Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 447, 2016 г.

И. В. Виденский

АНАЛОГ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ МЕТРИКИ, ПОРОЖДЕННОЙ ГИЛЬБЕРТОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ С ЯДРОМ ШВАРЦА–ПИКА

Памяти моего научного руководителя
Виктора Петровича Хавина

1. Введение

Пусть H – гильбертово пространство, элементами которого являются функции на некотором множестве X. Будем предполагать, что для любой точки a множества X функционал значения в точке непрерывен. Тогда существует такой элемент k_a пространства H, именуемый воспроизводящим ядром, что $\langle f, k_a\rangle = f(a)$, $f \in H$. Будем считать, что для любых двух различных точек a, b множества X соответствующие воспроизводящие ядра линейно независимы. Тогда на множестве X можно ввести метрику (см. [1, стр. 128])

$$\rho(a,b) = \sqrt{1 - \frac{|k_a(b)|^2}{\|k_a\|^2\|k_b\|^2}}, \quad a, b \in X. \tag{1}$$

Если H – классическое пространство Харди H^2 в единичном круге, то формула (1) задает псевдогиперболическую метрику. При этом гиперболическая метрика в единичном круге задается формулой

$$d(a,b) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\rho(a,b)}{1-\rho(a,b)}. \tag{2}$$

В §3 мы докажем, что для пространств с ядром Шварца–Пика (кратко $(SP)_2$-ядро, см. ниже определение 2) формула (2) задает метрику на X и выясним, при каких условиях неравенство треугольника для метрики d превращается в равенство.

Условие Шварца–Пика на ядро гильбертова пространства является менее ограничительным, чем условие Неванлинны–Пика (кратко

Ключевые слова: гиперболическая метрика, мультипликаторы, воспроизводящее ядро.

(NP)-ядро, см. ниже определение 1). Теории пространств с (NP)-ядром посвящена обширная монография Аглера и Маккарти [1], на которую мы и будем ссылаться. В §2 мы распространим несколько результатов о пространствах с (NP)-ядром на пространства с (SP)-ядром, при этом доказательства будут другими. Для пространств с $(SP)_2$-ядром мы докажем, что ядро является строго положительно определенной функцией и что соотношение $k_a(b) \neq 0$ является отношением эквивалентности на множестве X. Для пространств с (SP)-ядром при некоторых дополнительных предположениях мы установим единственность решения задачи интерполяции.

В работах автора [7, 8] для пространств с $(SP)_2$-ядром построен аналог бесконечного произведения Бляшке и исследована его сходимость. В §4 мы дополним эти результаты утверждением о том, что частичные произведения Бляшке сходятся в сильной операторной топологии пространства мультипликаторов и сходятся равномерно на ограниченных в метрике d подмножествах множества X.

В теории локальных пространств Дирихле (это пространства аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ функций с нормой

$$\|f\|^2 = \|f\|_{H^2}^2 + \int\limits_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 u(z)\, dm_2,$$

где вес $u(z)$ – положительная супергармоническая функция) важную роль играет следующее неравенство для воспроизводящих ядер:

$$2\operatorname{Re} k_a(b) - 1 > 0. \tag{3}$$

Неравенство (3) доказано Алеманом [2] и другим способом Шиморином [6]. Шиморин [5] доказал, что ядра локальных пространств Дирихле обладают свойством (NP).

В §4 мы докажем неравенство (3) для пространств с $(SP)_2$-ядром при условии существования такой точки a множества X, для которой $k_a(x) = 1$, $x \in X$. Если такой точки нет, то добиться ее появления можно с помощью перенормировки (см. [1, стр. 25]). Для локальных пространств Дирихле такой точкой является начало координат.

Благодарность. Я глубоко благодарен Виктору Петровичу Хавину за то, что он направил мои усилия в эту привлекательную и плодотворную область математического анализа, за многочисленные ободряющие и весьма полезные математические беседы и, в особенности, за

необычайно творческую и дружелюбную атмосферу нашего семинара, создателем, вдохновителем и бессменным руководителем которого был Виктор Петрович.

