x_0) > 0$. Тогда для всякой точки $x \in L_{x_0}$ выполнено неравенство*

$$|\log \varphi(x) - \log \varphi(x_0)| \leqslant \frac{C}{\varphi(x_0)} |\varphi(x) - \varphi(x_0)|$$

с абсолютной постоянной C.

Для учета зависимости оценочных постоянных от положения точки на прямой будут полезны следующие вычисления. Они слегка избыточны в данном контексте, но мы опишем их полностью. Прежде всего, для всякой точки $x \in \mathbb{R}$ верно неравенство

$$|x - x_0| \leqslant \sqrt{1 + x_0^2} \sqrt{1 + x^2}. \tag{4}$$

В связи с этим, введем множества

$$\Gamma_{x_0,\lambda} := \{x : |x - x_0| \leqslant \lambda \sqrt{1 + x^2}\}, \quad 0 < \lambda \leqslant \sqrt{1 + x_0^2}. \tag{5}$$

Следующее очевидное утверждение удобно сформулировать для ссылок.

Утверждение 5. *Для всякой точки $x \notin \Gamma_{x_0,\lambda}$ имеет место неравенство*

$$\frac{1}{(x - x_0)^2} \leqslant \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{1 + x^2}.$$

Ясно, что множество $\Gamma_{x_0,\lambda}$ – либо луч, либо объединение двух лучей, либо промежуток. Легко сосчитать, что последний тип (промежуток) соответствует случаю $\lambda < 1$. При таком выборе параметра λ множество $\Gamma_{x_0,\lambda}$ имеет вид

$$\Gamma_{x_0,\lambda} = \left[\frac{x_0}{1-\lambda^2} - \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \sqrt{1+x_0^2-\lambda^2}, \frac{x_0}{1-\lambda^2} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \sqrt{1+x_0^2-\lambda^2} \right]. \tag{6}$$

Нам нужна некоторая информация о взаимоотношении множеств L_{x_0} и $\Gamma_{x_0,\lambda}$. Напомним, что мы, среди прочего, наложили условия $0 < \varphi(x_0) < 1$ и $A < 1$, где A – постоянная из утверждения 3.

Утверждение 6. *Имеет место включение* $\Gamma_{x_0,\lambda} \subset L_{x_0}$ *для всех* λ, *удовлетворяющих условию*

$$\lambda \leqslant \frac{A}{1+2|x_0|} < 1.$$

Доказательство. Отметим, что при $A < 1$ неравенство

$$A/(1+2|x_0|) < 1$$

выполнено. Фиксируем $\lambda < 1$, тогда множество $\Gamma_{x_0,\lambda}$ имеет вид (6). Для удобства запишем это множество следующим образом:

$$\Gamma_{x_0,\lambda} = [B_\lambda x_0 - B_\lambda D_{\lambda,x_0}, B_\lambda x_0 + B_\lambda D_{\lambda,x_0}],$$

где $B_\lambda := (1-\lambda^2)^{-1}$, $D_{\lambda,x_0} = \lambda\sqrt{1+x_0^2-\lambda^2}$. Возьмем точку $x \in \Gamma_{x_0,\lambda}$. Заметим, что $|x - B_\lambda x_0| \leqslant B_\lambda D_{\lambda,x_0}$. Отсюда получаем, что

$$|x-x_0| \leqslant |x - B_\lambda x_0| + |1-B_\lambda||x_0| \leqslant B_\lambda D_{\lambda,x_0} + |1-B_\lambda||x_0|.$$

Нам нужно, чтобы при λ, удовлетворяющих условию из формулировки, последнее выражение оценивалось сверху через A:

$$\frac{\lambda}{1-\lambda^2}(\sqrt{1+x_0^2-\lambda^2} + \lambda|x_0|) \leqslant A.$$

Поскольку $\sqrt{1+x_0^2-\lambda^2} \leqslant \sqrt{1-\lambda^2} + |x_0|$, мы видим, что достаточно обеспечить оценку

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} + \frac{\lambda(\lambda+1)|x_0|}{1-\lambda^2} \leqslant A,$$

а она, в свою очередь, следует из оценки

$$\lambda + 2\lambda|x_0| \leqslant A$$

(мы заменили знаменатели на 1, а $\lambda + 1$ во втором члене на 2), что и требовалось. $\square$

Таким образом, при правильном выборе параметра λ, на множестве L_{x_0} выполнена оценка из утверждения 4, в то время как на его дополнении справедлива оценка из утверждения 5. Первое позволит нам удачно оценить приближение функции $\log\varphi$, а второе – приближение ядра преобразования Гильберта.

