Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 447, 2016 г.

М. Ф. Гамаль

ЗАМЕТКИ О ГИПОТЕЗЕ КОРАЗМЕРНОСТИ ОБРАЗА ОДИН В ОПЕРАТОРНОЙ ТЕОРЕМЕ О КОРОНЕ

1. Введение

Пусть $\mathbb{D}$ – единичный круг, $\mathbb{T}$ – единичная окружность, $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_*$ – сепарабельные гильбертовы пространства. Пространство $H^\infty(\mathcal{E} \to \mathcal{E}_*)$ – это пространство ограниченных аналитических функций в $\mathbb{D}$, значения которых – это (линейные, ограниченные) операторы, действующие из $\mathcal{E}$ в $\mathcal{E}_*$. Если $F \in H^\infty(\mathcal{E} \to \mathcal{E}_*)$, то у F есть угловые граничные значения $F(\zeta)$ при п.в. $\zeta \in \mathbb{T}$ по мере Лебега m на $\mathbb{T}$. У каждой функции $F \in H^\infty(\mathcal{E} \to \mathcal{E}_*)$ есть внутренне-внешняя факторизация, то есть существуют вспомогательное гильбертово пространство $\mathcal{D}$ и функции $\Omega \in H^\infty(\mathcal{E} \to \mathcal{D})$ и $\Theta \in H^\infty(\mathcal{D} \to \mathcal{E}_*)$, такие что $F = \Theta\Omega$, Θ – внутренняя, то есть $\Theta(\zeta)$ – изометрия при п.в. $\zeta \in \mathbb{T}$, а Ω – внешняя. Мы не будем напоминать здесь определение внешней функции, отметим только, что для внешней функции Ω имеют место равенства $\operatorname{clos}\Omega(z)\mathcal{E} = \mathcal{D}$ при всех $z \in \mathbb{D}$ и при п.в. $z \in \mathbb{T}$. Напомним, что функция $F \in H^\infty(\mathcal{E} \to \mathcal{E}_*)$ называется $*$-внутренней ($*$-внешней), если функция $F_* \in H^\infty(\mathcal{E}_* \to \mathcal{E})$, $F_*(z) = F^*(\overline{z})$, $z \in \mathbb{D}$, – внутренняя (внешняя) (см. [16, гл. V], см. также [14, A.3.11.5]). Всякая аналитическая операторнозначная функция $F \in H^\infty(\mathcal{E} \to \mathcal{E}_*)$, такая что $\|F\| \leqslant 1$, представима в виде ортогональной суммы унитарной постоянной функции W и чистой функции F_0, то есть существуют разложения гильбертовых пространств $\mathcal{E} = \mathcal{E}' \oplus \mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_* = \mathcal{E}'_* \oplus \mathcal{E}_{*0}$ и унитарный оператор $W : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}'_*$, такие что $F(z)\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}'_*$, $F(z)|_{\mathcal{E}'} = W$, $F(z)\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_{*0}$, $F_0(z) = F(z)|_{\mathcal{E}_0}$ при всех $z \in \mathbb{D}$ и $\|F_0(0)x\| < \|x\|$ для любого $x \in \mathcal{E}_0$, $x \neq 0$ ([16, предложение V.2.1]). Во всех рассматриваемых в заметке вопросах можно считать, что $\|F\| \leqslant 1$ и функция F – чистая.

Операторная теорема о короне заключается в нахождении необходимых и достаточных условий для обратимости слева функции $F \in H^\infty(\mathcal{E} \to \mathcal{E}_*)$, то есть для того, чтобы существовала такая функция

Ключевые слова: операторная теорема о короне, сжатие, подобие изометрии.
Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант No. 14-01-00748-а.

$G \in H^\infty(\mathcal{E}_* \to \mathcal{E})$, что $G(z)F(z) = I_\mathcal{E}$ при всех $z \in \mathbb{D}$. Если функция $F \in H^\infty(\mathcal{E} \to \mathcal{E}_*)$ обратима слева, то существует такое число $\delta > 0$, что

$$\|F(z)x\| \geqslant \delta\|x\| \qquad \text{для всех} \ \ x \in \mathcal{E}. \tag{1.1}$$

Легко видеть, что если F удовлетворяет условию (1.1) и $F = \Theta\Omega$ – ее внутренне-внешняя факторизация, то внешняя функция Ω обратима, а внутренняя функция Θ удовлетворяет условию (1.1) (может быть, с другим δ).

Условие (1.1) достаточно для обратимости слева, если $\dim \mathcal{E} < \infty$ [19], но не достаточно в общем случае [20, 21]. Также условие (1.1) не достаточно для обратимости слева при дополнительном предположении

$$\dim \mathcal{E}_* \ominus F(z)\mathcal{E} = 1 \quad \text{при всех} \ \ z \in \mathbb{D}. \tag{1.2}$$

В работе [23] для каждого δ, $0 < \delta < 1/3$, построены функции F_1, $F_2 \in H^\infty(\mathcal{E} \to \mathcal{E}_*)$, такие что

$$1 \geqslant \|F_k(z)x\| \geqslant \delta\|x\| \qquad \text{для всех} \ \ x \in \mathcal{E}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{1.3}$$

для F_k выполнено (1.2), $k = 1, 2$, $F_1(\zeta)\mathcal{E} = \mathcal{E}_*$ при п.в. $\zeta \in \mathbb{T}$, $\dim \mathcal{E}_* \ominus F_2(\zeta)\mathcal{E} = 1$ при п.в. $\zeta \in \mathbb{T}$, но F_1, F_2 не обратимы слева. В работе [23] отмечено, что метод из работ [20, 21] позволяет построить примеры таких функций для $\delta < 1/\sqrt{2}$, и поставлен вопрос, верно ли, что для любого δ, $0 < \delta < 1$, существует функция $F \in H^\infty(\mathcal{E} \to \mathcal{E}_*)$, удовлетворяющая условиям (1.2) и (1.3), но не обратимая слева. В настоящей заметке показано, что для любого δ, $0 < \delta < 1$, такая функция F существует, и можно реализовать любой из следующих вариантов:

$$F(\zeta)\mathcal{E} = \mathcal{E}_* \quad \text{при п.в.} \ \ \zeta \in \mathbb{T}, \tag{1.4}$$

или

$$\dim \mathcal{E}_* \ominus F(\zeta)\mathcal{E} = 1 \quad \text{при п.в.} \ \ \zeta \in \mathbb{T}, \tag{1.5}$$

или

$$\dim \mathcal{E}_* \ominus F(\zeta)\mathcal{E} = 1 \quad \text{при п.в.} \ \ \zeta \in E, \quad \text{и} \quad F(\zeta)\mathcal{E} = \mathcal{E}_* \quad \text{при п.в.} \ \zeta \in \mathbb{T}\setminus E, \tag{1.6}$$

где $E \subset \mathbb{T}$ – замкнутое множество, удовлетворяющее условию Карлесона (определение напоминается в §5) и такое, что $0 < m(E) < 1$.

На самом деле в заметке строятся не операторнозначные функции, а сжатия, искомые функции будут характеристическими функциями этих сжатий [16, гл. VI], см. §3 настоящей заметки.

В работе [22] даны некоторые достаточные условия для обратимости функций слева, в частности, в [22] доказано, что если $F \in H^\infty(\mathcal{E} \to \mathcal{E}_*)$ удовлетворяет условию (1.1) и

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \|I_{\mathcal{E}} - F(z)^*F(z)\|_{\mathfrak{S}_1} < \infty, \tag{1.7}$$

где $\mathfrak{S}_1$ – класс ядерных операторов, то функция F обратима слева. В настоящей заметке показано, что условие (1.7) необходимо для обратимости слева функции F, если F – внутренняя и $\dim \mathcal{E}_* \ominus F(z)\mathcal{E} < \infty$ при некотором $z \in \mathbb{D}$. На самом деле соответствующий факт доказывается для сжатий с такой характеристической функцией, а утверждение для функций следует из этого факта для сжатий.

