Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 441, 2016 г.

Е. С. Дубцов

ОПЕРАТОРЫ КОМПОЗИЦИИ МЕЖДУ ПРОСТРАНСТВАМИ БЛОХА И BMOA В ПОЛИДИСКАХ

§1. Введение

Пусть $\mathcal{H}ol(\mathbb{D}^m)$ обозначает пространство всех голоморфных функций в единичном полидиске $\mathbb{D}^m$ из $\mathbb{C}^m$, $m \geqslant 1$.

1.1. Операторы композиции. Если задано голоморфное отображение $\varphi : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^m$, то оператор композиции $C_\varphi : \mathcal{H}ol(\mathbb{D}^m) \to \mathcal{H}ol(\mathbb{D}^n)$ определяется следующим равенством:

$$(C_\varphi f)(z) = f(\varphi(z)), \quad f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}^m),\ z \in \mathbb{D}^n.$$

Для голоморфного отображения φ, переводящего единичный шар из $\mathbb{C}^n$ в единичный круг $\mathbb{D}$, П. Ахерн и У. Рудин [1] сформулировали задачу об описании тех операторов C_φ, которые действуют из пространства Блоха в BMOA. Результаты, связанные с решением этой задачи, были получены в работах [4, 10, 12–14]. Однако, если отображение φ действует в область из $\mathbb{C}^m$, $m \geqslant 2$, то типичной технической проблемой является ограничение на использование в рассуждениях операции дифференцирования. Для голоморфных отображений между комплексными шарами произвольной размерности решение этой проблемы было предложено в работе [7]. В настоящей статье используется подобный метод, основанный на Мёбиус-инвариантности рассматриваемых пространств. А именно, будет получено описание тех отображений φ, для которых оператор композиции C_φ отображает пространство Блоха $\mathcal{B}(\mathbb{D}^m)$ в пространство $\mathrm{bmoa}(\mathbb{D}^n)$, называемое малым пространством BMOA.

Ключевые слова: пространство Блоха, малое пространство BMOA, оператор композиции.

Работа частично поддержана грантом РФФИ No. 14-01-00198-а.

1.2. Рассматриваемые пространства. Для $m \geqslant 1$ пространство Блоха $\mathcal{B}(\mathbb{D}^m)$ состоит из функций $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}^m)$ таких, что

$$\|f\|_{\mathcal{B}(\mathbb{D}^m)} = |f(0)| + \sup_{w\in\mathbb{D}^m} \sum_{k=1}^{m} \left|\frac{\partial f}{\partial w_k}(w)\right| (1-|w_k|^2) < \infty.$$

Пусть μ обозначает нормированную меру Лебега на единичной окружности $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$. Произведение соответствующих мер на торе $\mathbb{T}^n$ обозначим символом μ_n. Существует несколько естественных аналогов классического пространства $\mathrm{BMO}(\mathbb{T})$ в случае тора $\mathbb{T}^n$, $n \geqslant 2$ (см., например, [3, 6, 8, 9]). В данной работе рассматривается пространство $\mathrm{bmo}(\mathbb{T}^n)$, называемое малым пространством BMO на $\mathbb{T}^n$ (см., например, [6,9]). Пространство $\mathrm{bmo}(\mathbb{T}^n)$ состоит из функций $f \in L^1(\mathbb{T}^n, \mu_n)$, имеющих ограниченную среднюю осцилляцию на параллелепипедах. А именно, $f \in \mathrm{bmo}(\mathbb{T}^n)$, если существует константа $C > 0$ такая, что

$$\frac{1}{|R|}\int_R |f(\zeta) - f_R|\, d\mu_n(\zeta) \leqslant C \quad \text{для всех } R = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n,$$

где $|R| = \mu_n(R)$, $I_1, I_2, \ldots, I_n \subset \mathbb{T}$ являются дугами и

$$f_R = \frac{1}{|R|}\int_R f(\zeta)\, d\mu_n(\zeta).$$

Чтобы определить голоморфное пространство $\mathrm{bmoa}(\mathbb{D}^n)$, напомним, что классическое пространство Харди $H^p(\mathbb{D}^n)$, $1 \leqslant p < \infty$, состоит из функций $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}^n)$ таких, что

$$\|f\|^p_{H^p(\mathbb{D}^n)} = \sup_{0<r<1}\int_{\mathbb{T}^n} |f(r\zeta)|^p\, d\mu_n(\zeta) < \infty.$$

Для $f \in H^p(\mathbb{D}^n)$ известно, что радиальные пределы $f^*(\zeta)$ существуют для μ_n-почти всех $\zeta \in \mathbb{T}^n$. Итак, $\mathrm{bmoa}(\mathbb{D}^n)$ состоит из таких функций $f \in H^1(\mathbb{D}^n)$, что $f^* \in \mathrm{bmo}(\mathbb{T}^n)$. Безусловно, $\mathrm{bmo}(\mathbb{T})$ и $\mathrm{bmoa}(\mathbb{D})$ совпадают со стандартными пространствами $\mathrm{BMO}(\mathbb{T})$ и $\mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$.