3.2. Оценки средних осцилляций. Фиксируем промежуток $I \ni x_0$, введем функцию $u(x) = \log\varphi(x) - \log\varphi(x_0)$ (если $\varphi(x_0) \neq 0$; в противном случае вычтем 0 вместо $\log\varphi(x_0)$) и положим $u_1 := u\chi_{3I}$, $u_2 := u - u_1$. Нам понадобятся две постоянных

$$c_1 := \frac{1}{\pi}\int\limits_{3I} \frac{x_0}{1+t^2}u(t)dt;\ c_2 := \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}\setminus 3I}\Big(\frac{1}{x_0-t}+\frac{t}{1+t^2}\Big)u(t)dt.$$

Рассмотрим ещё два множества: $G := \{x : \varphi(x) > \varphi(x_0)\}$, $B := \{x : \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)\}$. Фиксируем параметр $r > 1$. Нам необходимо оценить среднюю осцилляцию

$$\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) = \inf_c\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |\mathcal{O}_\varphi - c|^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

функции $\mathcal{O}_\varphi = \varphi\exp(i\mathcal{H}\log\varphi)$ на промежутке I. Отметим, что $\mathcal{H}\log\varphi = \mathcal{H}u$, так как оператор $\mathcal{H}$ переводит постоянные в ноль. Возьмем в качестве постоянной приближения $c = \varphi(x_0)\exp(i(c_1+c_2))$. Имеем

$$\begin{aligned}
\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) &\leqslant \left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |\varphi e^{i\mathcal{H}u} - \varphi(x_0)e^{i(c_1+c_2)}|^r\right)^{\frac{1}{r}}\\
&= \left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |\varphi e^{i\mathcal{H}u} + \varphi(x_0)e^{i\mathcal{H}u} - \varphi(x_0)e^{i\mathcal{H}u} - \varphi(x_0)e^{i(c_1+c_2)}|^r\right)^{\frac{1}{r}}\\
&\leqslant \left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |\varphi - \varphi(x_0)|^r\right)^{\frac{1}{r}} + \varphi(x_0)\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |e^{i\mathcal{H}u} - e^{i(c_1+c_2)}|^r\right)^{\frac{1}{r}}\\
&\leqslant \omega(|I|) + \varphi(x_0)\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |e^{i(\mathcal{H}u - c_1 - c_2)} - 1|^r\right)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

Множитель при $\varphi(x_0)$ во втором слагаемом не превосходит 2, что дает нам простую оценку

$$\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \leqslant \omega(|I|) + 2\varphi(x_0). \tag{7}$$

Оценка (7) позволяет нам добиться нужного результата в случае $\varphi(x_0) = 0$, поэтому дальше можно считать, что $\varphi(x_0) \in (0,1)$. Более того, мы можем ограничиться лишь случаем $20|I| \leqslant A$ (число 20 выбрано лишь для удобства дальнейших оценок). Действительно, если $20|I| > A$, то $\varphi(x_0) \leqslant C(\omega)\omega(|I|)$, что дает нам оценку $\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \leqslant C(\omega)\omega(|I|)$.

Мы собираемся получить еще одну оценку, в каком-то смысле конкурирующую с (7). Ввиду нашего выбора констант c_1 и c_2, выполнено