Функция $F \in H^\infty(\mathcal{E} \to \mathcal{E}_*)$ имеет левое скалярное кратное, если существуют функции $G \in H^\infty(\mathcal{E}_* \to \mathcal{E})$ и $\rho \in H^\infty$, где H^∞ – алгебра всех ограниченных аналитических функций в $\mathbb{D}$, такие что $\rho(z)I_{\mathcal{E}} = G(z)F(z)$ при всех $z \in \mathbb{D}$. Обратимость функции F слева означает, что F имеет левое скалярное кратное, обратимое в H^∞. У функций F_1 и F_2 из [23], о которых говорилось выше, нет левого скалярного кратного, доказательство этого практически такое же, как и доказательство того, что F_1 и F_2 не обратимы слева. В этой заметке показано, что наличие левого скалярного кратного у F вместе с условием (1.1) не достаточно для обратимости слева функции F, даже если F – внутренняя и удовлетворяет условию (1.2). В этом случае $I_{\mathcal{E}} - F(z)^*F(z) \in \mathfrak{S}_1$ при всех $z \in \mathbb{D}$, но $\sup_{z\in\mathbb{D}} \|I_{\mathcal{E}} - F(z)^*F(z)\|_{\mathfrak{S}_1} = \infty$. Опять же, строится подходящее сжатие, а F будет его характеристической функцией.

В работе используются следующие обозначения: $\mathbb{D}$ – открытый единичный круг, $\overline{\mathbb{D}}$ – замкнутый единичный круг, $\mathbb{T}$ – единичная окружность, m – нормализованная мера Лебега на $\mathbb{T}$, H^2 – пространство Харди в $\mathbb{D}$. Для натурального числа n, $1 \leqslant n < \infty$, пространства H^2_n и L^2_n – это ортогональные суммы n копий пространств H^2 и, соответственно, $L^2 = L^2(\mathbb{T}, m)$. Односторонний сдвиг S_n и двусторонний сдвиг U_n кратности n – это операторы умножения на независимую переменную в пространствах H^2_n и, соответственно, L^2_n. Для борелевского множества $\sigma \subset \mathbb{T}$ символом $U(\sigma)$ обозначается оператор умножения на независимую переменную в пространстве $L^2(\sigma, m)$ функций из L^2, равных нулю п.в. на $\mathbb{T} \setminus \sigma$.

Для гильбертова пространства $\mathcal{H}$ символами $I_{\mathcal{H}}$ и $\mathbb{O}_{\mathcal{H}}$ обозначаются тождественный и нулевой операторы в $\mathcal{H}$.

Пусть T и R – операторы в пространствах $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$, $X : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ – (линейный, ограниченный) оператор, сплетающий операторы T и R: $XT = RX$. Если X – унитарный, то T и R называются *унитарно эквивалентными*, обозначение: $T \cong R$. Если X обратим (то есть его обратный ограничен), то T и R называются *подобными*, обозначение: $T \approx R$. Если X – деформация, то есть $\ker X = \{0\}$ и $\operatorname{clos} X\mathcal{H} = \mathcal{K}$, то T называется *квазиаффинным преобразованием* оператора R, обозначение: $T \prec R$. Если $T \prec R$ и $R \prec T$, то T и R называются *квазиподобными*, обозначение: $T \sim R$.

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ – (линейный, ограниченный) оператор. T называется *сжатием*, если $\|T\| \leqslant 1$. Пусть T – сжатие в пространстве $\mathcal{H}$. T – сжатие *класса* $C_1.$ ($T \in C_{1\cdot}$), если $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\| > 0$ для любого $x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$, T – сжатие *класса* $C_{0\cdot}$ ($T \in C_{0\cdot}$), если $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\| = 0$ для всех $x \in \mathcal{H}$, и T – сжатие *класса* $C_{\cdot a}$, $a = 0, 1$, если T^* – сжатие класса $C_{a\cdot}$.

Легко видеть, что если сжатие T является квазиаффинным преобразованием изометрии, то T – сжатие класса $C_{1\cdot}$, а если T является квазиаффинным преобразованием одностороннего сдвига, то T – сжатие класса C_{10}.

Статья организована следующим образом. В §2 и §3 собраны известные факты о сжатиях, соотношениях сжатий с изометриями, и о характеристический функциях сжатий. В §4 доказано необходимое условие для того, чтобы сжатие было подобно изометрии с конечной кратностью. В качестве следствия получается необходимость условия (1.7) для обратимости слева некоторых операторнозначных функций. Главной частью заметки является §5, в котором для каждого δ, $0 < \delta < 1$, построены примеры субнормальных сжатий, таких что их характеристические функции удовлетворяют условиям (1.2) и (1.3) с δ, но не обратимы слева.

2. Изометрическая и унитарная асимптоты сжатия

Для сжатия T определены *изометрическая асимптота* $(X_{T,+}, T_+^{(a)})$ и *унитарная асимптота* $(X_T, T^{(a)})$, см., например, [16, гл. IX.1]. Существует несколько способов построения изометрической асимптоты сжатия, для наших целей удобно использовать описанный ниже, см. [11].

Пусть $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ – скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ – сжатие. Определим новое псевдо-скалярное произведение в $\mathcal{H}$ по формуле $\langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty}(T^n x, T^n y)$, где $x, y \in \mathcal{H}$. Положим $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_{T,0} = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, x\rangle = 0\}$. Тогда билинейная форма $\langle x + H_0, y + H_0\rangle = \langle x, y\rangle$ будет скалярным произведением в фактор-пространстве $\mathcal{H}/\mathcal{H}_0$. Обозначим через $\mathcal{H}_+^{(a)}$ гильбертово пространство, являющееся пополнением пространства $\mathcal{H}/\mathcal{H}_0$, и пусть $X_{T,+}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}_+^{(a)}$ – естественное вложение, $X_{T,+}x = x + \mathcal{H}_0$. Ясно, что $X_{T,+}$ – (линейный, ограниченный) оператор, и $\|X_{T,+}\| \leqslant 1$. Ясно также, что $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ для всех $x, y \in \mathcal{H}$. Поэтому $T_1 : x + \mathcal{H}_0 \mapsto Tx + \mathcal{H}_0$ – корректно определенная изометрия в $\mathcal{H}/\mathcal{H}_0$. Обозначим через $T_+^{(a)}$ непрерывное продолжение изометрии T_1 на пространство $\mathcal{H}_+^{(a)}$. Ясно, что $X_{T,+}T = T_+^{(a)}X_{T,+}$. Пара $(X_{T,+}, T_+^{(a)})$ называется *изометрической асимптотой* сжатия T. Оператор $X_{T,+}$ называется *каноническим сплетением.*

Сжатие T подобно изометрии V тогда и только тогда, когда $X_{T,+}$ – обратимый оператор, то есть $\ker X_{T,+} = \{0\}$ и $X_{T,+}\mathcal{H} = \mathcal{H}_+^{(a)}$, и в этом случае $V \cong T_+^{(a)}$ (см. [11, теорема 1]). В частности, если T – сжатие класса C_{10}, а $T_+^{(a)}$ – унитарный оператор, то сжатие T не подобно изометрии.

Обозначим через $T^{(a)}$ минимальное унитарное расширение изометрии $T_+^{(a)}$, через $\mathcal{H}^{(a)} \supset \mathcal{H}_+^{(a)}$ – пространство, в котором действует $T^{(a)}$, и через X_T – вложение пространства $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}^{(a)}$. Ясно, что $X_T T = T^{(a)}X_T$ и $X_{T,+}x = X_T x$ для всех $x \in \mathcal{H}$. Пара $(X_T, T^{(a)})$ называется *унитарной асимптотой* сжатия T.

3. Сжатия и их характеристические функции

Все утверждения этого параграфа хорошо известны и могут быть найдены в [16, гл. VI], см. также [14, гл. C.1].

Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, и $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ – сжатие. Сжатие называется *вполне неунитарным*, если оно не имеет таких инвариантных подпространств, что его сужения на эти подпространства являются унитарными операторами. Для сжатия T положим $\mathcal{D}_T = \operatorname{clos}(I_{\mathcal{H}} - T^*T)\mathcal{H}$. Легко видеть, что

$$\text{если} \quad x \in \mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T, \quad \text{то} \quad x = T^*Tx \quad \text{и} \quad \|Tx\| = \|x\|. \tag{3.1}$$

Также $T\mathcal{D}_T \subset \mathcal{D}_{T^*}$ и $T(\mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T) = \mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_{T^*}$ (см. [16, гл. I.3.1]), поэтому

$$\dim \mathcal{D}_{T^*} \ominus T\mathcal{D}_T = \dim \mathcal{H} \ominus T\mathcal{H}. \tag{3.2}$$

Так как $I_{\mathcal{H}} - T^*T = (I_{\mathcal{D}_T} - T^*T|_{\mathcal{D}_T}) \oplus \mathbb{O}_{\mathcal{H}\ominus\mathcal{D}_T}$, то

$$\|I_{\mathcal{H}} - T^*T\|_{\mathfrak{S}_1} = \|I_{\mathcal{D}_T} - T^*T|_{\mathcal{D}_T}\|_{\mathfrak{S}_1}. \tag{3.3}$$

Лемма 3.1. *Пусть $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ – сжатие, и $0 < \delta \leqslant 1$. Тогда $\|Tx\| \geqslant \delta\|x\|$ для всех $x \in \mathcal{H}$, если и только если $\|Tx\| \geqslant \delta\|x\|$ для всех $x \in \mathcal{D}_T$.*

Доказательство. Разумеется, нужно доказать только часть “если”. Пусть $x \in \mathcal{D}_T$ и $y \in \mathcal{H} \ominus \mathcal{D}_T$. Тогда по (3.1) $(Tx, Ty) = (x, T^*Ty) = (x, y) = 0$ и $\|Ty\| = \|y\| \geqslant \delta\|y\|$. Поэтому $\|T(x+y)\|^2 = \|Tx\|^2 + \|Ty\|^2 \geqslant \delta^2\|x\|^2 + \delta^2\|y\|^2 = \delta^2\|x+y\|^2$. □

Характеристическая функция Θ_T сжатия T – это аналитическая операторнозначная функция, действующая по формуле

$$\Theta_T(z) = \big(-T + z(I - TT^*)^{1/2}(I - zT^*)^{-1}(I - T^*T)^{1/2}|_{\mathcal{D}_T}\big), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{3.4}$$

Для каждого $z \in \mathbb{D}$ имеет место включение $\Theta_T(z)\mathcal{D}_T \subset \mathcal{D}_{T^*}$, отображение $z \mapsto \Theta_T(z)$ – это аналитическая функция из $\mathbb{D}$ в пространство всех (линейных, ограниченных) операторов, действующих из $\mathcal{D}_T$ в $\mathcal{D}_{T^*}$, и $\|\Theta_T(z)\| \leqslant 1$ при всех $z \in \mathbb{D}$. Другими словами, $\Theta_T \in H^\infty(\mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_{T^*})$, и $\|\Theta_T\| \leqslant 1$. Легко видеть, что функция Θ_T – чистая. Верно и обратное: для любой аналитической операторнозначной функции $F \in H^\infty(\mathcal{E} \to \mathcal{E}_*)$, такой что $\|F\| \leqslant 1$ и F – чистая, существует такое сжатие T, что $F = \Theta_T$ [16, гл. VI].

Следующая теорема доказана в [15], см. также [14, C.1.5.5].

Теорема A [15]**.** *Сжатие T подобно изометрии тогда и только тогда, когда его характеристическая функция Θ_T обратима слева.*

Пусть T – вполне неунитарное сжатие. Тогда T – сжатие класса $C_{1\cdot}$, если и только если Θ_T – $*$-внешняя, и T – сжатие класса $C_{\cdot 0}$, если и только если Θ_T – внутренняя [16, VI.3.5].

Напомним, что *спектральная кратность* оператора – это минимум размерностей его воспроизводящих подпространств. Оператор называется *циклическим*, если его (спектральная) кратность равна 1.

Следующая теорема доказана в [7, 10, 17, 24, 25].

Теорема B. *Пусть T – сжатие, и $1 \leqslant n < \infty$. Следующие условия эквивалентны*:

(1) $T \prec S_n$;

(2) *T – сжатие класса C_{10}, $\dim\ker T^* = n$, и $I - T^*T \in \mathfrak{S}_1$;*

(3) Θ_T – *внутренняя $*$-внешняя, Θ_T имеет левое скалярное кратное, и* $\dim \mathcal{D}_{T^*} \ominus \Theta_T(\lambda)\mathcal{D}_T = n$ *при некотором* $\lambda \in \mathbb{D}$.

Кроме того, если T – сжатие и $T \prec S_n$, $1 \leqslant n < \infty$, то следующие условия эквивалентны:

(4) $T \sim S_n$;

(5) *кратность сжатия T равна n*;

(6) Θ_T *имеет внешнее левое скалярное кратное.*

Замечание. Пусть T – сжатие и $T \prec S_n$, $1 \leqslant n < \infty$, тогда $b_\lambda(T)$ – сжатие и $b_\lambda(T) \prec b_\lambda(S_n) \cong S_n$, поэтому $I - b_\lambda(T)^* b_\lambda(T) \in \mathfrak{S}_1$ при всех $\lambda \in \mathbb{D}$, где $b_\lambda(T) = (T-\lambda)(I-\overline{\lambda}T)^{-1}$.

Пусть T – вполне неунитарное сжатие. Положим

$$\begin{aligned} \Delta_*(\zeta) &= (I_{\mathcal{D}_{T^*}} - \Theta_T(\zeta)\Theta_T(\zeta)^*)^{1/2}, \quad \zeta \in \mathbb{T}, \quad \text{и} \\ \omega_T &= \{\zeta \in \mathbb{T} : \Delta_*(\zeta) \neq \mathbb{O}\}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Тогда унитарная асимптота $T^{(a)}$ вполне неунитарного сжатия T унитарно эквивалентна оператору умножения на независимую переменную ζ в пространстве $\operatorname{clos} \Delta_* L^2(\mathcal{D}_{T^*})$. В частности, $T^{(a)}$ – циклический оператор тогда и только тогда, когда

$$\dim \Delta_*(\zeta)\mathcal{D}_{T^*} \leqslant 1 \quad \text{при п.в.} \ \ \zeta \in \mathbb{T}, \tag{3.6}$$

и в этом случае $T^{(a)} \cong U(\omega_T)$ (см. [16, гл. IX.2]). Также, если функция Θ_T – внутренняя и выполняется неравенство (3.6), то

$$\begin{aligned} \omega_T &= \{\zeta \in \mathbb{T} : \ \dim \mathcal{D}_{T^*} \ominus \Theta(\zeta)\mathcal{D}_T = 1\} \quad \text{и} \\ \mathbb{T} \setminus \omega_T &= \{\zeta \in \mathbb{T} : \ \Theta(\zeta)\mathcal{D}_T = \mathcal{D}_{T^*}\}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Для $\lambda \in \mathbb{D}$ положим $b_\lambda(z) = \frac{z-\lambda}{1-\overline{\lambda}z}$, $z \in \mathbb{D}$. Тогда $b_\lambda(T) = (T-\lambda)(I-\overline{\lambda}T)^{-1}$ – сжатие. Для любого $\lambda \in \mathbb{D}$ существуют унитарные операторы

$$V_\lambda \colon \mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_{b_\lambda(T)} \quad \text{и} \quad V_{\lambda *} \colon \mathcal{D}_{b_\lambda(T)^*} \to \mathcal{D}_{T^*},$$

такие что

$$V_{\lambda *}\Theta_{b_\lambda(T)}(z)V_\lambda = \Theta_T(b_{-\lambda}(z)). \tag{3.8}$$

Полагая в (3.4) и (3.8) $z = 0$, заключаем, что

$$\Theta_T(\lambda) = -V_{\lambda *} b_\lambda(T) V_\lambda \quad \text{при всех} \ \ \lambda \in \mathbb{D} \tag{3.9}$$

([16, гл. VI.1.3]).