1.3. Преобразования Мёбиуса для полидиска. Для $a \in \mathbb{D}$ преобразование Мёбиуса ϕ_a задается в единичном круге с помощью равенства

$$\phi_a(b) = \frac{a-b}{1-\overline{a}b}, \quad b \in \mathbb{D}.$$

Для $z \in \mathbb{D}^n$ преобразование Мёбиуса Φ_z задается в полидиске $\mathbb{D}^n$ следующим образом:

$$\Phi_z(u) = (\phi_{z_1}(u_1), \phi_{z_2}(u_2), \dots, \phi_{z_n}(u_n)), \quad u \in \mathbb{D}^n. \tag{1.1}$$

Безусловно, Φ_z является элементом группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}^n)$, т.е. группы биголоморфных отображений полидиска $\mathbb{D}^n$ в себя. Пусть $\mathcal{M}_n$ обозначает семейство всех преобразований Мёбиуса для полидиска $\mathbb{D}^n$. Чтобы различать $\mathcal{M}_n$ и $\mathcal{M}_m$, будем использовать обозначение

$$\Psi_w(v) = (\psi_{w_1}(v_1), \psi_{w_2}(v_2), \dots, \psi_{w_m}(v_m)), \quad w, v \in \mathbb{D}^m,$$

для элементов семейства $\mathcal{M}_m$, где ψ_{w_1}, ψ_{w_2}, $\dots$, ψ_{w_m} – это преобразования Мёбиуса для единичного круга.

1.4. Малые гиперболические классы BMOA. Пусть ρ_m обозначает расстояние Бергмана, заданное на полидиске $\mathbb{D}^m$.

Определение 1. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что голоморфное отображение $\varphi : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^m$ принадлежит классу* $\mathrm{bmoa}_H(\mathbb{D}^n, \mathbb{D}^m)$*, если*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}^n} \sup_{0\leqslant r<1} \int_{\mathbb{T}^n} \rho_m(\varphi(\Phi_z(r\zeta)), \varphi(z))\, d\mu_n(\zeta) < \infty, \tag{1.2}$$

где преобразование Мёбиуса Φ_z задано равенством (1.1).

Напомним, что полунорма Гарсиа на пространстве $\mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$ определяется равенством

$$\|f\|_{G^1(\mathbb{D})} = \sup_{a\in\mathbb{D}} \sup_{0\leqslant r<1} \int_{\mathbb{T}} |f(\phi_a(r\zeta)) - f(a)|\, d\mu(\zeta).$$

Следовательно, при $m = n = 1$ условие $\varphi \in \mathrm{bmoa}_H(\mathbb{D}^n, \mathbb{D}^m)$ превращается в свойство $\|f\|_{G^1(\mathbb{D})} < \infty$, если заменить φ на $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ и заменить ρ_m на евклидово расстояние. Поэтому, используя терминологию работ [12,16] для $n = m = 1$, будем говорить, что $\mathrm{bmoa}_H(\mathbb{D}^n, \mathbb{D}^m)$ – это малый гиперболический класс BMOA. Однако другие названия также использовались для класса $\mathrm{bmoa}_H(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, см. [10].

1.5. Основной результат.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$, *является голоморфным отображением. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

$$C_\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{D}^m) \to \mathrm{bmoa}(\mathbb{D}^n) \text{ является ограниченным оператором;} \tag{1.3}$$

$$\sup_{z\in\mathbb{D}^n} \sup_{0\leqslant r<1} \int_{\mathbb{T}^n} \rho_m^p(\varphi(\Phi_z(r\zeta)), \varphi(z))\, d\mu_n(\zeta) < \infty \quad \text{для некоторого } p \geqslant 1; \tag{1.4}$$

$$\varphi \in \mathrm{bmoa}_H(\mathbb{D}^n, \mathbb{D}^m). \tag{1.5}$$

В частности, условие $\varphi \in \mathrm{bmoa}_H(\mathbb{D}^n, \mathbb{D}^m)$ эквивалентно условию (1.4) при любом $p \geqslant 1$. Для $m = n = 1$ в работе [16] получены подобные и более общие факты иным способом на основе методов из работы А. Бэрнштейна [2]. При $m = n = 1$ эквивалентность свойств (1.3) и (1.5) по существу доказали У. Рами и Д. Уллрич [13]; см. также [10,12], где приведены явные формулировки.

Организация статьи. Разделы 2 и 3 содержат вспомогательные результаты о пространствах Блоха и $\mathrm{bmoa}(\mathbb{D}^n)$ соответственно. В частности, вводится Мёбиус-инвариантная полунорма на пространстве $\mathrm{bmoa}(\mathbb{D}^n)$. Теорема 1 доказана в разделе 4.

Обозначения. Как обычно, символ C обозначает универсальную положительную константу, значение которой может меняться от строки к строке. Обозначение $A \asymp B$ используется в том случае, когда $C_1 A \leqslant B \leqslant C_2 A$ для некоторых констант $C_1, C_2 > 0$.