$$\begin{aligned}
\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \leqslant \omega(|I|) &+ \varphi(x_0)\bigg(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |\mathcal{H}u_1 - c_1|^r\bigg)^{\frac{1}{r}} \\
&+ \varphi(x_0)\bigg(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |\mathcal{H}u_2 - c_2|^r\bigg)^{\frac{1}{r}} \\
&\leqslant \omega(|I|) + \varphi(x_0)\bigg(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |\mathcal{H}_0 u_1|^r\bigg)^{\frac{1}{r}} \\
&+ \varphi(x_0)\int\limits_{3I} \frac{|t-x_0|}{1+t^2}|u(t)|dt \\
&+ \varphi(x_0)\bigg(\frac{1}{|I|}\int\limits_I \bigg(\int\limits_{\mathbb{R}\setminus 3I} \frac{|x-x_0|}{|x-t||x_0-t|}|u(t)|dt\bigg)^r dx\bigg)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое по отдельности (кроме, очевидно, $\omega(|I|)$). Начнем с первого. Согласно нашему ограничению на длину промежутка I, выполнено включение $3I \subset L_{x_0}$. Поэтому на $3I$ применимо утверждение 4, а значит $u_1 \in L^r(\mathbb{R})$ и верны неравенства

$$\varphi(x_0)\bigg(\frac{1}{|I|}\int\limits_I |\mathcal{H}_0 u_1|^r\bigg)^{\frac{1}{r}} \leqslant C(\mathcal{H})\varphi(x_0)\bigg(\frac{1}{|3I|}\int\limits_{3I} |u|^r\bigg)^{\frac{1}{r}} \leqslant C(\mathcal{H})\omega(3|I|).$$

Перейдем к оценке второго слагаемого. Мы по-прежнему находимся в рамках утверждения 4, поэтому

$$\varphi(x_0)\int\limits_{3I} \frac{|t-x_0|}{1+t^2}|u(t)|dt \leqslant C|I|\omega(3|I|).$$

Последнее можно оценить сверху через $\omega(3|I|)$, ввиду ограничения на длину промежутка I. Обратимся к последнему слагаемому. Если

$x, x_0 \in I$, а $t \notin 3I$, то применимо утверждение 1, а значит

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus 3I} \frac{|x-x_0|}{|x-t||x_0-t|}|u(t)|dt \leqslant 2|I| \int\limits_{\mathbb{R}\setminus 3I} \frac{|u(t)|}{(x_0-t)^2}dt.$$

Далее введем разбиение

$$\mathbb{R}\setminus 3I = (G\setminus 3I) \cup ((B\setminus 3I)\cap L_{x_0}) \cup ((B\setminus 3I)\cap L_{x_0}^c) := \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

и оценим последний интеграл по каждой из частей в отдельности.

На множестве γ_1 выполнено заключение утверждения 4, то есть

$$|\log\varphi(t) - \log\varphi(x_0)| \leqslant \frac{C}{\varphi(x_0)}|\varphi(t)-\varphi(x_0)|.$$

Следовательно,

$$|I|\int\limits_{\gamma_1} \frac{|u(t)|}{(x_0-t)^2}dt \leqslant C\frac{|I|}{\varphi(x_0)} \int\limits_{|x_0-t|>3|I|} \frac{\omega(|x_0-t|)}{(x_0-t)^2}dt \leqslant C(\omega)\frac{\omega(3|I|)}{\varphi(x_0)}.$$

Последнее неравенство выполнено благодаря второму из условий регулярности (RG).

На множестве γ_2 ситуация аналогичная, поэтому

$$\begin{aligned} |I|\int\limits_{\gamma_2} \frac{|u(t)|}{(x_0-t)^2}dt &\leqslant C\frac{|I|}{\varphi(x_0)} \int\limits_{A\geqslant|x_0-t|>3|I|} \frac{\omega(|x_0-t|)}{(x_0-t)^2}dt \\ &\leqslant C\frac{|I|}{\varphi(x_0)} \int\limits_{|x_0-t|>3|I|} \frac{\omega(|x_0-t|)}{(x_0-t)^2}dt \leqslant C(\omega)\frac{\omega(2|I|)}{\varphi(x_0)}. \end{aligned}$$

Наконец, рассмотрим множество γ_3. Заметим, что для $t \in \gamma_3$ имеет место неравенство $|u(t)| \leqslant |\log\varphi(t)|$ (см. [8, с. 69], [5, с. 112]). Отсюда

$$|I|\int\limits_{\gamma_3} \frac{|u(t)|}{(x_0-t)^2}dt \leqslant |I| \int\limits_{L_{x_0}^c} \frac{|\log\varphi(t)|}{(x_0-t)^2}dt.$$