Следующая лемма – это непосредственное следствие соотношений (3.2), (3.3), (3.9) и леммы 3.1.

Лемма 3.2. *Пусть $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ – вполне неунитарное сжатие.*

(i) Пусть $0 < \delta \leqslant 1$. Тогда $\|\Theta_T(\lambda)x\| \geqslant \delta\|x\|$ для всех $x \in \mathcal{D}_T$ и $\lambda \in \mathbb{D}$, если и только если $\|b_\lambda(T)x\| \geqslant \delta\|x\|$ для всех $x \in \mathcal{H}$ и $\lambda \in \mathbb{D}$.

(ii) $\dim \mathcal{D}_{T^*} \ominus \Theta_T(\lambda)\mathcal{D}_T = \dim \mathcal{H} \ominus b_\lambda(T)\mathcal{H}$ для всех $\lambda \in \mathbb{D}$.

(iii) $\|I_{\mathcal{D}_T} - \Theta_T^*(\lambda)\Theta_T(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_1} = \|I_{\mathcal{H}} - b_\lambda(T)^* b_\lambda(T)\|_{\mathfrak{S}_1}$ для всех $\lambda \in \mathbb{D}$.

4. О сжатиях, подобных изометрии

Следующая теорема фактически доказана в [7].

Теорема 4.1. *Пусть T – сжатие, его спектральная кратность конечна, и сжатие T подобно изометрии. Тогда*

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{D}} \|I - b_\lambda(T)^* b_\lambda(T)\|_{\mathfrak{S}_1} < \infty. \tag{4.1}$$

Доказательство. Как и в доказательстве [7, теорема 2.1], можно предположить, что существуют неотрицательные целые числа k, ℓ, $0 \leqslant k, \ell < \infty$, и самосопряженный обратимый оператор B, такой, что $BV = TB$, где $V = S_k \oplus U_\ell$. Положим $A = B^2$. Из равенства $Bb_\lambda(V) = b_\lambda(T)B$ следует, что $I - b_\lambda(T)^* b_\lambda(T) = B^{-1}(A - b_\lambda(V)^* A b_\lambda(V))B^{-1}$, и

$$\|I - b_\lambda(T)^* b_\lambda(T)\|_{\mathfrak{S}_1} \leqslant \|B^{-1}\|^2 \|A - b_\lambda(V)^* A b_\lambda(V)\|_{\mathfrak{S}_1} \tag{4.2}$$

для всех $\lambda \in \mathbb{D}$. Так как $\|b_\lambda(T)\| \leqslant 1$ для всех $\lambda \in \mathbb{D}$, то оператор $A - b_\lambda(V)^* A b_\lambda(V)$ – положительный (см. доказательство [7, теорема 2.1]). Поэтому

$$\|A - b_\lambda(V)^* A b_\lambda(V)\|_{\mathfrak{S}_1} = \sum_n \big((A - b_\lambda(V)^* A b_\lambda(V))x_n, x_n\big) \tag{4.3}$$

для любого ортонормированного базиса $\{x_n\}_n$ пространства $\mathcal{K} = H^2_k \oplus L^2_\ell$, в котором действуют V и A (см., например, [6, гл. I.1]).

Пусть $\lambda \in \mathbb{D}$ фиксировано. Так как $b_\lambda(V) \cong V = S_k \oplus U_\ell$, то существует ортонормированный базис

$$\chi_\lambda = \big\{\ \{h_{\lambda in}\}_{n=0}^\infty,\ \ i = 1, \dots, k, \quad \{f_{\lambda jn}\}_{n=-\infty}^\infty,\ \ j = 1, \dots, \ell\ \big\}$$

пространства $\mathcal{K}$, такой что

$$b_\lambda(V)h_{\lambda in} = h_{\lambda,i,n+1},\ \ n = 0, 1, \dots,\ i = 1, \dots, k,$$
$$b_\lambda(V)f_{\lambda jn} = f_{\lambda,j,n+1},\ \ n = \dots, -1, 0, 1, \dots,\ j = 1, \dots, \ell.$$

Положим

$$a_{\lambda in} = (Ah_{\lambda in}, h_{\lambda in}),\ \ n = 0, 1, \dots,\ i = 1, \dots, k,$$

и

$$b_{\lambda jn} = (Af_{\lambda jn}, f_{\lambda jn}), \quad n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \; j = 1, \ldots, \ell.$$

Имеем $0 \leqslant a_{\lambda in} \leqslant \|A\|$, $0 \leqslant b_{\lambda jn} \leqslant \|A\|$,

$$a_{\lambda in} - a_{\lambda,i,n+1} = \big((A - b_\lambda(V)^* A b_\lambda(V)) h_{\lambda in}, h_{\lambda in}\big) \geqslant 0$$

и

$$b_{\lambda jn} - b_{\lambda,j,n+1} = \big((A - b_\lambda(V)^* A b_\lambda(V)) f_{\lambda jn}, f_{\lambda jn}\big) \geqslant 0,$$

поэтому последовательности $\{a_{\lambda in}\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{b_{\lambda jn}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ – ограниченные и невозрастающие. Положим

$$a_{\lambda i} = \lim_{n\to\infty} a_{\lambda in}, \quad i = 1, \ldots, k,$$

$$b_{\lambda j+} = \lim_{n\to\infty} b_{\lambda jn} \quad \text{и} \quad b_{\lambda j-} = \lim_{n\to-\infty} b_{\lambda jn}, \quad j = 1, \ldots, \ell.$$

Применяя (4.3) к ортонормированному базису χ_λ, получаем:

$$\begin{aligned} &\|A - b_\lambda(V)^* A b_\lambda(V)\|_{\mathfrak{S}_1} \\ &\quad = \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty}(a_{\lambda in} - a_{\lambda,i,n+1}) + \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(b_{\lambda jn} - b_{\lambda,j,n+1}) \\ &\quad\quad = \sum_{i=1}^{k}(a_{\lambda i0} - a_{\lambda i}) + \sum_{j=1}^{\ell}(b_{\lambda j-} - b_{\lambda j+}) \leqslant (k+\ell)\|A\|. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Заключение теоремы следует из оценок (4.2) и (4.4). □

Следствие 4.2. *Пусть $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_*$ – гильбертовы пространства, $F \in H^\infty(\mathcal{E} \to \mathcal{E}_*)$ – внутренняя функция и $\dim \mathcal{E}_* \ominus F(\lambda)\mathcal{E} < \infty$ при некотором $\lambda \in \mathbb{D}$. Если F обратима слева, то для F выполняется* (1.7).

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, и $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ – сжатие, такое что $\Theta_T = F$, где Θ_T – характеристическая функция сжатия T (см. [16, гл. VI.3]). Так как F – внутренняя, то $T \in C_{\cdot 0}$, см. [16, VI.3.5]. По лемме 3.2(ii)

$$\dim \mathcal{H} \ominus b_\lambda(T)\mathcal{H} = \dim \mathcal{E}_* \ominus F(\lambda)\mathcal{E} < \infty.$$

Теперь предположим, что F обратима слева. Тогда, по теореме A, существует гильбертово пространство $\mathcal{K}$ и изометрия $V\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, такие что $T \approx V$. Так как $T \in C_{\cdot 0}$, то V – односторонний сдвиг, и кратность сдвига V равна

$$\dim \mathcal{K} \ominus b_\lambda(V)\mathcal{K} = \dim \mathcal{H} \ominus b_\lambda(T)\mathcal{H} < \infty.$$

По теореме 4.1 для T выполняется (4.1). По лемме 3.2(iii) для F выполняется (1.7). $\square$

5. Субнормальные сжатия

В этом параграфе рассматриваются субнормальные операторы, они изучались многими авторами, читатель может консультироваться с книгой [6].

