Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 447, 2016 г.

И. К. Злотников

ОБ ОЦЕНКАХ В ЗАДАЧЕ ОБ ИДЕАЛАХ АЛГЕБРЫ H^∞

§1. Введение и основной результат

Пусть X – банахово идеальное пространство последовательностей, а X' – пространство, порядково сопряжённое с ним. Знаменитую задачу о короне в общем виде можно сформулировать следующим образом: пусть функция f ограничена и аналитична в единичном круге $\mathbb{D}$, принимает значения в пространстве X и удовлетворяет условию $1 > \|f(z)\|_X > \delta > 0$. Требуется найти такую X'-значную ограниченную и аналитическую функцию g, что $\langle f, g\rangle = \sum\limits_j f(z,j)g(z,j) = 1$, при этом желательно ещё и получить информацию о постоянной в оценке $\|g(z)\|_{X'} \leqslant C(\delta)$.

Первое доказательство разрешимости этой задачи было предложено Л. Карлесоном для конечномерных решёток X. Более простое, но найденное много позже доказательство Т. Вольфа позволило В. А. Толоконникову, М. Розенблюму и А. Учияме перенести результат на случай бесконечномерной решётки $X = l^2$. Заключительный этап решения задачи начался с исследования случая, в котором в качестве пространства X было взято пространство последовательностей l^1. Было предложено два метода решения. С помощью первого, интерполяционного метода С. В. Кисляков в работе [1] показал, что теорема о короне справедлива для l^1 (и, более того, для всех пространств l^p, $1 \leqslant p < \infty$; отметим, что случай $p > 2$ был рассмотрен ещё в совместной работе [7] Д. В. Руцкого и С. В. Кислякова). Второй метод основан на теореме Фана–Какутани о неподвижной точке. Используя этот метод, Руцкий в статье [2] распространил результат на все банаховые решётки X, определённые на $\mathbb{N}$, с порядково непрерывной нормой.

Параллельно с задачей о короне исследовалась ещё так называемая "задача об идеалах". Она состоит в следующем. Очевидно, что если

Ключевые слова: задача об идеалах, теорема о короне, теорема Фана–Какутани о неподвижной точке.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант No. 14-21-00035.

функция h из H^∞ лежит в идеале, порождённом функциями

$$f_1, \dots, f_k \in H^\infty,$$

то выполняется оценка $|h(z)| \leqslant C \sum\limits_{j=1}^{k} |f_j(z)|$, $z \in \mathbb{D}$. Спрашивается, в какой мере можно обратить это утверждение?

Вслед за описанными выше результатами, полученными методом Вольфа, в этой задаче тоже стали рассматривать бесконечные наборы функций $\{f_j\}$. Тогда термин “задача об идеалах”, строго говоря, утрачивает буквальный смысл, однако всё равно употреблятся. Приведём один из первых результатов в этом направлении, принадлежащий Толоконникову [3]. Как и у Вольфа и его последователей, в нём используется пространство l^2.

Теорема 1.1. *Пусть векторнозначная функция f из класса $H^\infty(l^2)$ и функция h из класса H^∞ удовлетворяют условиям*:

$$|h(z)| \leqslant \|f(z)\|_{l^2}^4 = \left(\sum_j |f(z,j)|^2\right)^2 \leqslant 1, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{1}$$

Тогда найдётся векторнозначная функция g из класса $H^\infty(l^2)$,

$$\|g\|_{H^\infty(l^2)} \leqslant 57,$$

такая что $\langle f, g \rangle = h$.