§2. Вспомогательные результаты: пространства Блоха

2.1. Пространства Блоха на однородных областях. Область $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^m$ называется однородной, если группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ действует транзитивно, т.е. для любых $w, v \in \mathcal{D}$ существует автоморфизм $T \in \mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ такой, что $Tw = v$. Пусть $H_w(u, \overline{v})$ обозначает положительно определенную эрмитову форму, которая инвариантна относительно автоморфизмов области $\mathcal{D}$. Р.М. Тимони [15] определил пространство Блоха $\mathcal{B}(\mathcal{D})$ как множество функций $f \in \mathcal{H}ol(\mathcal{D})$ таких, что

$$\beta_f = \sup_{w\in\mathcal{D}} Q_f(w) < \infty,$$

где

$$Q_f(w) = \sup_{u\in\mathbb{C}^m\setminus\{0\}} \frac{|\langle\nabla f(w), u\rangle|}{\sqrt{H_w(u,\overline{u})}}.$$

Отображение $f \mapsto \beta_f$ является полунормой на пространстве $\mathcal{B}(\mathcal{D})$. Из определения полунормы β_f следует, что

$$\beta_{f\circ\Psi} = \beta_f \quad \text{для всех } \Psi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{D}). \tag{2.1}$$

2.2. Нормы на фактор-пространстве $\widetilde{\mathcal{B}}(\mathbb{D}^m)$. Пусть $\widetilde{\mathcal{B}}(\mathbb{D}^m)$ обозначает пространство $\mathcal{B}(\mathbb{D}^m)$, профакторизованное по пространству постоянных функций. Тогда $\widetilde{\mathcal{B}}(\mathbb{D}^m)$ является банаховым пространством относительно следующей нормы:

$$\|f\|^2_{\widetilde{\mathcal{B}}(\mathbb{D}^m)} = \sup_{w\in\mathbb{D}^m} \sum_{k=1}^m \left|\frac{\partial f}{\partial w_k}(w)\right|^2 (1-|w_k|^2)^2.$$

Данную эквивалентную норму естественно выбрать в качестве стандартной на пространстве $\widetilde{\mathcal{B}}(\mathbb{D}^m)$. Действительно, известно, что $\|f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}(\mathbb{D}^m)} = \beta_f$, где выражение $\beta_f = \beta_f(\mathbb{D}^m)$ определено в разделе 2.1. В частности, свойство (2.1) гарантирует, что

$$\beta_{f\circ\Psi} = \beta_f \quad \text{для всех } \Psi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}^m).$$

2.3. Функции Блоха как липшицевы отображения. Хорошо известно, что функции $f \in \mathcal{B}(\mathbb{D})$ являются липшицевыми отображениями относительно расстояния Бергмана ρ_1 на единичном круге. Это наблюдение нетрудно распространить на пространства $\mathcal{B}(\mathbb{D}^m)$, $m \geqslant 2$. На самом деле, имеет место следующий точный факт.

Теорема 2 (см. [5, теорема 3.1]). *Пусть $f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}^m)$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда $f \in \mathcal{B}(\mathbb{D}^m)$ в том и только в том случае, когда f является липшицевым отображением между полидиском, наделенным расстоянием ρ_m, и комплексной плоскостью, наделенной евклидовым расстоянием. Более того,*

$$\beta_f = \sup_{w\neq v} \frac{|f(w)-f(v)|}{\rho_m(w,v)}. \tag{2.2}$$

2.4. Обратные оценки в пространствах Блоха.

Лемма 3. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$ *и* $0 < q < \infty$. *Тогда существуют функции* $F_x \in \mathcal{B}(\mathbb{D}^m)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, *и константа* $\tau_{m,q} > 0$ *такие, что* $F_x(0) = 0$, $\|F_x\|_{\mathcal{B}(\mathbb{D}^m)} \leqslant 1$, *а также*

$$\int\limits_0^1 |F_x(w)|^q\,dx \geqslant \tau_{m,q}\left(\sum_{k=1}^m \log\frac{1}{1-|w_k|^2}\right)^{\frac{q}{2}}$$

для всех $w \in \mathbb{D}^m$.

Доказательство. Известно, что существуют функции $f_x \in \mathcal{B}(\mathbb{D})$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, и константа $\tau_q > 0$ такие, что $f_x(0) = 0$,

$$\|f_x\|_{\mathcal{B}(\mathbb{D})} = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f_x'(z)|(1-|z|^2) \leqslant 1,$$

а также

$$\int\limits_0^1 |f_x(z)|^q\,dx \geqslant \tau_q\left(\log\frac{1}{1-|z|^2}\right)^{\frac{q}{2}}$$

для всех $z \in \mathbb{D}$; см., например, [11, лемма 2.1]. Полагая

$$F_y(w) = f_{y+1-k}(w_k) \quad \text{для} \ \ y \in [k-1,k),\ k = 1,2,\dots,m,$$

получаем

$$\int\limits_0^m |F_y(w)|^q\,dy \geqslant \tau_{m,q}\left(\sum_{k=1}^m \log\frac{1}{1-|w_k|^2}\right)^{\frac{q}{2}}$$

для всех $w \in \mathbb{D}^m$. Наконец, заменяя переменную интегрирования, получаем интеграл по интервалу $[0,1]$ в левой части полученного неравенства. $\square$

§3. Вспомогательные результаты: пространства BMOA

3.1. Ядра Пуассона и замена переменных в интегралах. Напомним, что равенство

$$P(z,\zeta) = \prod_{j=1}^n \frac{1-|z_j|^2}{|z_j-\zeta_j|^2}, \quad z \in \mathbb{D}^n,\ \zeta \in \mathbb{T}^n,$$

задает ядро Пуассона для полидиска $\mathbb{D}^n$. Последовательно заменяя переменные интегрирования, получаем следующую формулу:

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} g\circ\Phi_z(\zeta)\,d\mu_n(\zeta) = \int\limits_{\mathbb{T}^n} g(\zeta)P(z,\zeta)\,d\mu_n(\zeta), \quad g\in L^1(\mathbb{T}^n), \tag{3.1}$$

где $\Phi_z = (\phi_{z_1},\dots,\phi_{z_n})$, $z\in\mathbb{D}^n$, обозначает преобразование Мёбиуса для полидиска $\mathbb{D}^n$.