Пусть ν – положительная конечная борелевская мера в замкнутом единичном круге $\overline{\mathbb{D}}$. Символом $P^2(\nu)$ обозначается замыкание аналитических многочленов в пространстве $L^2(\nu)$, а символом S_ν – оператор умножения на независимую переменную в $P^2(\nu)$, то есть

$$S_\nu : P^2(\nu) \to P^2(\nu), \quad (S_\nu f)(z) = zf(z), \quad f \in P^2(\nu), \quad z \in \overline{\mathbb{D}}.$$

Ясно, что S_ν – сжатие.

Напомним, что символом m обозначается мера Лебега на окружности $\mathbb{T}$. Если $\nu = m$, то S_ν – это односторонний сдвиг кратности 1, в этом параграфе он обозначается символом S.

Следующая лемма является непосредственным следствием построения изометрической асимптоты сжатия из [11], см. §2 настоящей заметки, поэтому ее доказательство опускается.

Лемма 5.1. *Пусть ν – положительная конечная борелевская мера в $\overline{\mathbb{D}}$, $\mathcal{H} = P^2(\nu)$ и $T = S_\nu$. Тогда $\mathcal{H}_{T,0} = \{f \in P^2(\nu) : \ f = 0$ п.в. на $\mathbb{T}$ по $\nu\}$, $\mathcal{H}_+^{(a)} = P^2(\nu|_{\mathbb{T}})$,*

$$X_{T,+} \colon P^2(\nu) \to P^2(\nu|_{\mathbb{T}}), \quad X_{T,+} f = f|_{\mathbb{T}}, \quad f \in P^2(\nu),$$

– естественное вложение, и $T_+^{(a)} = S_{\nu|_{\mathbb{T}}}$.

Доказательство следующей леммы очевидно и опускается.

Лемма 5.2. *Пусть ν – положительная конечная борелевская мера в $\overline{\mathbb{D}}$ и $f \in P^2(\nu)$. Тогда существует точка $\lambda \in \mathbb{D}$, такая что $\|b_\lambda f\| = \|f\|$, если и только если $f(z) = 0$ при п.в. $z \in \mathbb{D}$ по ν.*

Следствие 5.3. *Пусть ν – положительная конечная борелевская мера в $\overline{\mathbb{D}}$ и $\lambda \in \mathbb{D}$. Тогда*

$$P^2(\nu) \ominus \mathcal{D}_{b_\lambda(S_\nu)} \subset \{f \in P^2(\nu) : \ f(z) = 0 \ \text{ при } \ \nu\text{-п.в. } z \in \mathbb{D}\}$$

и

$$P^2(\nu) \ominus \mathcal{D}_{b_\lambda(S_\nu)^*} \subset \{f \in P^2(\nu) : \ f(z) = 0 \ \text{ при } \ \nu\text{-п.в. } z \in \mathbb{D}\}.$$

Доказательство. Пусть $P_+ : L^2(\nu) \to P^2(\nu)$ – ортогональный проектор. Легко видеть, что $(b_\lambda(S_\nu)f)(z) = b_\lambda(z)f(z)$ при п.в. $z \in \overline{\mathbb{D}}$ по ν и $b_\lambda(S_\nu)^* f = P_+(\overline{b}_\lambda f)$, $f \in P^2(\nu)$. Если $f \in P^2(\nu) \ominus \mathcal{D}_{b_\lambda(S_\nu)}$, то по (3.1) $\|f\| = \|b_\lambda f\|$, и по лемме 5.2 $f(z) = 0$ при п.в. $z \in \mathbb{D}$ по ν. Если $f \in P^2(\nu) \ominus \mathcal{D}_{b_\lambda(S_\nu)^*}$, то по (3.1) $\|f\| = \|P_+(\overline{b}_\lambda f)\| \leqslant \|\overline{b}_\lambda f\| = \|b_\lambda f\|$, и по лемме 5.2 $f(z) = 0$ при п.в. $z \in \mathbb{D}$ по ν. $\square$

Обозначим символом m_2 нормализованную меру Лебега в единичном круге $\mathbb{D}$, для $-1 < \alpha < \infty$ положим

$$\mathrm{d}A_\alpha(z) = (\alpha + 1)(1 - |z|^2)^\alpha \mathrm{d}m_2(z).$$

Хорошо известно, что пространство Бергмана $P^2(A_\alpha)$ имеет следующие свойства: $f \in P^2(A_\alpha)$, если и только если f – аналитическая функция в $\mathbb{D}$ и $f \in L^2(A_\alpha)$, функционал $f \mapsto f(z)$ ограничен на $P^2(A_\alpha)$ при каждом $z \in \mathbb{D}$, и существует константа $C_\alpha > 0$ (зависящая от α), такая что

$$|f(z)| \leqslant C_\alpha \frac{\|f\|_{P^2(A_\alpha)}}{(1 - |z|^2)^{1+\alpha/2}}, \quad z \in \mathbb{D} \tag{5.1}$$

(см., например, [9, гл. 1.1 и 1.2]). Легко видеть, что $S_{A_\alpha} \in C_{00}$.

Следующее утверждение – это лемма 4.2 из работы [3].

Лемма 5.4 [3]. *Пусть $-1 < \alpha < \infty$. Тогда для любой функции $f \in P^2(A_\alpha)$ и точки $\lambda \in \mathbb{D}$ справедливо неравенство*

$$\int_{\mathbb{D}} |b_\lambda f|^2 \mathrm{d}A_\alpha \geqslant \frac{1}{\alpha + 2} \int_{\mathbb{D}} |f|^2 \mathrm{d}A_\alpha.$$

Следствие 5.5. *Пусть $-1 < \alpha < \infty$ и μ – положительная конечная борелевская мера на $\mathbb{T}$. Тогда для любой функции $f \in P^2(A_\alpha + \mu)$ и точки $\lambda \in \mathbb{D}$ имеем*

$$\int_{\overline{\mathbb{D}}} |b_\lambda f|^2 \mathrm{d}(A_\alpha + \mu) \geqslant \frac{1}{\alpha + 2} \int_{\overline{\mathbb{D}}} |f|^2 \mathrm{d}(A_\alpha + \mu).$$

Доказательство. Ясно, что $P^2(A_\alpha+\mu)\subset P^2(A_\alpha)$. Пусть $f\in P^2(A_\alpha+\mu)$ и $\lambda\in\mathbb{D}$. Имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\overline{\mathbb{D}}}|b_\lambda f|^2\mathrm{d}(A_\alpha+\mu)&=\int\limits_{\mathbb{D}}|b_\lambda f|^2\mathrm{d}A_\alpha+\int\limits_{\mathbb{T}}|b_\lambda f|^2\mathrm{d}\mu\\&\geqslant\frac{1}{\alpha+2}\int\limits_{\mathbb{D}}|f|^2\mathrm{d}A_\alpha+\int\limits_{\mathbb{T}}|f|^2\mathrm{d}\mu\\&\geqslant\frac{1}{\alpha+2}\int\limits_{\overline{\mathbb{D}}}|f|^2\mathrm{d}(A_\alpha+\mu),\end{aligned}$$

так как $|b_\lambda|=1$ на $\mathbb{T}$ и $1>1/(\alpha+2)$ при $-1<\alpha<\infty$. □

Напомним определение.