Т. Вольф, У. Сегрелл, К. В. Р. Рао, К. Лин, Д. Пау и С. Трейль исследовали вопрос о замене условия (1) условием

$$|h(z)| \leqslant \psi(\|f(z)\|_{l^2}) \leqslant 1$$

и попытались найти оптимальную функцию ψ. Рао установил, что для показательной функции $\psi(s) = s^\alpha$ с параметром $1 \leqslant \alpha < 2$ теорема неверна. Вольф, Сегрелл [4] и другие показали, что для $\alpha > 2$ задача имеет решение. Для показателя $\alpha = 2$ вопрос оставался открытым на протяжении 20 лет. Трейль, используя связь задачи об идеалах с теоремой о короне, показал, что, вообще говоря, с показателем $\alpha = 2$ задача решения не имеет. Рао, Лин и Трейль исследовали более точные функции ψ, для которых есть решения (см. [5]), однако в нашей работе столь тонкие оценки использованы не будут. Мы довольствуемся тем, что для всякого $\varepsilon > 0$ задача об идеалах имеет решение в классе $H^\infty(l^2)$, если исходные функции удовлетворяют условию:

$$|h(z)| \leqslant \|f(z)\|_{l^2}^{2+\varepsilon} \leqslant 1, \ \ z \in \mathbb{D}.$$

При этом величина нормы функции-решения $\|g\|_{H^\infty(l^2)}$ будет ограничена сверху некоторой константой C, зависящей от параметра ε. Зафиксируем для неё обозначение $C_{l^2} = C_{l^2}(\varepsilon)$. Стоит также отметить, что результаты в вышеуказанных работах приведены для конечномерного пространства X, однако они непосредственно обобщаются на случай бесконечной размерности. Как уже говорилось, случай бесконечномерного пространства X – это не совсем задача об идеалах в классическом понимании (кстати, в классической постановке вопрос о разных метриках, по-видимому, не столь уж и важен). В этой работе рассмотрена задача об идеалах для пространства $X = l^1$ вместо l^2. Сформулируем основной результат.

Теорема 1.2. *Пусть функция f из класса $H^\infty(\mathbb{D}; l^1)$ и функция h из класса $H^\infty(\mathbb{D})$ удовлетворяют условиям:*

$$|h(z)| \leqslant \|f(z)\|_{l^1}^{2+\varepsilon} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f(z,j)|\right)^{2+\varepsilon} \leqslant 1,$$

для всех $z \in \mathbb{D}$ и некоторого параметра $\varepsilon > 0$. Тогда найдётся функция g из класса $H^\infty(\mathbb{D}; l^\infty)$ такая, что

$$\langle f, g\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} f(z,j)g(z,j) = h(z),$$

при этом величина $\|g\|_{H^\infty(\mathbb{D}; l^\infty)}$ ограничена константой, зависящей только от ε.

При решении задачи были предприняты попытки использовать оба метода, приведшие к новым результатам в теореме о короне – как интерполяционный, так и основанный на теореме о неподвижной точке. В задаче об идеалах, однако, интерполяционные методы натолкнулись на препятствия, в то время как подход Руцкого, использующий теорему о неподвижной точке, оказался пригодным. Приведём формулировку теоремы Фана–Какутани о неподвижной точке.

Теорема 1.3. *Пусть K – компактное подмножество локально выпуклого линейного топологического пространства. Пусть отображение S определено на множестве K и действует в множество* *непустых выпуклых компактных подмножеств множества K. Если график*

$$\Gamma(S) = \{(x, y) \in K \times K\colon\ y \in S(x)\}$$

замкнут в $K \times K$, то отображение S имеет неподвижную точку, то есть для некоторого $x \in K$ выполняется соотношение $x \in S(x)$.

§2. Доказательство основного результата

Мы довольно близко следуем рассуждениям из статьи [2], с некоторыми упрощениями и изменениями. Зафиксируем числа $\delta > 0$ и $0 < r_k < 1$, $r_k \to 1$ при $k \to \infty$. Напомним, что через $C_{l^2} = C_{l^2}(\varepsilon)$ мы обозначили константу, ограничивающую величину нормы решения задачи об идеалах для пространства последовательностей l^2.