2. Строгая положительная определенность воспроизводящего ядра

Для гильбертова пространства H функций на множестве X определим пространство мультипликаторов

$$M(H) = \{\varphi \mid f \in H \Rightarrow \varphi f \in H\}.$$

С мультипликатором φ связан ограниченный оператор умножения, действующий на пространстве H, $M_\varphi(f) = \varphi f$, $f \in H$. Положим $\|\varphi\|_{M(H)} = \|M_\varphi\|$. Напомним определения (NP)-ядра [1] и (SP)-ядра [7]. Для этого выведем необходимое условие разрешимости задачи интерполяции в пространстве мультипликаторов. Пусть φ – мультипликатор, $\|\varphi\| \leqslant 1$, $\{z_j\}_{j=1}^n$ – различные точки множества X. Положим $w_j = \varphi(z_j)$. Тогда

$$\|(M_\varphi)^* | \operatorname{span}\{k_{z_j}\}_{j=1}^n\| \leqslant 1. \tag{4}$$

Из равенства

$$(M_\varphi)^* k_z = \overline{\varphi(z)} k_z \tag{5}$$

следует, что неравенство (4) эквивалентно положительной полуопределенности матрицы

$$\{(1 - w_i \overline{w_j}) \langle k_{z_j}, k_{z_i} \rangle\}_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \tag{6}$$

Определение 1. *Ядро гильбертова пространства H обладает свойством $(NP)_n$, если из положительной полуопределенности матрицы* (6) *следует существование такого мультипликатора φ, что*

$$\|\varphi\| \leqslant 1, \quad \varphi(z_j) = w_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{7}$$

Ядро гильбертова пространства H обладает свойством (NP), если оно обладает свойством $(NP)_n$ для любого натурального числа n.

Ядро гильбертова пространства H обладает полным свойством Неванлинны–Пика (кратко (CNP)-ядро), если разрешима интерполяционная задача для случая, когда w_j – матрицы произвольного порядка.

Рассмотрим частный случай задачи интерполяции. Пусть $\{z_j\}_{j=0}^n$ – различные точки множества X, φ – такой мультипликатор, что $\|\varphi\| \leqslant$

1, $\varphi(z_j) = 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Обозначим $d_0 = \operatorname{dist}\Big(\frac{k_{z_0}}{\|k_{z_0}\|}, \operatorname{span}\{k_{z_j}\}_{j=1}^n\Big)$, где dist – расстояние в пространстве H. Тогда неравенство (4) эквивалентно неравенству

$$|\varphi(z_0)| \leqslant d_0. \tag{8}$$

При $n = 1$ имеем $d_0 = \rho(z_0, z_1)$. Следовательно, (4) эквивалентно неравенству

$$|\varphi(z_0)| \leqslant \rho(z_0, z_1). \tag{9}$$

Неравенства (8), (9) естественно считать обощением классического неравенства Шварца–Пика.

Определение 2. *Ядро гильбертова пространства H обладает свойством $(SP)_{n+1}$, если для любых различных точек $\{z_j\}_{j=0}^n$ существует такой мультипликатор φ, что*

$$\|\varphi\| \leqslant 1,\ \varphi(z_0) = d_0,\ \varphi(z_j) = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{10}$$

Ядро гильбертова пространства H обладает свойством (SP), если оно обладает свойством $(SP)_{n+1}$ для любого натурального n.

В работе Маршалла и Сандберга [3], в предположении, что $k_{z_0}(x) \neq 0$, $x \in X$, доказано, что если мультипликатор, удовлетворяющий условиям (10), существует, то он единственный. Следуя работе [3], но не предполагая, что ядра $k_x(y)$ не имеют нулей, выведем формулу для экстремального мультипликатора, удовлетворяющего условиям (10) при $n = 1$. Обозначим $a = z_0$, $b = z_1$, $\psi_{a,b}(z)$ – мультипликатор, такой что $\|\psi_{a,b}\| \leqslant 1$, $\psi_{a,b}(b) = 0$, $\psi_{a,b}(a) = \rho(a, b)$. Очевидно, единственным решением следующей экстремальной задачи в пространстве H

$$\sup\{g(a)|\ g \in H,\ g(a) > 0,\ g(b) = 0,\ \|g\| \leqslant 1\}$$

является функция

$$f(z) = \frac{1}{\rho(a,b)}\Big(\frac{k_a(z)}{\|k_a\|} - \frac{k_a(b)k_b(z)}{\|k_a\|\,\|k_b\|^2}\Big). \tag{11}$$