По утверждению 6 выполнено включение $\Gamma_{x_0,\lambda} \subset L_{x_0}$ для

$$\lambda = A/(1+2|x_0|),$$

а значит на $L^c_{x_0}$ верна оценка из утверждения 5. Поэтому

$$|I|\int\limits_{\gamma_3}\frac{|u(t)|}{(x_0-t)^2}dt \leqslant |I|\frac{(1+2|x_0|)^2}{A^2}\int_{\mathbb{R}}\frac{|\log\varphi(t)|}{1+t^2}dt$$

$$= |I|\|\log\varphi\|_{L^1(dP)}\frac{(1+2|x_0|)^2}{A^2}.$$

Собрав вместе все оценки, получаем

$$\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \leqslant C(\omega, \|\log\varphi\|_{L^1(dP)})\left(\omega(|I|) + |I|\varphi(x_0)\frac{(1+2|x_0|)^2}{A^2}\right). \quad (8)$$

3.3. Анализ оценок. В первую очередь отметим, что из оценки (8) следует неравенство

$$\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \leqslant C(\omega, \|\log\varphi\|_{L^1(dP)})\left(\omega(|I|) + |I|\varphi(x_0)\frac{M_{x_0}}{A^2}\right), \quad (9)$$

где $M_{x_0} = \max\{1, x_0^2\}$ Теперь обсудим поведение оценок (7) и (9) в зависимости от длины промежутка I.

1) Если $|I| \gtrsim A$, то, как уже было упомянуто, оценка (7) дает

$$\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \leqslant C(\omega)\omega(|I|).$$

Следует отметить, что разграничивающее значение A зависит только от ω и величины $\varphi(x_0)$, но не от точки x_0.

2) Когда $|I| \lesssim A$, рассмотрим несколько случаев.

2.1. Если $A^2 \lesssim |I| \lesssim A$, то $\varphi(x_0) \asymp \omega(A) \leqslant \omega(\sqrt{|I|})$, ввиду возрастания функции ω. Отсюда оценка (7) дает искомое для теоремы 1 неравенство $\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \leqslant C(\omega)(\omega(|I|) + \omega(\sqrt{|I|}))$.

2.2. Выделим случай $|I| \lesssim A^2 M_{x_0}^{-2}$ (его анализ приведет, в частности, к доказательству теоремы 3). Заметим, что $A^2 M_{x_0}^{-2} \leqslant A^2$, поэтому

$$\frac{\varphi(x_0)}{A} \asymp \frac{\omega(A)}{A} \leqslant C(\omega)\frac{\omega(\sqrt{|I|})}{\sqrt{|I|}},$$

ввиду утверждения 2 и квазивогнутости мажоранты ω. С другой стороны, выполнено неравенство

$$\frac{M_{x_0}}{A} \lesssim \frac{1}{\sqrt{|I|}}.$$

Отсюда $|I|\varphi(x_0)M_{x_0}A^{-2} \leqslant C(\omega)\omega(\sqrt{|I|})$. Последнее, вместе с неравенством (9), дает искомую оценку

$$\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \leqslant C(\omega, \|\log\varphi\|_{L^1(dP)})(\omega(|I|) + \omega(\sqrt{|I|})).$$

2.3. Рассмотрим последний возможный случай $A^2M_{x_0}^{-2} \lesssim |I| \lesssim A^2$. Здесь обе оценки (7) и (9) дадут нам один и то же результат. Действительно, если воспользоваться условием $A^2M_{x_0}^{-2} \lesssim |I|$, и повторить рассуждения случая 2.1; или же использовать условие $|I| \lesssim A^2$ и рассуждения для случая 2.2, получаем одну и ту же мажоранту $\omega(|I|) + M_{x_0}(\omega\sqrt{|I|})$.