На пространстве $H^\infty(\mathbb{D}; l^2)$ будем рассматривать ограниченную $*$-слабую топологию, которая, как известно (см. [6]), совпадает с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах в $\mathbb{D} \times \mathbb{N}$. Рассмотрим шар

$$D = \left\{\gamma \in H^\infty(\mathbb{D}; l^2)\colon\ \|\gamma\|_{H^\infty(\mathbb{D}; l^2)} \leqslant C_{l^2}\right\}.$$

Из теоремы Банаха–Алаоглу следует, что множество D компактно в выбранной топологии. Считая пока индекс k фиксированным, для каждой функции γ из $H^\infty(\mathbb{D}; l^2)$ построим на окружности функцию

$$\varphi(\zeta, j) = \log\left(|f(\zeta, j)|^{1/2} + |\gamma(r_k\zeta, j)| + \frac{\delta}{2^j}\right), \quad \zeta \in \mathbb{T}. \tag{2}$$

Ясно, что функция φ удовлетворяет условиям

$$\|\exp\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T}; l^2)} \leqslant 1 + C_{l^2} + \delta, \quad \exp\varphi(\zeta, j) \geqslant \frac{\delta}{2^j}. \tag{3}$$

Построим теперь по функциям $\varphi(\,\cdot\,, j) \overset{\text{def}}{=} \varphi^{(j)}$ соответствующие им внешние функции. Пусть $\mathbb{H}$ – оператор гармонического сопряжения. Далее всюду будем понимать под z точку, лежащую в единичном круге $\mathbb{D}$, а под ζ – точку, лежащую на единичной окружности $\mathbb{T}$. На окружности упомянутые внешние функции задаются равенством

$$\Phi(\,\cdot\,, j) = e^{\varphi^{(j)}(\,\cdot\,) + i(\mathbb{H}\varphi^{(j)})(\,\cdot\,)}.$$

Разумеется, справедливо равенство

$$|\Phi(\zeta, j)| = |f(\zeta, j)|^{1/2} + |\gamma(r_k\zeta, j)| + \frac{\delta}{2^j}, \tag{4}$$

для всех значений $\zeta \in \mathbb{T}$. Теперь рассмотрим функции

$$\Psi(z,j) = \frac{f(z,j)}{\Phi(z,j)}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Нам понадобится следующее простое утверждение.

Лемма 2.1. *Для каждого $z \in \mathbb{D}$ и каждого $\rho > 0$ найдется такой номер $N(z)$, что, независимо от функции $\gamma \in D$ и от индекса k, справедливо неравенство*

$$\sum_{j \geqslant N(z)} |\Psi(z,j)|^2 \leqslant \rho^2. \tag{5}$$

Доказательство. Достаточно заметить, что $|\Psi(\zeta,j)| \leqslant |f(\zeta,j)|^{1/2}$ при $\zeta \in \mathbb{T}$ независимо от того, каковы γ и k. Тогда, очевидно,

$$\left(\sum_{j \geqslant N(z)} |\Psi(z,j)|^2\right)^{1/2} \leqslant P_z * \left(\sum_{j \geqslant N(z)} |f(\,\cdot\,,j)|\right)^{1/2},$$

(P_z – ядро Пуассона в точке z, символ $*$ обозначает свертку), так что нужное утверждение следует из теоремы Лебега о мажорированной сходимости. Кстати, из рассуждения видно, что число $N(z)$ можно выбрать не зависящим также и от z из заданного наперед компактного подмножества круга. □

Положим ещё $h_1(z) = \frac{h(z)}{\left(1+C_{l^2}+\delta\right)^{2+\varepsilon}}$ и определим отображение T из D в 2^D. Оно сопоставляет исходной функции $\gamma \in D$ множество всех функций u из класса D, которые являются решениями уравнения $\langle u(z), \Psi(z)\rangle = h_1(z)$.

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы применить к отображению T теорему Фана–Какутани о неподвижной точке. Для этого потребуется проверить ряд условий. Покажем, что множество $T(\gamma)$ непусто для любой функции γ из D. Для этого достаточно убедиться, что функции $\Psi(z)$ и $h_1(z)$ удовлетворяют условиям задачи об идеалах для пространства l^2. Напомним, что ζ – произвольная точка на единичной окружности $\mathbb{T}$. Из условия теоремы и неравенства Гёльдера получаем:

$$|h(\zeta)| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f(\zeta, j)|\right)^{2+\varepsilon} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\Psi(\zeta, j)||\Phi(\zeta, j)|\right)^{2+\varepsilon}$$
$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\Phi(\zeta, j)|^2\right)^{1+\varepsilon/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\Psi(\zeta, j)|^2\right)^{1+\varepsilon/2}.$$