3.2. Полунормы Гарсия. Для $1\leqslant p<\infty$ пусть $\mathrm{BMOA}_{G^p}(\mathbb{D}^n)$ обозначает пространство функций $f\in H^p(\mathbb{D}^n)$ таких, что

$$\|f\|_{G^p(\mathbb{D}^n)} = \sup_{z\in\mathbb{D}^n}\|f\circ\Phi_z - f(z)\|_{H^p(\mathbb{D}^n)} < \infty, \tag{3.2}$$

где $H^p(\mathbb{D}^n)$ обозначает классическое пространство Харди в полидиске $\mathbb{D}^n$. Отметим, что равенство (3.2) задает полунорму на пространстве $\mathrm{BMOA}_{G^p}(\mathbb{D}^n)$. Также определение (3.2) гарантирует, что

$$\|f\circ\Phi_u\|_{G^p(\mathbb{D}^n)} = \|f\|_{G^p(\mathbb{D}^n)}, \quad u\in\mathbb{D}^n.$$

Имеем $f\in H^p(\mathbb{D}^n)$ в определении (3.2), следовательно, $f\circ\Phi_z\in H^p(\mathbb{D}^n)$, $z\in\mathbb{D}^n$. В частности, радиальные пределы $(f\circ\Phi_z)^*$ определены μ_n-п.в. Далее,

$$\|f\circ\Phi_z(r\zeta) - f(z)\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}$$

является возрастающей функцией от переменной r, а также

$$\lim_{r\to 1-}\|f\circ\Phi_z(r\zeta) - f(z)\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} = \|(f\circ\Phi_z)^*(\zeta) - f(z)\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}.$$

Известно, что Φ_z продолжается до гомеоморфизма тора $\mathbb{T}^n$. Так как $f\in H^p(\mathbb{D}^n)$, то f имеет некасательные (по каждой переменной) граничные значения. Так как кривая $\Phi_z(r\zeta)$ при $r\to 1$ приближается к точке $\Phi_z(\zeta)$ некасательно, то приходим к заключению, что

$$(f\circ\Phi_z)^*(\zeta) = f^*(\Phi_z(\zeta)) \ \text{ для } \ \mu_n\text{-почти всех } \zeta\in\mathbb{T}^n.$$

Таким образом,

$$\|f\|_{G^p(\mathbb{D}^n)} = \sup_{z\in\mathbb{D}^n}\|f^*(\Phi_z(\zeta)) - f(z)\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}.$$

Используя формулу (3.1), получаем

$$\|f\|^p_{G^p(\mathbb{D}^n)} = \sup_{z\in\mathbb{D}^n}\int\limits_{\mathbb{T}^n}|f^*(\zeta) - f(z)|^p P(z,\zeta)\,d\mu_n(\zeta). \tag{3.3}$$

Ниже будут использоваться оба выражения (3.2) и (3.3) для $\|\cdot\|_{G^p(\mathbb{D}^n)}$.

Стандартный вариант следующей леммы формулируется в терминах ограниченной средней осцилляции.

Лемма 4. *Пусть* $f \in H^p(\mathbb{D}^n)$. *Предположим, что*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}^n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} |f^*(\zeta) - k_z|^p P(z,\zeta)\, d\mu_n(\zeta) \leqslant K < \infty \tag{3.4}$$

для некоторых констант $k_z \in \mathbb{C}$. *Тогда* $f \in \mathrm{BMOA}_{G^p}(\mathbb{D}^n)$.

Доказательство. Зафиксируем точку $z \in \mathbb{D}^n$. Имеем

$$\begin{aligned} |f(z) - k_z|^p &= \left| \int\limits_{\mathbb{T}^n} (f^*(\zeta) - k_z) P(z,\zeta)\, d\mu_n(\zeta) \right|^p \\ &\leqslant \int\limits_{\mathbb{T}^n} |f^*(\zeta) - k_z)|^p P(z,\zeta)\, d\mu_n(\zeta) \leqslant K \end{aligned} \tag{3.5}$$

в силу неравенстве Гёльдера и (3.4). Следовательно,

$$\begin{aligned} &2^{1-p} \int\limits_{\mathbb{T}^n} |f^*(\zeta) - f(z)|^p P(z,\zeta)\, d\mu_n(\zeta) \\ &\leqslant \int\limits_{\mathbb{T}^n} |f^*(\zeta) - k_z|^p P(z,\zeta)\, d\mu_n(\zeta) + \int\limits_{\mathbb{T}^n} |k_z - f(z)|^p P(z,\zeta)\, d\mu_n(\zeta) \leqslant 2K \end{aligned}$$

в силу (3.5) и (3.4). Для завершения доказательства остается использовать равенство (3.3). □

3.3. Эквивалентные определения пространства $\mathrm{bmoa}(\mathbb{D}^n)$**.** Для $p > 1$ рассмотрим вспомогательные пространства $\mathrm{bmo}_p(\mathbb{T}^n)$, являющиеся аналогами пространства $\mathrm{bmo}(\mathbb{T}^n) = \mathrm{bmo}_1(\mathbb{T})$. По определению пространство $\mathrm{bmo}_p(\mathbb{T}^n)$ состоит из функций $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ таких, что

$$\|f\|^p_{\mathrm{bmo}_p(\mathbb{T}^n)} = \sup_R \frac{1}{|R|} \int\limits_R |f - f_R|^p\, d\mu_n < \infty.$$

Пространство $\mathrm{bmoa}_p(\mathbb{D}^n)$ соответственно состоит из тех $f \in H^p(\mathbb{D}^n)$, для которых $f^* \in \mathrm{bmo}_p(\mathbb{T}^n)$.