Определение. *Пусть E – замкнутое подмножество окружности $\mathbb{T}$, и пусть $\{J_k\}_k$ – семейство открытых дуг окружности $\mathbb{T}$, такое что $J_k\cap J_\ell=\emptyset$ при $k\neq\ell$ и $\mathbb{T}=E\cup\bigcup_k J_k$. Множество E удовлетворяет условию Карлесона, если $\sum\limits_k m(J_k)\log m(J_k)>-\infty$.*

Пусть $w\in L^1(\mathbb{T},m)$, $w\geqslant 0$ п.в. на $\mathbb{T}$. Тогда $P^2(wm)=L^2(wm)$, если и только если $\log w\notin L^1(\mathbb{T},m)$, и тогда $S_{wm}\cong U(\sigma)$, где $\sigma\subset\mathbb{T}$ – измеримое множество, такое что wm и $m|_\sigma$ взаимно абсолютно непрерывны. Если $\log w\in L^1(\mathbb{T},m)$, то существует внешняя функция $\psi\in H^2$, такая что $|\psi|^2=w$ п.в. на $\mathbb{T}$. Тогда

$$P^2(wm)=\frac{H^2}{\psi}=\Big\{\frac{h}{\psi}:\ h\in H^2\Big\},$$
$$\Big\|\frac{h}{\psi}\Big\|_{P^2(wm)}=\|h\|_{H^2},\ h\in H^2,\quad\text{и}\quad S_{wm}\cong S \tag{5.2}$$

(см., например, [6, гл. III.12] или [14, A.4.1.5]).

В теоремах 5.6 и 5.7 рассматриваются угловые граничные значения функций из $P^2(\mu)$ для некоторых мер μ. Отметим, что угловые граничные значения функций из $P^t(\mu)$ при $1\leqslant t<\infty$ рассматриваются в [4] в связи с другими вопросами, см. также ссылки там на результаты, близкие к теоремам 5.6 и 5.7, особенно [1,12,13,18], а также [2]. Теорема 5.6 и главная часть теоремы 5.7 доказаны в [8, §2] при $\alpha=0$, но доказательство то же самое и в случае $-1<\alpha\leqslant 0$ (потому что оценка (5.1) влечет оценку $|f(z)| \leqslant C_\alpha \frac{\|f\|_{P^2(A_\alpha)}}{1-|z|^2}$ при $-1 < \alpha \leqslant 0$, используемую в [8, §2]), поэтому доказательства теоремы 5.6 и главной части теоремы 5.7 опускаются. Также для доказательства теорем 5.6 и 5.7 применяется понятие изометрической асимптоты (см. §2 настоящей заметки и ссылки там).

Теорема 5.6 [8]. *Пусть $-1 < \alpha \leqslant 0$, а $E \subset \mathbb{T}$ – замкнутое множество, удовлетворяющее условию Карлесона и такое, что $0 < m(E) < 1$. Тогда функционал $f \mapsto f(z)$ ограничен на $P^2(A_\alpha + m|_E)$ при каждом $z \in \mathbb{D}$, для функции $f \in P^2(A_\alpha + m|_E)$ ее сужение $f|_\mathbb{D}$ – аналитическая функция в $\mathbb{D}$ и $f|_\mathbb{D}$ имеет угловые граничные значения п.в. на E по m, совпадающие с $f|_E$. Поэтому $S_{A_\alpha+m|_E} \in C_{10}$. Также $I - S^*_{A_\alpha+m|_E} S_{A_\alpha+m|_E}$ – компактный оператор и $(S_{A_\alpha+m|_E})^{(a)}_+ = U(E)$. Поэтому сжатие $S_{A_\alpha+m|_E}$ не подобно изометрии.*

Теорема 5.7 [8]. *Пусть $-1 < \alpha \leqslant 0$, $w \in L^1(\mathbb{T}, m)$, и для любой замкнутой дуги $J \subset \mathbb{T} \setminus \{1\}$ существуют константы $0 < c_J < C_J < \infty$, такие что $c_J \leqslant w \leqslant C_J$ п.в. на J по m. Тогда функционал $f \mapsto f(z)$ ограничен на $P^2(A_\alpha + wm)$ при каждом $z \in \mathbb{D}$, для функции $f \in P^2(A_\alpha + wm)$ ее сужение $f|_\mathbb{D}$ – аналитическая функция в $\mathbb{D}$, $f|_\mathbb{D}$ имеет угловые граничные значения п.в. на $\mathbb{T}$ по m, совпадающие с $f|_\mathbb{T}$. Поэтому $S_{A_\alpha+wm} \in C_{10}$. Также $I - S^*_{A_\alpha+wm} S_{A_\alpha+wm}$ – компактный оператор, $(S_{A_\alpha+wm})^{(a)}_+ = S_{wm}$, и каноническое сплетение сжатия $S_{A_\alpha+wm}$ с S_{wm} – это естественное вложение*

$$P^2(A_\alpha + wm) \to P^2(wm), \quad f \mapsto f|_\mathbb{T}, \ f \in P^2(A_\alpha + wm).$$

Поэтому

(i) *$S_{A_\alpha+wm} \sim S$, если и только если $\log w \in L^1(\mathbb{T}, m)$;*

(ii) *сжатие $S_{A_\alpha+wm}$ подобно изометрии, если и только если $S_{A_\alpha+wm} \approx S$;*

(iii) *$S_{A_\alpha+wm} \approx S$, если и только если $\log w \in L^1(\mathbb{T}, m)$ и для любой функции $h \in H^2$ существует функция $f \in P^2(A_\alpha + wm)$, такая что $f|_\mathbb{T} = h/\psi$ п.в. на $\mathbb{T}$ по m, где $\psi \in H^2$ – внешняя функция, такая что $|\psi|^2 = w$ п.в. на $\mathbb{T}$.*

Замечание. Пусть в условиях теоремы 5.7 $h, \psi \in H^2$, $\psi(z) \neq 0$ при всех $z \in \mathbb{D}$, $f \in P^2(A_\alpha + wm)$ и $f|_\mathbb{T} = h/\psi$ п.в. на $\mathbb{T}$ по m. Тогда $f(z) = h(z)/\psi(z)$ при всех $z \in \mathbb{D}$. В самом деле, положим $g(z) = h(z)/\psi(z)$, $z \in \mathbb{D}$. Тогда g – аналитическая функция в $\mathbb{D}$ и g имеет угловые граничные значения $h(\zeta)/\psi(\zeta)$ при п.в. $\zeta \in \mathbb{T}$. Тогда $f-g$ – аналитическая функция в $\mathbb{D}$ и $f-g$ имеет равные нулю угловые граничные значения п.в. на $\mathbb{T}$. По теореме Привалова (см., например, [5, теорема 8.1]), $f(z)=g(z)$ при всех $z \in \mathbb{D}$. Поэтому если выполнены условия (iii) теоремы 5.7, то имеет место равенство $P^2(A_\alpha + wm) = H^2/\psi$ для множеств, и нормы этих пространств эквивалентны.

Доказательство теоремы 5.7. Главная часть теоремы 5.7 доказана в [8, §2]. Обозначим символом X вложение,

$$X\colon P^2(A_\alpha + wm) \to P^2(wm), \quad Xf = f|_{\mathbb{T}}, \quad f \in P^2(A_\alpha + wm).$$

Тогда $XS_{A_\alpha+wm} = S_{wm}X$. Так как $S_{A_\alpha+wm} \in C_{1\cdot}$, то $\ker X = \{0\}$, поэтому X – это деформация, реализующая соотношение $S_{A_\alpha+wm} \prec S_{wm}$. Если $\log w \in L^1(\mathbb{T}, m)$, то $S_{wm} \cong S$, поэтому $S_{A_\alpha+wm} \prec S$. Так как $S_{A_\alpha+wm}$ – циклическое сжатие, то $S_{A_\alpha+wm} \sim S$ по теореме B(5). Часть "если" утверждения (i) доказана.