Первый множитель в последнем выражении можно оценить, используя равенство (4) и то, что величина $\|\gamma\|_{H^\infty(\mathbb{D};l^2)}$ не превосходит C_{l^2}:

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\Phi(\zeta, j)|^2\right)^{1+\varepsilon/2} \leqslant \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} |f(\zeta, j)|\right)^{1/2} + C_{l^2} + \delta\right)^{2+\varepsilon}$$
$$\leqslant (1 + C_{l^2} + \delta)^{2+\varepsilon}.$$

Применяя принцип максимума, получаем, что для $z \in \mathbb{D}$ выполняется оценка $|h_1(z)| \leqslant \|\Psi(z)\|_{l^2}^{2+\varepsilon}$.

Для проверки оценки сверху из условия задачи об идеалах для пространства l^2 снова применим соотношение (4) на модуль внешней функции:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\Psi(\zeta, j)|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|f(\zeta, j)|^2}{\left(|f(\zeta, j)|^{1/2} + |\gamma(\zeta, j)| + \delta\right)^2} \leqslant |f(\zeta)|_{l^1} \leqslant 1.$$

Вновь применяя принцип максимума, получаем, что условия задачи выполнены, и тем самым мы проверили, что все множества $T(\gamma)$, $\gamma \in D$, непусты.

Покажем теперь, что график отображения T замкнут. Действительно, пусть функции γ_n равномерно сходятся на компактных подмножествах в $\mathbb{D} \times \mathbb{N}$ к функции γ, а функции $u_n \in T(\gamma_n)$ также равномерно на компактах сходятся к некоторой функции u. Необходимо показать, что $u \in T(\gamma)$, то есть выполняется равенство $\sum\limits_j u(z, j)\, \frac{f(z,j)}{\Phi(z,j}} = h_1(z)$. Условимся отмечать индексом n функции, возникающие в описанной выше конструкции, примененной к γ_n вместо γ:

$$\varphi_n(\zeta, j) = \log\left(|f(\zeta, j)|^{1/2} + |\gamma_n(r_k\zeta, j)| + \frac{\delta}{2^j}\right)$$

и т.д. Поскольку $r_k < 1$, из последней формулы видно, что при каждом j функции $\varphi_n(\,\cdot\,,j)$ сходятся при $n \to \infty$ равномерно на окружности (а, значит, и в L^2) к функции $\varphi(\,\cdot\,,j)$, построенной по γ. Из непрерывности оператора гармонического сопряжения в L^2 теперь легко следует равномерная сходимость внешних функций $\Phi_n(\,\cdot\,,j)$ к $\Phi(\,\cdot\,,j)$ на компактах в круге $\mathbb{D}$. Поскольку величины $\Phi_n(z,j)$ отделены от нуля числом $\frac{\delta}{2^j}$, мы можем перейти к пределу по n в равенстве $\sum\limits_j u_n(z,j)\frac{f(z,j)}{\Phi_n(z,j)} = h_1(z)$ при z, лежащих внутри круга (для этого надо сначала применить неравенство Коши и лемму 2.1, чтобы убедиться, что достаточно далекие остатки этого ряда становятся сколь угодно малыми равномерно по n). Таким образом, график отображения T замкнут.

Итак, все множества $T(\gamma)$, $\gamma \in D$, непусты, график отображения T замкнут и множество D компактно в выбранной топологии. Следовательно, можно применить теорему Фана–Какутани о неподвижной точке: найдётся такая функция γ из множества D, что γ лежит в множестве $T(\gamma)$. Теперь настало время вспомнить о зависимости всех построений от k: найденную неподвижную точку и все вспомогательные функции, с ней связанные, будем в дальнейшем помечать индексом k. Мы доказали соотношение

$$\langle \gamma_k, \Psi_k \rangle = h_1,$$

а, следовательно, справедливо равенство

$$\left\langle f, \frac{\gamma_k}{\Phi_k}(1 + C_{l^2} + \delta)^{2+\varepsilon} \right\rangle = h. \tag{6}$$