3.4. Доказательство следствия 2. По условию $\varphi \in \mathrm{Lip}_\omega(\mathbb{R})$, а значит оценка из теоремы 3 выполнена для всех точек x_0 с постоянной C_u, зависящей только от $\|\log\varphi\|_{L^1}$ и ω. Мы будем действовать в рамках конструкции, изложенной выше, и использовать промежуточные оценки. Фиксируем точку x_0. Без ограничения общности будем считать, что $x_0 > 0$. Пороговое значение из теоремы 3 для x_0, как легко заметить, имеет вид $B_{x_0} \asymp (A_{x_0}/M_{x_0})^2 \asymp (\widetilde{\omega}(\varphi(x_0))/M_{x_0})^2$. Возьмем значение чуть поменьше: $B'_{x_0} \asymp (\widetilde{\omega}(\varphi(x_0)/2)/M_{x_0})^2$. Обозначим $J_1 = (x_0 - B'_{x_0}/2, x_0 + B'_{x_0}/2)$. Заметим, что по утверждению 3 для всякого $x \in J_1$ выполнено неравенство $\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)/2 > 0$. Возьмем некоторую точку $y \in J_1$. Этой точке соответствует ее пороговое значение $B_y \asymp (A_y/M_y)^2 \asymp (\widetilde{\omega}(\varphi(y))/M_y)^2$.

Заметим, что если $|y| \leqslant x_0$, то $M_y^{-2} \geqslant M_{x_0}^{-2}$. С другой стороны, функция $\widetilde{\omega}$ возрастает, поэтому $\widetilde{\omega}(\varphi(x_0)/2) \leqslant \widetilde{\omega}(\varphi(y))$. Отсюда, согласно нашему выбору величины B'_{x_0}, выполнено неравенство $B'_{x_0} \leqslant B_y$. Последнее означает, что для всякого промежутка $y \in I \subset J_1$ выполнено $|I| \leqslant B'_{x_0} \leqslant B_y$. Значит, из теоремы 3 получаем $\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \leqslant C_u(\omega(|I|) + \omega(\sqrt{|I|}))$.

Возьмем $J_{x_0} = \{y : |y| \leqslant x_0\} \cap J_1$. Тогда

$$\sup_{I \subset J_{x_0}} \frac{\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I)}{\omega(|I|) + \omega(\sqrt{|I|})} \leqslant C.$$

Последнее, согласно статье [7], означает принадлежность функции $\mathcal{O}_\varphi$ классу

$$\mathrm{Lip}_{\omega(\,\cdot\,)+\omega(\sqrt{\cdot})}(J_{x_0}). \qquad \square$$

Автор выражает благодарность своему научному руководителю С. В. Кислякову за многочисленные плодотворные обсуждения задачи и помощь при составлении текста данной работы.

Литература

1. J. Brennan, *Approximation in the mean by polynomials on non Caratheodory domains.* — Ark. Mat., **15:1** (1977), 117–168
2. K. M. Dyakonov, *The moduli of holomorphic functions in Lipschitz spaces.* — Michigan Math. J., **44** (1997), 139–147
3. В. П. Хавин, *Обобщение теоремы Привалова-Зигмунда о модуле непрерывности сопряженной функции.* — Изв. Акад. наук Армянской ССР, серия Математика **6** (1971), 252–258, 265-287.
4. K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice Hall, Engelewood Cliffs, NJ, (1962).
5. А. Н. Медведев, *Падение гладкости внешней функции в сравнении с гладкостью ее модуля при дополнительных ограничениях на величину граничной функции.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **434** (2015), 101–115.
6. Н. А. Широков, *Достаточные условия для гельдоровской гладкости функции.* — Алгебра и анализ, **25**, No. 3 (2013), 200–206.
7. S. Spanne, *Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes.* — Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, **19.4** (1965), 593–608.
8. А. В. Васин, С. В. Кисляков, А. Н. Медведев, *Локальная гладкость аналитической функции в сравнении с гладкостью ее модуля.* — Алгебра и анализ, **25**, No. 3 (2013), 52–85.

Medvedev A. N. Comparison of boundary smoothness for an analytic function and for its modulus in the case of the upper half-plane.

The results of a recent paper by A. V. Vasin, S. V. Kislyakov, and the author are extended to the case of outer functions in the upper half-plane. As in the case of the disk, it can only be guaranteed that the smoothness of an outer function is at least one half as high as that of it modulus, but the quantitative manifestation of this effect is different – in particular, it depends on the position of the point at which smoothness is measured.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, 27,
191023, Санкт-Петербург, Россия;
Санкт-Петербургский
электротехнический университет,
ул. проф. Попова, д.5,
197376, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: alkomedvedev@gmail.com

Поступило 10 октября 2016 г.