Рассмотрим функцию $h(z) = \psi_{a,b}(z)k_a(z)/\|k_a\|$. Тогда $f(b) = h(b) = 0$, $f(a) = h(a) = \rho(a,b)\|k_a\|$, $\|h\| \leqslant 1$. Из единственности решения f заключаем, что $f(z) = h(z)$, $z \in X$. То есть

$$\psi_{a,b}(z)\frac{k_a(z)}{\|k_a\|} = \frac{1}{\rho(a,b)}\Big(\frac{k_a(z)}{\|k_a\|} - \frac{k_a(b)k_b(z)}{\|k_a\|\|k_b\|^2}\Big). \tag{12}$$

Обозначим $E = k_a^{-1}(0)$. Заметим, что если $X \setminus E$ – множество единственности для пространства H, то есть

$$g \in H, \quad g\big|_{X\setminus E} = 0 \Rightarrow g = 0, \tag{13}$$

то формула (12) однозначно определяет мультипликатор $\psi_{a,b}$.

Следующий результат доказан в [1, лемма 7.2, стр. 80] для пространств с $(NP)_2$-ядром, причем доказательство существенно использует свойство $(NP)_2$. Распространим его на пространства с $(SP)_2$-ядром.

Лемма 1. *Пусть H – гильбертово пространство с $(SP)_2$-ядром на множестве X. Тогда X разбивается на непересекающиеся подмножества X_i так, что если две точки a, b принадлежат одному подмножеству X_i, то $k_a(b) \neq 0$, а если a и b принадлежат разным подмножествам разбиения, то $k_a(b) = 0$.*

Доказательство. Проверим, что условие $k_a(b) \neq 0$ является отношением эквивалентности на множестве X. Пусть a, b, c – точки множества X, предположим, что $k_a(b) \neq 0$, $k_b(c) \neq 0$. Допустим, что $k_a(c) = 0$. Подставим в формулу (12) $z = c$, получим $k_a(b)k_b(c) = 0$, что противоречит нашему предположению. Значит, $k_a(c) \neq 0$, что и требовалось проверить. Положим $X_a = \{y | k_a(y) \neq 0\}$. Тогда X разбивается на непересекающиеся множества эквивалентности вида X_a. □

Заметим, что ядро обладает свойством $(SP)_n$ на множестве X тогда и только тогда, когда оно обладает свойством $(SP)_n$ на каждом из подмножеств X_i из леммы 1.

В [1, лемма 7.5, стр. 80] доказана строгая положительная определенность (NP)-ядра, причем доказательство существенно использует свойство (NP). Справедлив более общий результат. В лемме 2 мы заранее не будем предполагать линейную независимость воспроизводящих ядер k_a, k_b для различных точек a, b множества X.

Лемма 2. *Пусть H – функциональное гильбертово пространство на множестве X.*

Предположим, что

1) *для любой точки a множества X существует такой элемент f пространства H, что $f(a) \neq 0$,*

2) *для любых двух различных точек a, b множества X существует такой мультипаликатор φ, что $\varphi(a) \neq \varphi(b)$.*

Тогда воспроизводящее ядро $k_x(y)$ строго положительно определено на множестве X.

Доказательство. Для n различных точек $\{x_i\}_{i=1}^n$ множества X матрица $\{k_{x_i}(x_j)\}_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ строго положительно определена тогда и только тогда, когда система воспроизводящих ядер $\{k_{x_i}(x)\}_{i=1}^n$ линейно независима. Докажем по индукции по n линейную независимость системы функций $\{k_{x_i}(x)\}_{i=1}^n$. Для $n=1$ из существования элемента f такого, что $f(x_1)\neq 0$, следует, что $\|k_{x_1}\| = \sup\{|g(x_1)| \mid \|g\|\leqslant 1, g\in H\} > 0$. Допустим, что для любых n различных точек $\{x_i\}_{i=1}^n$ система функций $\{k_{x_i}\}_{i=1}^n$ линейно независима. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$ – различные точки множества X. Допустим, что функции $\{k_{x_i}\}_{i=1}^{n+1}$ линейно зависимы. Тогда найдутся такие числа α_i, $\alpha_i\in\mathbb{C}$, $\alpha_i\neq 0$, $1\leqslant i\leqslant n$, что

$$k_{x_{n+1}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i k_{x_i}. \tag{14}$$

По предположению найдется мультипликатор φ, для которого $\varphi(x_{n+1})\neq\varphi(x_1)$. Тогда

$$(M_\varphi)^* k_{x_{n+1}} = (M_\varphi)^*\Big(\sum_{i=1}^n \alpha_i k_{x_i}\Big).$$