Частные $\gamma_k(z,j)/\Phi_k(z,j)$ вполне могут оказаться не ограниченными в совокупности, однако из формулы (4) следует, что

$$|\gamma_k(r_k z,j)/\Phi_k(z,j)| \leqslant 1. \tag{7}$$

Мы можем считать, что при каждом j функции $\gamma_k(\,\cdot\,,j)$ сходятся при $k \to \infty$ к некоторым (ограниченным аналитическим) функциям $u(\,\cdot\,,j)$ равномерно на компактах в круге. Ввиду формулы (3), мы можем также считать, что при каждом j функции $\varphi_k(\,\cdot\,,j)$ (см. (2)) сходятся куда-то слабо в L^2 на окружности, а тогда, ввиду (слабой) непрерывности оператора гармонического сопряжения в L^2, внешние функции $\Phi_k(\,\cdot\,,j)$ тоже сходятся равномерно на компактах в круге к неким функциям, отделенным от нуля. В силу оценки (7),

$$\gamma_k(r_k z, j)/\Phi_k(z,j) \to v(z,j) \text{ при } k \to \infty, \quad z \in \mathbb{D},$$

где $v(z,j)$ – аналитические функции в круге, не превосходящие по модулю единицы.

Теперь составим из функций $v(z,j)$ аналитическую вектор-функцию V; ее норма в $H^\infty(l^\infty)$ не превосходит единицы и легко видеть, что она дает искомое решение задачи об идеалах:

$$\langle f, V(1 + C_{l^2} + \delta)^{2+\varepsilon} \rangle = h.$$

Действительно, пусть z – фиксированная точка внутри единичного круга, тогда в силу леммы 2.1 и неравенства Коши, при достаточно большом N сумма

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant N} \gamma_k(z,j) \Psi_k(z,j)$$

близка к $h_1(z)$ при всех k одновременно. С другой стороны, при фиксированном N, для всех достаточно больших k она мало отличается от суммы

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant N} \gamma_k(r_k z, j) \Psi_k(z,j) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} f(z,j) \frac{\gamma_k(r_k z, j)}{\Phi_k(z,j)},$$

которая, в свою очередь, близка к $\sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} f(z,j) v(z,j)$. Отсюда следует требуемое.

От сохранившейся зависимости оценочной постоянной от δ можно избавиться с помощью ещё одного (уже совсем простого) предельного перехода.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю С. В. Кислякову за постановку задачи и значительную помощь в её решении.

Литература

1. С. В. Кисляков, *Теорема о короне и интерполяция.* — Алгебра и анализ **27**, No. 5 (2015).
2. D. Rutsky, *Corona problem with data in ideal spaces of sequences.* — Preprint, https://arxiv.org/abs/1507.03798.
3. В. А. Толоконников, *Оценки в теореме Карлесона о короне, идеалы алгебры H^∞, задача Секефальви-Надя.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **113** (1981), 178–198.

4. U. Cegrell, *A generalization of the corona theorem in the unit disc.* — Math. Z **203** (1990), 255–261. MR91h:30059
5. S. Treil, *The problem of ideals of H^∞: beyond the exponent* 3/2. — J. Funct. Anal. **253**, no. 1 (2007), 220–240. MR 2362422
6. L. Rubel, A. Shields, *The space of bounded analytic functions on a region.* — Annales de l'institut Fourier **16**, no. 1 (1966), 235–277.
7. С. В. Кисляков, Д. В. Руцкий, *Несколько замечаний к теореме о короне.* — Алгебра и анализ **23**, вып. 2 (2012), 171–191.

Zlotnikov I. K. Estimates in the problem of ideals in the algebra H^∞.

By using the fixed-point approach due to D. Rutsky, the problem of ideals in H^∞ is solved for "data sequences" in $H^\infty(l^1)$ (instead of $H^\infty(l^2)$ in the traditional setting).

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова,
Санкт-Петербург, Фонтанка 27, Россия;
Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
Санкт-Петербургский государственный университет,
14 линия В.О., дом 29Б,
Санкт-Петербург 199178 Россия
E-mail: zlotnikk@rambler.ru

Поступило 18 сентября 2016 г.