Следующее предложение известно для классического пространства BMOA в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$; см., например, [17, теорема 5.3], где $p = 2$.

Предложение 5. *Пусть $f \in H^p(\mathbb{D}^n)$, $p \geqslant 1$. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

(i) $f \in \mathrm{bmoa}_p(\mathbb{D}^n)$;
(ii) $f \in \mathrm{BMOA}_{G^p}(\mathbb{D}^n)$.

Доказательство. Для упрощения обозначений будем предполагать, что $n=2$. После очевидных изменений приведенные ниже рассуждения можно использовать для всех $n \geqslant 2$.

(i)$\Rightarrow$(ii) Для $\zeta \in \mathbb{T}^2$ и $r_1, r_2 > 0$ положим

$$R(\zeta, r_1, r_2) = \{\xi \in \mathbb{T}^2 : |\zeta_j - \xi_j| < r_j,\ j = 1, 2\}. \tag{3.6}$$

Пусть $f \in \mathrm{bmoa}_p(\mathbb{D}^2)$, т.е.

$$b_* = \sup_R \frac{1}{|R|} \int\limits_R |f^* - f^*_R|^p \, d\mu_2 < \infty,$$

где R – это прямоугольники, задаваемые равенством (3.6), а символ f^* обозначает граничные значения функции f. Далее в доказательстве вместо f^* будет использоваться символ f. Ниже будет показано, что

$$\sup_{z \in \mathbb{D}^2} \int\limits_{\mathbb{T}^2} |f(\zeta) - k_z|^p P(z, \zeta) \, d\mu_2(\zeta) < \infty$$

для некоторых констант $k_z \in \mathbb{C}$.

Итак, зафиксируем точку $z \in \mathbb{D}^2$. Не умаляя общности, предположим, что $|z| \geqslant \frac{4}{5}$.

Положим

$$R_\ell = R\left(\left(\frac{z_1}{|z_1|}, \frac{z_2}{|z_2|}\right), 2^\ell(1 - |z_1|), (1 - |z_2|)\right), \quad \ell = 0, 1, \ldots, L,$$

где L – это наименьшее натуральное число такое, что $2^L(1 - |z_1|) > 2$. Также положим

$$R_{L+k} = R\left(\left(\frac{z_1}{|z_1|}, \frac{z_2}{|z_2|}\right), 2^L(1 - |z_1|), 2^k(1 - |z_2|)\right), \quad k = 1, \ldots, K,$$

где K – это наименьшее натуральное число такое, что $R_{L+K} = \mathbb{T}^2$. В результате получаем прямоугольники R_j, $j = 0, 1, \ldots, J$, $J = K + L$, $R_J = \mathbb{T}^2$. Также имеем

$$|R_j| \asymp 2^j(1 - |z_1|)(1 - |z_2|).$$

Теперь предположим, что $\zeta \in R_j \setminus R_{j-1}$, $j = 1, \ldots, J$. Отметим, что

$$|z_1 - \zeta_1||z_2 - \zeta_2| \asymp 2^j (1 - |z_1|)(1 - |z_2|);$$

следовательно,

$$P(z, \zeta) \asymp \frac{1}{4^j (1 - |z_1|)(1 - |z_2|)} \asymp \frac{1}{2^j |R_j|}. \tag{3.7}$$

Далее, имеем $|R_j| \leqslant C|R_{j-1}|$ и

$$f_{R_j} - f_{R_{j-1}} = \frac{1}{|R_{j-1}|} \int\limits_{R_{j-1}} (f_{R_j} - f)\, d\mu_2;$$

поэтому

$$\left|f_{R_j} - f_{R_{j-1}}\right|^p \leqslant \frac{C}{|R_j|} \int\limits_{R_j} \left|f - f_{R_j}\right|^p \, d\mu_2 \leqslant C b_*.$$

Таким образом,

$$\left|f_{R_j} - f_{R_0}\right|^p \leqslant \left(\sum_{k=1}^{j} |f_{R_k} - f_{R_{k-1}}| \right)^p \leqslant C j^p b_*.$$

Объединяя полученную оценку и свойство (3.7), имеем

$$\int\limits_{R_j \setminus R_{j-1}} |f_{R_j} - f_{R_0}|^p P(z, \zeta)\, d\mu_2(\zeta) \leqslant \frac{C j^p b_*}{2^j}.$$