Воспользуемся равенством (5), получим

$$\overline{\varphi(x_{n+1})}k_{x_{n+1}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i\overline{\varphi(x_i)}k_{x_i}.$$

Подставим в левую часть выражение $k_{x_{n+1}}$ из (14), тогда

$$\overline{\varphi(x_{n+1})}\sum_{i=1}^n \alpha_i k_{x_i} = \alpha_i\overline{\varphi(x_i)}k_{x_i}.$$

Отсюда следует, что $\varphi(x_{n+1}) = \varphi(x_1)$, так как по индукционному предположению функции $\{k_{x_i}\}_{i=1}^n$ линейно независимы. Мы пришли к противоречию с выбором φ. □

Разумеется, из леммы 2 следует, что $(SP)_2$-ядро строго положительно определено.

В [1, теорема 8.33, стр. 105] доказано для пространств с (CNP)-ядром, что если матрица (6) не строго положительно определена, то решение интерполяционной задачи (7) единственно. Доказательство

состоит из двух частей. В первой части по существу доказано следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть H – функциональное гильбертово пространство на X со строго положительно определенным воспроизводящим ядром и обладающее следующим свойством: если E – множество нулей нетривиальной функции из пространства H, то $X \setminus E$ – множество единственности для пространства H. Тогда, если матрица* (6) *не строго положительно определена, и если существует решение интерполяционной задачи* (7)*, то оно единственно.*

Напомним, что множество единственности определено в (13). Вторая часть доказательства теоремы состоит в проверке того, что пространство с (CNP)-ядром удовлетворяет условиям следствия 1 и основана на возможности отождествить пространство с (CNP)-ядром с сужением на некоторое подмножество пространства аналитических функций Друри–Арвесона (см. [1, гл. 8]). Возможно ли подобное отождествление для пространств с (NP)-ядром или с (SP)-ядром, неизвестно, тем не менее справедливы следующие утверждения.

Следствие 2. *Пусть H – гильбертово пространство с (SP)-ядром. Если матрица* (6) *не строго положительно определена и если существует решение интерполяционной задачи* (7)*, то оно единственно.*

Доказательство. Проверим выполнение условий следствия 1. Строгая положительная определенность (SP)-ядра следует из леммы 2. В работе [8, следствие 1] для пространств с (SP)-ядром доказано, что если f, $g \in H$, $f \neq 0$, $g \neq 0$, $E \subset f^{-1}(0)$, $F \subset g^{-1}(0)$, то существует h, $h \in H$, $h \neq 0$, $E \cup F \subset h^{-1}(0)$. Значит, если E – множество нулей нетривиальной функции из пространства H, то $X \setminus E$ не может быть множеством нулей нетривиальной функции из пространства H. $\square$

Следствие 3. *Пусть H – гильбертово пространство с (NP)-ядром. Если матрица* (6) *не строго положительно определена, то решение задачи* (7) *единственно.*

3. Гиперболичность метрики

В соответствии с леммой 1 будем впредь предполагать, что $k_a(b) \neq 0$ для любых точек a, b множества X. Тогда из формулы (12) получим

явное выражение для мультипликатора

$$\psi_{a,b}(z) = \frac{1}{\rho(a,b)}\Big(1 - \frac{k_a(b)k_b(z)}{k_b(b)k_a(z)}\Big). \tag{15}$$

Формула (15) содержится в монографии Сейпа [4, стр. 31].

Теорема 1. *Пусть H – гильбертово пространство с $(SP)_2$-ядром на множестве X. Тогда формула* (2) *задает метрику на X.*

Доказательство. Пусть a, b, c – различные точки множества X. Воспользуемся формулой (15):

$$\psi_{a,c}(b) = \frac{1}{\rho(a,c)}\Big(1 - \frac{k_a(c)k_c(b)}{k_c(c)k_a(b)}\Big).$$

Тогда

$$\Big|\frac{k_a(c)k_c(b)}{k_c(c)k_a(b)}\Big| = |1 - \rho(a,c)\psi_{a,c}(b)|. \tag{16}$$

Для оценки величины $|\psi_{a,c}(b)|$ воспользуемся неравенством (9). Так как $\|\psi_{a,c}\| \leqslant 1$, $\psi_{a,c}(c) = 0$, то из неравенства (9) следует оценка $|\psi_{a,c}(b)| \leqslant \rho(b,c)$. Тогда из формулы (16) имеем

$$\Big|\frac{k_a(c)k_c(b)}{k_c(c)k_a(b)}\Big| \leqslant 1 + \rho(a,c)\rho(b,c). \tag{17}$$