Предположения части "если" утверждения (iii) означают, что $XP^2(A_\alpha+wm) = P^2(wm)$, см. (5.2). Таким образом, X реализует соотношение $S_{A_\alpha+wm} \approx S_{wm}$, и так как $S_{wm} \cong S$, соотношение $S_{A_\alpha+wm} \approx S$ доказано.

Теперь предположим, что $S_{A_\alpha+wm} \approx V$, где V – изометрия. Тогда, по [11, теорема 1] (см. §2 настоящей заметки), $XP^2(A_\alpha + wm) = P^2(wm)$ и $V \cong S_{wm}$. Так как $S_{A_\alpha+wm} \in C_{10}$, то $S_{wm} \in C_{10}$. По [14, A.4.1.5] (см. описание оператора S_{wm} перед соотношениями (5.2) настоящей заметки), $\log w \in L^1(\mathbb{T}, m)$ и $S_{wm} \cong S$. Части (ii) и (iii) доказаны.

Теперь предположим, что $S_{A_\alpha+wm} \sim S$. По теореме 1 из [11] (см. также [16, гл. IX.1]), существует оператор $Y\colon P^2(wm) \to H^2$, такой что $YS_{wm} = SY$ и $\operatorname{clos} YP^2(wm) = H^2$. Если $\log w \notin L^1(\mathbb{T}, m)$, то S_{wm} – унитарный оператор, и из соотношений $Y^*S^* = S_{wm}^*Y^*$ и $\ker Y^* = \{0\}$ заключаем, что $S^* \in C_{1\cdot}$ – противоречие. Поэтому $\log w \in L^1(\mathbb{T}, m)$. Часть "только если" утверждения (i) доказана. $\square$

Следующая лемма – это вариант теоремы 1.7 из [9].

Лемма 5.8. *Пусть $-1 < \alpha < \infty$ и $\beta \in \mathbb{R}$. Положим $\varphi_\beta(z) = 1/(1-z)^\beta$, $z \in \mathbb{D}$. Тогда $\varphi_\beta \in H^2$, если и только если $\beta < 1/2$, и $\varphi_\beta \in P^2(A_\alpha)$, если и только если $\beta < 1 + \alpha/2$.*

Доказательство. Положим $v_n = 2(\alpha+1)\int_0^1 r^{2n+1}(1-r^2)^\alpha \mathrm{d}r$, $n \geqslant 0$. Тогда $v_n = \frac{n!\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+n+2)}$, где Γ – гамма-функция, и для любой аналитической в $\mathbb{D}$ функции f имеем

$$\int_{\mathbb{D}} |f|^2 \mathrm{d}A_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 v_n.$$

Если $\beta \leqslant 0$, то $\varphi_\beta \in P^2(A_\alpha)$ для любого α, $-1 < \alpha < \infty$. Пусть $\beta > 0$. Так как $\widehat{\varphi}_\beta(n) = \frac{\Gamma(\beta+n)}{n!\Gamma(\beta)}$, $n \geqslant 0$, то $\varphi_\beta \in P^2(A_\alpha)$ тогда и только тогда, когда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+n)^2}{n!\Gamma(\alpha+n+2)}$ сходится. По формуле Стирлинга

$$\frac{\Gamma(\beta+n)^2}{n!\Gamma(\alpha+n+2)} \sim (n+1)^{2\beta-\alpha-3} \quad \text{при} \ \ n \to \infty.$$

Поэтому ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+n)^2}{n!\Gamma(\alpha+n+2)}$ сходится тогда и только тогда, когда $\beta < 1 + \alpha/2$.

Первое утверждение леммы доказывается аналогично. □

Лемма 5.9. *Пусть $-1 < \alpha \leqslant 0$ и $\beta < -1-\alpha$. Тогда $S_{A_\alpha + |\varphi_\beta| m} \sim S$, но сжатие $S_{A_\alpha + |\varphi_\beta| m}$ не подобно изометрии.*

Доказательство. Так как $\beta < 0$, то $\log|\varphi_\beta| \in L^1(\mathbb{T}, m)$. По теореме 5.7(i), $S_{A_\alpha + |\varphi_\beta| m} \sim S$. Положим $\psi = \varphi_{\beta/2}$. Ясно, что $|\psi|^2 = |\varphi_\beta|$. Из соотношений (5.2) заключаем, что $P^2(|\varphi_\beta| m) = H^2/\psi$. Из теоремы 5.7(iii) следует, что если сжатие $S_{A_\alpha + |\varphi_\beta| m}$ подобно изометрии, то $H^2/\psi = P^2(A_\alpha + |\varphi_\beta| m) \subset P^2(A_\alpha)$. Возьмем γ, $1 + \alpha/2 + \beta/2 \leqslant \gamma < 1/2$. Положим $h = \varphi_\gamma$. Тогда $h \in H^2$ и $h/\psi = \varphi_{\gamma-\beta/2} \notin P^2(A_\alpha)$ по лемме 5.8. Поэтому сжатие $S_{A_\alpha + |\varphi_\beta| m}$ не подобно изометрии. □

Следствие 5.10. *Пусть $0 < \delta < 1$, а $E \subset \mathbb{T}$ – замкнутое множество, удовлетворяющее условию Карлесона и такое, что $0 < m(E) < 1$. Тогда существуют операторнозначные функции F_k, такие что F_k удовлетворяют условию* (1.2)*, условию* (1.3) *с δ, и F_k не обратимы слева, $k = 1, 2, 3$. Также F_1, F_2, F_3 удовлетворяют условиям* (1.4), (1.6), (1.5)*, соответственно, F_3 имеет внешнее левое скалярное кратное и $I - F_3(z)^* F_3(z) \in \mathfrak{S}_1$ при всех $z \in \mathbb{D}$.*

Замечание. Так как функция F_3 не обратима слева, то F_3 не удовлетворяет условию (1.7), см. [22].

Доказательство следствия 5.10. Положим $\alpha = 1/\max(\delta^2, 1/2) - 2$, тогда $-1 < \alpha \leqslant 0$. Возьмем $\beta < -1 - \alpha$. Положим

$$\mathcal{H}_1 = P^2(A_\alpha), \quad \mathcal{H}_2 = P^2(A_\alpha + m|_E), \quad \mathcal{H}_3 = P^2(A_\alpha + |\varphi_\beta| m),$$
$$T_1 = S_{A_\alpha}, \quad T_2 = S_{A_\alpha + m|_E}, \quad T_3 = S_{A_\alpha + |\varphi_\beta| m}.$$

Ясно, что T_k – циклические сжатия, $k = 1, 2, 3$, $T_1 \in C_{00}$, и $T_k \in C_{10}$ по теоремам 5.6 и 5.7, $k = 2, 3$. По следствию 5.5 имеем

$$\|b_\lambda(T_k) f\|^2 \geqslant \delta^2 \|f\|^2 \quad \text{для всех} \quad \lambda \in \mathbb{D}, \quad f \in \mathcal{H}_k, \quad k = 1, 2, 3. \tag{5.3}$$

По теоремам 5.6 и 5.7 функционал

$$f \mapsto f(z), \quad \mathcal{H}_k \to \mathbb{C},$$

ограничен при каждом $z \in \mathbb{D}$, $k = 1, 2, 3$. Поэтому

$$\dim \mathcal{H}_k \ominus b_\lambda(T_k)\mathcal{H}_k = 1 \quad \text{для всех} \quad \lambda \in \mathbb{D}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{5.4}$$

В самом деле, пусть k фиксировано и $\lambda \in \mathbb{D}$. Тогда существует функция $g_\lambda \in \mathcal{H}_k$, такая что $f(\lambda) = (f, g_\lambda)$ для всех $f \in \mathcal{H}_k$. Так как $(b_\lambda(T_k) f)(z) = b_\lambda(z) f(z)$ при всех $z \in \mathbb{D}$, $f \in \mathcal{H}_k$, ясно, что $g_\lambda \in \mathcal{H}_k \ominus b_\lambda(T_k)\mathcal{H}_k$. Так как оператор T_k циклический, то оператор $T_k - \lambda I$ тоже циклический, поэтому $\dim \mathcal{H}_k \ominus b_\lambda(T_k)\mathcal{H}_k = \dim \mathcal{H}_k \ominus (T_k - \lambda I)\mathcal{H}_k \leqslant 1$. Равенство (5.4) доказано.