Также свойство (3.7) гарантирует, что

$$\int\limits_{R_j \setminus R_{j-1}} |f(\zeta) - f_{R_j}|^p P(z, \zeta)\, d\mu_2(\zeta) \leqslant \frac{C}{2^j |R_j|} \int\limits_{R_j} |f(\zeta) - f_{R_j}|^p \, d\mu_2(\zeta) \leqslant \frac{C b_*}{2^j}.$$

Так как $|f(\zeta) - f_{R_0}|^p \leqslant 2^{p-1}|f(\zeta) - f_{R_j}|^p + 2^{p-1}|f_{R_j} - f_{R_0}|^p$, то из двух последних оценок следует, что

$$\int\limits_{R_j \setminus R_{j-1}} |f(\zeta) - f_{R_0}|^p P(z, \zeta)\, d\mu_2(\zeta) \leqslant \frac{C (j+2)^p b_*}{2^j}.$$

Далее, используя полученное неравенство при $j = 1, \ldots, J$ и оценку $P(z,\zeta) \asymp \frac{1}{|R_0|}$ для $\zeta \in R_0$, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{T}^2} |f(\zeta) - f_{R_0}|^p P(z,\zeta)\, d\mu_2(\zeta)$$

$$= \int\limits_{R_0} |f(\zeta) - f_{R_0}|^p P(z,\zeta)\, d\mu_2(\zeta) + \sum_{j=1}^{J} \int\limits_{R_j \setminus R_{j-1}} |f(\zeta) - f_{R_0}|^p P(z,\zeta)\, d\mu_2(\zeta)$$

$$\leqslant Cb_* + Cb_* \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(j+2)^p}{2^j} \leqslant Cb_*.$$

Наконец, используя лемму 4 при $k_z = f_{R_0}$, получаем $f \in \mathrm{BMOA}_{G^p}(\mathbb{D}^2)$, что и требовалось доказать.

(ii)$\Rightarrow$(i) Пусть $f \in H^p(\mathbb{D}^2)$ и $z \in \mathbb{D}^2 \setminus \{0\}$. Используя равенство (3.3), получаем

$$\|f\|^p_{G^p(\mathbb{D}^2)} \geqslant \int\limits_{\mathbb{T}^2} |f(\zeta) - f(z)|^p P(z,\zeta)\, d\mu_2(\zeta)$$

$$\geqslant \int\limits_{R} |f(\zeta) - f(z)|^p P(z,\zeta)\, d\mu_2(\zeta),$$

где

$$R = R\left(\left(\frac{z_1}{|z_1|}, \frac{z_2}{|z_2|}\right), 3(1-|z_1|), 3(1-|z_2|)\right).$$

Отметим, что $|R| \asymp (1-|z_1|)(1-|z_2|)$. Далее, для $\zeta \in R$ имеем

$$|z_j - \zeta_j| \leqslant \left| z_j - \frac{z_j}{|z_j|} \right| + 3(1-|z_j|) \leqslant 4(1-|z_j|), \quad j = 1, 2.$$

Таким образом,

$$\|f\|^p_{G^p(\mathbb{D}^2)} \geqslant \frac{1}{16(1-|z_1|)(1-|z_2|)} \int\limits_{R} |f(\zeta) - f(z)|^p\, d\mu_2(\zeta)$$

$$\geqslant \frac{C}{|R|} \int\limits_{R} |f(\zeta) - f(z)|^p\, d\mu_2(\zeta).$$

Используя полученную оценку и проводя стандартные рассуждения (ср. с доказательством леммы 4), приходим к выводу, что

$$C\|f\|^p_{G^p(\mathbb{D}^2)} \geqslant \frac{1}{|R|}\int\limits_R |f(\zeta)-f_R|^p\,d\mu_2(\zeta).$$

Напомним, что точка z пробегает множество $\mathbb{D}^2\setminus\{0\}$, поэтому R пробегает все прямоугольники на торе $\mathbb{T}^2$. Следовательно, $f\in \mathrm{bmoa}_p(\mathbb{D}^2)$. □

Несколько эквивалентных описаний пространства $\mathrm{bmo}_1(\mathbb{T}^n)$ получено в работе [6]. В частности, если $f\in L^1(\mathbb{T}^2)$, то предложение 1.3 из [6] гарантирует, что $f\in \mathrm{bmo}_1(\mathbb{T}^2)$ тогда и только тогда, когда функции $f(\,\cdot\,,\zeta_2)$ и $f(\zeta_1,\,\cdot\,)$ равномерно принадлежат $\mathrm{BMO}(\mathbb{T})=\mathrm{bmo}(\mathbb{T})$ для почти всех ζ_2 и ζ_1 соответственно. Формально последнее условие означает, что $f(\,\cdot\,,\zeta_2)\in \mathrm{BMO}(\mathbb{T})$ для всех $\zeta_2\in E_2\subset\mathbb{T}$, $\mu(E_2)=1$, а также

$$\sup_{\zeta_2\in E_2}\|f(\,\cdot\,,\zeta_2)\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{T})}\leqslant C<\infty.$$

Функции $f(\zeta_1,\,\cdot\,)$ удовлетворяют аналогичному условию. Как указано в работе [6], идентичные результаты верны для $\mathrm{bmo}_1(\mathbb{T}^n)$ при $n\geqslant 2$.