Справедливо тождество

$$\Big|\frac{k_a(c)k_c(b)}{k_c(c)k_a(b)}\Big|^2 = \frac{(1-\rho^2(a,c))(1-\rho^2(b,c))}{1-\rho^2(a,b)}. \tag{18}$$

Из (17), (18) получим

$$\frac{(1-\rho^2(a,c))(1-\rho^2(b,c))}{1-\rho^2(a,b)} \leqslant (1+\rho(a,c)\rho(b,c))^2,$$

что равносильно неравенству

$$\rho(a,b) \leqslant \frac{\rho(a,c)+\rho(b,c)}{1+\rho(a,c)\rho(b,c)},$$

а это эквивалентно неравенству треугольника $d(a,b) \leqslant d(a,c) + d(b,c)$. □

Заметим, что функция $d(a,b)$ не в любом гильбертовом пространстве задает метрику. Рассмотрим пространство D_α аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ функций, воспроизводящее ядро которого задается формулой $k_\zeta(z) = (1-\bar{\zeta}z)^{-\alpha}$. Тогда легко проверить, что при $\alpha > 1$

функция $d(a,b)$ не удовлетворяет неравенству треугольника. Если же $0 < \alpha \leqslant 1$, то ядро пространства D_α является (CNP)-ядром (см. [3]) и $d(a,b)$ задает метрику на $\mathbb{D}$.

Для гиперболической метрики в единичном круге важную роль играет описание случаев, когда неравенство треугольника превращается в равенство. Исследуем этот вопрос для гильбертова пространства с $(SP)_2$-ядром.

Теорема 2. *Пусть H – гильбертово пространство с $(SP)_2$-ядром на множестве X, a, b, c – различные точки множества X. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) $d(a,b) = d(a,c) + d(c,b)$,
2) $\psi_{a,c}(x) = -\psi_{b,c}(x)$, $\psi_{a,b}(x) = \psi_{c,b}(x)$ *для любого* x, $x \in X$,
3) $\psi_{a,c}(b) = -\rho(b,c)$,
4) $\psi_{a,b}(c) = \rho(b,c)$,
5) $\psi_{c,b}(a) = \rho(a,b)$.

Доказательство. При выводе формулы (15) мы доказали следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть H – гильбертово пространство с $(SP)_2$-ядром на множестве X, u, v – различные точки множества X, φ – такой мультипликатор, что $\|\varphi\| \leqslant 1$, $\varphi(v) = 0$, $\varphi(u) = \rho(u,v)$. Тогда $\varphi = \psi_{u,v}$.*

1) $\Rightarrow$ 2). Равенство $d(a,b) = d(a,c) + d(c,b)$ эквивалентно равенству

$$\rho(a,b) = \frac{\rho(a,c) + \rho(c,b)}{1 + \rho(a,c)\rho(c,b)}. \tag{19}$$

Из равенства (19) и тождества (18) следует, что в неравенстве (17) имеет место равенство. Из равенств (16), (17) получим

$$|1 - \rho(a,c)\psi_{a,c}(b)| = 1 + \rho(a,c)\rho(b,c).$$

Из неравенства (9) следует, что $|\psi_{a,c}(b)| \leqslant \rho(b,c)$. Следовательно, $\psi_{a,c}(b) = -\rho(b,c)$. Применим лемму 3 к мультипликатору $(-\psi_{a,c})$, $u = b$, $v = c$. Получим $-\psi_{a,c}(x) = \psi_{b,c}(x)$ для любого x, $x \in X$. Равенство (19) равносильно равенству

$$\rho(a,c) = \frac{\rho(a,b) - \rho(b,c)}{1 - \rho(a,b)\rho(b,c)}. \tag{20}$$

Следовательно,

$$(1-\rho(a,b)\rho(b,c))^2 = \frac{(1-\rho^2(a,b))(1-\rho^2(b,c))}{1-\rho^2(a,c)}$$
$$= \left|\frac{k_a(b)k_b(c)}{k_b(b)k_a(c)}\right|^2 = |1-\rho(a,b)\psi_{a,b}(c)|^2. \tag{21}$$

Из неравенства (9) следует, что $|\psi_{a,b}(c)| \leqslant \rho(b,c)$. Значит, $\psi_{a,b}(c) = \rho(b,c)$. Применим лемму 3 к мультипликатору $\psi_{a,b}$, $u=c$, $v=b$. Получим $\psi_{a,b}(x) = \psi_{c,b}(x)$ для любого x, $x \in X$.