Найдем унитарные асимптоты сжатий T_k, $k = 1, 2, 3$, см. §2 настоящей заметки и ссылки там. Так как $T_1 \in C_{00}$, то $T_1^{(a)} = \mathbb{O}$. По теореме 5.6 $T_2^{(a)} = U(E)$. По лемме 5.9 $T_3 \sim S$, поэтому $T_3^{(a)} = U(\mathbb{T})$, где $U(\mathbb{T})$ – двусторонний сдвиг кратности 1. Так как $T^{(a)} \cong U(\omega_T)$ для любого циклического вполне неунитарного сжатия T, где множество ω_T определено в (3.5), заключаем, что

$$\omega_{T_1} = \varnothing, \quad \omega_{T_2} = E, \quad \omega_{T_3} = \mathbb{T}. \tag{5.5}$$

Также сжатие T_1 не подобно изометрии, потому что $T_1 \in C_{00}$, а сжатия T_2 и T_3 не подобны изометриям по теореме 5.6 и, соответственно, лемме 5.9.

Положим $F_k = \Theta_{T_k}$, то есть F_k – это характеристическая функция сжатия T_k, $k = 1, 2, 3$, см. §3 настоящей заметки и ссылки там. Так как $T_k \in C_{\cdot 0}$, то функции F_k – внутренние. Из соотношения (5.3) и леммы 3.2(i) следует, что F_k удовлетворяют условию (1.3) с δ. Из соотношения (5.4) и леммы 3.2(ii) следует, что F_k удовлетворяют условию (1.2). Функции F_k не обратимы слева, потому что сжатия T_k не подобны изометриям, см. теорему A. То, что F_1, F_2, F_3 удовлетворяют условиям (1.4), (1.6), (1.5), соответственно, следует из равенств (3.7) и (5.5). Так как $T_3 \sim S$ (по лемме 5.9), то F_3 имеет внешнее левое скалярное кратное по теореме B(6), и $I - F_3(z)^* F_3(z) \in \mathfrak{S}_1$ при всех $z \in \mathbb{D}$ по лемме 3.2(iii) и теореме B(2). $\square$

Литература

1. J. R. Akeroyd, *Another look at some index theorems for the shift.* — Indiana Univ. Math. J. **50** (2001), 705–718.
2. J. R. Akeroyd, *A note on harmonic measure.* — Comput. Methods Funct. Theory **7**, No. 1 (2007), 91–104.
3. A. Aleman, S. Richter, C. Sundberg, *Invariant subspaces for the backward shift on Hilbert spaces of analytic functions with regular norm.* — Bergman spaces and related topics in complex analysis. Contemp. Math. **404** (2006), AMS, Providence, RI, 1–25.
4. A. Aleman, S. Richter, C. Sundberg, *Nontangential limits in $\mathcal{P}^t(\mu)$-spaces and the index of invariant subspaces.* — Ann. of Math. **169** (2009), 449–490.
5. Э. Коллингвуд, А. Ловатер, *Теория предельных множеств.* Мир, М., 1971.
6. J. B. Conway, *The theory of subnormal operators.* — Math. Surveys and Monographs, Amer. Math. Soc. **36** (1991).
7. M. F. Gamal', *On contractions that are quasiaffine transforms of unilateral shifts.* — Acta Sci. Math. (Szeged) **74** (2008), 755–765.
8. М. Ф. Гамаль, *О сжатиях с компактными дефектами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **366** (2009), 13–41.
9. H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu, *Theory of Bergman spaces.* Graduate Texts in Mathematics **199**, New York, 2000.
10. В. В. Капустин, А. В. Липин, *Операторные алгебры и решетки инвариантных подпространств.* I , II. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **178** (1989), 23–56; **190** (1991), 110–147.
11. L. Kérchy, *Isometric asymptotes of power bounded operators.* — Indiana Univ. Math. J. **38** (1989), 173–188.
12. T. L. Miller, R. C. Smith, *Nontangential limits of functions in some $P^2(\mu)$ spaces.* — Indiana Univ. Math. J. **39** (1990), 19–26.
13. T. L. Miller, W. Smith, L. Yang, *Bounded point evaluations for certain $P^t(\mu)$ spaces.* — Illinois J. Math. **43** (1999), 131–150.
14. N. K. Nikolski, *Operators, functions, and systems: an easy reading. Volume* I: *Hardy, Hankel, and Toeplitz, Volume* II: *Model operators and systems*, Math. Surveys and Monographs **92**, AMS, 2002.
15. B. Sz.-Nagy, C. Foias, *On the structure of intertwining operators.* — Acta Sci. Math. (Szeged) **35** (1973), 225–254.
16. B. Sz.-Nagy, C. Foias, H. Bercovici, L. Kérchy, *Harmonic analysis of operators on Hilbert space.* Springer, New York, 2010.

17. K. Takahashi, *On quasiaffine transforms of unilateral shifts.* — Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 683–687.
18. J. E. Thomson, L. Yang, *Invariant subspaces with the codimension one property in* $L^t(\mu)$. — Indiana Univ. Math. J. **44** (1995), 1163–1173.
19. В. А. Толоконников, *Оценки в теореме Карлесона о короне, идеалы алгебры* H^∞*, задача Секефальви–Надя.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **113** (1981), 178–198.
20. С. Р. Треиль, *Углы между коинвариантными подпространствами и операторная проблема короны. Задача Сёкефальви–Надя.*— Докл. АН СССР **302**, No. 5 (1988), 1063–1068.
21. S. Treil, *Geometric methods in spectral theory of vector-valued functions: Some recent results.* — Toeplitz operators and spectral function theory, Oper. Theory, Adv. Appl. **42** (1989), 209–280.
22. S. Treil, *An operator corona theorem.* — Indiana Univ. Math. J. **53** (2004), 1763–1781.
23. S. Treil, *Lower bounds in the matrix corona theorem and the codimension one conjecture.* — Geom. Funct. Anal. **14** (2004), 1118–1133.
24. M. Uchiyama, *Contractions and unilateral shifts.* — Acta Sci. Math. (Szeged) **46** (1983), 345–356.
25. M. Uchiyama, *Curvatures and similarity of operators with holomorphic eigenvectors.* — Trans. Amer. Math. Soc. **319** (1990), 405–415.

Gamal' M. F. Notes on the codimension one conjecture in the operator corona theorem.

Answering a question of S. R. Treil (2004), for every δ, $0 < \delta < 1$, we constract examples of contractions whose characteristic function $F \in H^\infty(\mathcal{E} \to \mathcal{E}_*)$ satisfies the conditions $\|F(z)x\| \geqslant \delta\|x\|$ and $\dim \mathcal{E}_* \ominus F(z)\mathcal{E} = 1$ for every $z \in \mathbb{D}$, $x \in \mathcal{E}$, but is not left invertible. Also, we show that the condition $\sup_{z\in\mathbb{D}} \|I - F(z)^*F(z)\|_{\mathfrak{S}_1} < \infty$, where $\mathfrak{S}_1$ is the trace class of operators, which is sufficient for the left invertibility of the operator-valued function F satisfying the estimate $\|F(z)x\| \geqslant \delta\|x\|$ for every $z \in \mathbb{D}$, $x \in \mathcal{E}$, with some $\delta > 0$ (S. R. Treil, 2004), is necessary for the left invertibility of an inner function F such that $\dim \mathcal{E}_* \ominus F(z)\mathcal{E} < \infty$ for some $z \in \mathbb{D}$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023,
С.-Петербург, Россия
E-mail: gamal@pdmi.ras.ru

Поступило 23 июня 2016 г.