Повторяя рассуждения из доказательства предложения 1.3 в [6], получаем подобное описание пространства $\mathrm{bmo}_p(\mathbb{T}^n)$, $n\geqslant 2$, $p\geqslant 1$, в терминах пространства $\mathrm{BMO}_p(\mathbb{T})=\mathrm{bmo}_p(\mathbb{T})$. Теперь отметим, что $\mathrm{BMO}_p(\mathbb{T})=\mathrm{BMO}(\mathbb{T})=\mathrm{bmo}(\mathbb{T})$ для всех $p\geqslant 1$; на самом деле, более общие утверждения были доказаны А. Бэрнштейном [2]. Таким образом, при $n\geqslant 1$ пространства $\mathrm{bmoa}_p(\mathbb{D}^n)$, $p\geqslant 1$, совпадают с пространством $\mathrm{bmoa}(\mathbb{D}^n)$, а также $\|\cdot\|_{\mathrm{bmoa}_p(\mathbb{D}^n)}$, $p\geqslant 1$, являются эквивалентными нормами на пространстве $\mathrm{bmoa}(\mathbb{D}^n)$. Объединяя этот факт с предложением 5, получаем следующее утверждение.

Предложение 6. *Пусть $n\in\mathbb{N}$ и $q\geqslant 1$. Пусть $\widetilde{\mathrm{bmoa}}(\mathbb{D}^n)$ обозначает пространство $\mathrm{bmoa}(\mathbb{D}^n)$, профакторизованное по пространству постоянных функций. Тогда $\|\cdot\|_{\mathrm{BMOA}_{G^q}(\mathbb{D}^n)}$ является эквивалентной Мёбиус-инвариантной нормой на банаховом пространстве $\widetilde{\mathrm{bmoa}}(\mathbb{D}^n)$.*

3.4. Гиперболические классы BMOA. Условие (1.4) сформулировано в терминах расстояния Бергмана ρ_m на полидиске $\mathbb{D}^m$. Известно, что

$$\rho_m^2(w,v) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m \left(\log\frac{1+|\psi_{w_k}(v_k)|}{1-|\psi_{w_k}(v_k)|}\right)^2, \quad w,v\in\mathbb{D}^m.$$

Таким образом, для $p \geqslant 1$ голоморфное отображение $\varphi : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^m$ удовлетворяет условию (1.4) тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{D}^n}\sup_{0\leqslant r<1}\int\limits_{\mathbb{T}^n}\left(\sum_{k=1}^m \log\frac{1}{1-|\psi_{\varphi_k(z)}(\varphi_k(\Phi_z(r\zeta)))|^2}\right)^p d\mu_n(\zeta) < \infty. \tag{3.8}$$

Класс $\mathrm{bmoa}_H(\mathbb{D}^n,\mathbb{D}^m)$ задается условием (1.2), которое равносильно свойству (3.8) при $p=1$.

§4. Доказательство теоремы 1

(1.3)$\Rightarrow$(1.4) Зафиксируем число $p\geqslant 1$. По предположению оператор $C_\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{D}^m) \to \mathrm{bmoa}(\mathbb{D}^n)$ ограничен. Отметим, что $C_\varphi 1 = 1$, поэтому оператор $C_\varphi : \widetilde{\mathcal{B}}(\mathbb{D}^m) \to \widetilde{\mathrm{bmoa}}(\mathbb{D}^n)$ также ограничен. Используя предложение 6 при $q = 2p$, получаем

$$\sup_{z\in\mathbb{D}^n}\sup_{0\leqslant r<1}\int\limits_{\mathbb{T}^n}|f\circ\varphi\circ\Phi_z(r\zeta) - f\circ\varphi(z)|^{2p}\, d\mu_n(\zeta) \leqslant C\|f\|^{2p}_{\widetilde{\mathcal{B}}(\mathbb{D}^m)} = C\beta_f^{2p}. \tag{4.1}$$

Теперь, используя лемму 3 при $q=2p$, построим функции $F_x\in\mathcal{B}(\mathbb{D}^m)$, $0\leqslant x\leqslant 1$, и зафиксируем константу $\tau = \tau_{m,2p} > 0$. Отметим, что $\|F_x\|_{\widetilde{\mathcal{B}}(\mathbb{D}^m)} \leqslant C\|F_x\|_{\mathcal{B}(\mathbb{D}^m)} \leqslant C$ для некоторой абсолютной константы $C>0$. Далее, Мёбиус-инвариантность нормы $\|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{B}}(\mathbb{D}^m)}$ гарантирует, что

$$\|F_x\circ\Psi_{\varphi(z)}\|_{\widetilde{\mathcal{B}}(\mathbb{D}^m)} \leqslant C,$$

где константа $C>0$ не зависит от точки $z\in\mathbb{D}^n$. Также имеем

$$F_x\circ\Psi_{\varphi(z)}(\varphi(z)) = F_x(0) = 0.$$

Следовательно, полагая $f = F_x\circ\Psi_{\varphi(z)}$ в условии (4.1), получаем

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n}|F_x\circ\Psi_{\varphi(z)}(\varphi(\Phi_z(r\zeta)))|^{2p}\, d\mu_n(\zeta) \leqslant C$$

для всех $z \in \mathbb{D}^n$, $0 \leqslant r < 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Таким образом,

$$\int\limits_0^1 \int\limits_{\mathbb{T}^n} |F_x \circ \Psi_{\varphi(z)}(\varphi(\Phi_z(r\zeta)))|^{2p} \, d\mu_n(\zeta) \, dx \leqslant C, \quad z \in \mathbb{D}^n, \ 0 \leqslant r < 1.$$

Далее, применяя теорему Фубини и лемму 3, получаем

$$\tau \int\limits_{\mathbb{T}^n} \left(\sum_{k=1}^m \log \frac{1}{1 - |\psi_{\varphi_k(z)}(\varphi_k(\Phi_z(r\zeta)))|^2} \right)^p d\mu_n(\zeta) \leqslant C, \qquad z \in \mathbb{D}^n, \ 0 \leqslant r < 1.$$

Иными словами, выполнено условие (3.8), которое эквивалентно условию (1.4). Итак, из (1.3) следует (1.4).