2) $\Rightarrow$ 3), 4), 5). В равенство $\psi_{a,c}(x) = -\psi_{b,c}(x)$ подставим $x=b$. В равенство $\psi_{a,b}(x) = \psi_{c,b}(x)$ подставим $x=c$, $x=a$.

3) $\Rightarrow$ 1). Подставим $\psi_{a,c}(b) = -\rho(b,c)$ в формулу (16). Сопоставив полученное равенство с тождеством (18), получим (19).

4) $\Rightarrow$ 1). В формулах (16) и (18) поменяем местами точки b и c, подставим $\psi_{a,b}(c) = \rho(b,c)$ в формулу (16), отсюда следует (19).

5) $\Rightarrow$ 1). Доказательство аналогично случаю 4) $\Rightarrow$ 1). □

Поскольку a и b входят в утверждение 1 теоремы 2 симметрично, можно сформулировать еще четыре эквивалентных утверждения: 6) $\psi_{b,a}(x) = \psi_{c,a}(x)$ для любого x, $x \in X$, 7) $\psi_{b,c}(a) = -\rho(a,c)$, 8) $\psi_{b,a}(c) = \rho(a,c)$, 9) $\psi_{c,a}(b) = \rho(a,b)$.

4. Сходимость произведения Бляшке

В настоящем параграфе мы уточним результаты о сходимости аналога бесконечного произведения Бляшке для пространств с $(SP)_2$-ядром, полученные автором в [7, 8].

Определение 3. *Пусть H – гильбертово пространство функций на X, $Z = \{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность точек множества X. Z удовлетворяет условию Бляшке для пространства H, если существует такая точка a множества X, что сходится ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-\rho^2(a,z_j)) < +\infty. \tag{B}$$

В [7, теорема 1] доказано, что для пространств с $(SP)_2$-ядром условие (B) не зависит от выбора точки a. Определим последовательность частичных произведений Бляшке $\psi_n = \prod\limits_{j=1}^{n} \psi_{a,z_j}$.

Теорема 3. *Пусть H – гильбертово пространство с $(SP)_2$-ядром на множестве X, $Z = \{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность точек множества X, удовлетворяющая условию Бляшке для H. Тогда существует такой мультипликатор ψ, что*

1) *для любого ограниченного в метрике d подмножества Y, $Y \subset X$, последовательность частичных произведений Бляшке $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно и абсолютно на множестве Y к функции ψ, при этом только конечное число множителей ψ_{a,z_j} могут обращаться в ноль на Y;*

2) *для любого элемента f пространства H справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n f - \psi f\|_H = 0.$$

Доказательство. 1) В [7, теорема 1] получено неравенство

$$\sum_{j=1}^{\infty} |1 - \rho(a, z_j)\psi_{a,z_j}(y)| \leqslant \frac{1}{1-\rho(a,y)} \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \rho^2(a, z_j)), \ y \in X. \tag{22}$$

Y – ограниченное в метрике d множество. Значит, существует R, $0 < R < +\infty$, для которого $d(y, a) \leqslant R$ при $y \in Y$. Тогда существует такое r, $0 < r < 1$, что $\rho(a, y) \leqslant r$ при $y \in Y$. Следовательно, $(1-\rho(a,y))^{-1} \leqslant (1-r)^{-1}$. Из неравенства (22) следует существование такой функции ψ, что последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции ψ абсолютно и равномерно на множестве Y. Если $\psi_{a,z_j}(y) = 0$, то из неравенства (9) имеем $|\psi_{a,z_j}(a)| \leqslant \rho(a, y)$, то есть $\rho(a, z_j) \leqslant \rho(a, y)$. Из условия Бляшке следует, что $\lim\limits_{j\to\infty} \rho(a, z_j) = 1$. Значит, если $\rho(a, z_j) > r$, то $\psi_{a,z_j}(y) \neq 0$ при $y \in Y$.