(1.4)$\Rightarrow$(1.5) Эта импликация тривиальна.

(1.5)$\Rightarrow$(1.3) Пусть $f \in \mathcal{B}(\mathbb{D}^m)$. Тогда

$$|f(\varphi(\Phi_z(r\zeta)) - f(\varphi(z))| \leqslant \beta_f \rho_m(\varphi(\Phi_z(r\zeta)), \varphi(z))$$

в силу (2.2). Следовательно,

$$\sup_{z \in \mathbb{D}^n} \sup_{0 \leqslant r < 1} \int\limits_{\mathbb{T}^n} |f(\varphi(\Phi_z(r\zeta)) - f(\varphi(z))| \, d\mu_n(\zeta) \leqslant \beta_f \sup_{z \in \mathbb{D}^n} \sup_{0 \leqslant r < 1} \int\limits_{\mathbb{T}^n} \rho_m(\varphi(\Phi_z(r\zeta)), \varphi(z)) \, d\mu_n(\zeta) < \infty$$

в силу (1.5). Используя предложение 6 при $p = 1$, приходим к выводу, что $f \circ \varphi \in \mathrm{bmoa}(\mathbb{D}^n)$. Таким образом, свойство (1.3) имеет место в силу теоремы о замкнутом графике. Доказательство теоремы 1 завершено.

Литература

1. P. Ahern and W. Rudin, *Bloch functions, BMO, and boundary zeros.* — Indiana Univ. Math. J. **36** (1987), No. 1, 131–148.
2. A. Baernstein, *Analytic functions of bounded mean oscillation*, Aspects of contemporary complex analysis (Proc. NATO Adv. Study Inst., Univ. Durham, Durham, 1979), Academic Press, London-New York, 1980, pp. 3–36.
3. S.-Y. A. Chang and R. Fefferman, *Some recent developments in Fourier analysis and H^p-theory on product domains.* — Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **12** (1985), No. 1, 1–43.
4. B. R. Choe, W. Ramey, and D. Ullrich, *Bloch-to-BMOA pullbacks on the disk.* — Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), No. 10, 2987–2996.

5. J. Cohen and F. Colonna, *Isometric composition operators on the Bloch space in the polydisk*, Banach spaces of analytic functions, Contemp. Math., vol. 454, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 9–21.
6. M. Cotlar and C. Sadosky, *Two distinguished subspaces of product BMO and Nehari-AAK theory for Hankel operators on the torus.* — Integral Equations Operator Theory **26** (1996), No. 3, 273–304.
7. E. Doubtsov, *Bloch-to-BMOA compositions on complex balls.* — Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), No. 12, 4217–4225.
8. R. Fefferman, *Bounded mean oscillation on the polydisk.* — Ann. of Math. (2) **110** (1979), No. 2, 395–406.
9. S. H. Ferguson and C. Sadosky, *Characterizations of bounded mean oscillation on the polydisk in terms of Hankel operators and Carleson measures.* — J. Anal. Math. **81** (2000), 239–267.
10. E. G. Kwon, *On analytic functions of Bergman BMO in the ball.* — Canad. Math. Bull. **42** (1999), No. 1, 97–103.
11. E. G. Kwon, *Hyperbolic g-function and Bloch pullback operators.* — J. Math. Anal. Appl. **309** (2005), No. 2, 626–637.
12. S. Makhmutov and M. Tjani, *Composition operators on some Möbius invariant Banach spaces.* — Bull. Austral. Math. Soc. **62** (2000), No. 1, 1–19.
13. W. Ramey and D. Ullrich, *Bounded mean oscillation of Bloch pull-backs.* — Math. Ann. **291** (1991), No. 4, 591–606.
14. W. Smith and R. Zhao, *Composition operators mapping into the Q_p spaces.* — Analysis **17** (1997), No. 2-3, 239–263.
15. R. M. Timoney, *Bloch functions in several complex variables. I.* — Bull. London Math. Soc. **12** (1980), No. 4, 241–267.
16. S. Yamashita, *Holomorphic functions of hyperbolically bounded mean oscillation.* — Boll. Un. Mat. Ital. B (6) **5** (1986), No. 3, 983–1000.
17. K. Zhu, *Spaces of holomorphic functions in the unit ball*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 226, Springer-Verlag, New York, 2005.

Dubtsov E. S. Composition operators between Bloch and BMOA spaces on polydisks.

Let φ be a holomorphic map between polydisks. We characterize those φ for which the composition operator $f \mapsto f\circ\varphi$ maps the Bloch space into the small BMOA space.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: dubtsov@pdmi.ras.ru

Поступило 25 июля 2016 г.