2) В [8, теорема 1] доказано, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n k_a - \psi k_a\| = 0. \tag{23}$$

Из формулы (15) имеем

$$\frac{k_b(z)}{k_a(z)} = (1 - \rho(a, b)\psi_{a,b}(z))\frac{k_b(b)}{k_a(b)},$$

следовательно, k_b/k_a – мультипликатор. Умножим k_b/k_a на равенство (23), получим

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n k_b - \psi k_b\| = 0, \quad b \in X.$$

Значит, последовательность операторов M_{ψ_n} сходится на полном семействе элементов $\{k_b\}_{b\in X}$. Также имеет место оценка $\|M_{\psi_n}\| \leqslant 1$. Следовательно, по теореме Банаха–Штейнгауза операторы M_{ψ_n} сходятся сильно к M_ψ, а это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n f - \psi f\| = 0, \quad f \in H,$$

при этом ψ – мультипликатор, $\|\psi\| \leqslant 1$. □

Для пространства с $(SP)_2$-ядром оценим вещественную часть воспроизводящего ядра.

Теорема 4. *Пусть H – гильбертово пространство с $(SP)_2$-ядром на множестве X. Допустим, что существует такая точка a множества X, что $k_a(x) = 1$ для любого x, $x \in X$. Тогда*

$$2\operatorname{Re} k_b(c) \geqslant 1 + |k_b(c)|^2(1 - \rho^2(a,b)\rho^2(a,c)),\ b, c \in X.$$

Доказательство. По формуле (15) имеем:

$$\psi_{a,b}(c) = \frac{1}{\rho(a,b)}\Big(1 - \frac{k_a(b)k_b(c)}{k_b(b)k_a(c)}\Big) = \frac{1}{\rho(a,b)}\Big(1 - \frac{k_b(c)}{k_b(b)}\Big).$$

Из неравенства (9) получаем $|\psi_{a,b}(c)| \leqslant \rho(b,c)$. Следовательно,

$$\rho^2(b,c)\rho^2(a,b) \geqslant \Big|1 - \frac{k_b(c)}{k_b(b)}\Big|^2,$$

то есть

$$\Big(1 - \frac{1}{\|k_b\|^2}\Big)\Big(1 - \frac{|k_b(c)|^2}{\|k_b\|^2\|k_c\|^2}\Big) \geqslant 1 - \frac{2\operatorname{Re} k_b(c)}{k_b(b)} + \frac{|k_b(c)|^2}{(k_b(b))^2}.$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} k_b(c) &\geqslant 1 + |k_b(c)|^2\Big(\frac{1}{\|k_b\|^2} + \frac{1}{\|k_c\|^2} - \frac{1}{\|k_b\|^2\|k_c\|^2}\Big) \\ &= 1 + |k_b(c)|^2(1 - \rho^2(a,b)\rho^2(a,c)). \end{aligned}$$ □

Если не существует точки a, для которой $k_a(x) = 1$, $x \in X$, то можно произвести следующую специальную перенормировку.

Зафиксируем произвольную точку a множества X. Положим $\delta(x) = \|k_a\|/k_a(x)$. Определим новое пространство функций

$$H_\delta = \{\delta \cdot f | f \in H\}, \quad \|\delta f\|_{H_\delta} = \|f\|_H.$$

Тогда, если $r_y(x)$ – воспроизводящее ядро пространства H_δ, то $r_a(x) = 1$, $x \in X$. При этом пространство мультипликаторов $M(H_\delta)$ совпадает с пространством $M(H)$.

Литература

1. J. Agler, J. E. McCarthy, *Pick Interpolation and Hilbert Function Spaces*, Graduate Studies in Mathematics 44, Amer. Math. Soc., Providence R.I., 2002.
2. A. Aleman, *The Multiplication Operators on Hilbert Spaces of Analytic Functions*, Habilitationsschrift, Hagen (1993).
3. D. E. Marshall, C. Sundberg, *Interpolating sequences for the multipliers of the Dirichlet space*, Preprint 1993. Available at `http://www.math.washington.edu/~marshall/preprints/preprints.html`.
4. K. Seip, *Interpolation and Sampling in Spaces of analytic Functions*, University lecture series 33, Amer. Math. Soc., Providence R.I., 2004.
5. S. Shimorin, *Complete Nevanlinna–Pick property of Dirichlet-type spaces.* — J. Funct. Anal. **191** (2002), 276–290.
6. С. М. Шиморин, *Воспроизводящие ядра и экстремальные функции в пространствах типа Дирихле.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **255** (1998), 198–220.
7. И. В. Виденский, *Об аналоге произведения Бляшке для гильбертова пространства с ядром Неванлинны–Пика.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **424** (2014), 126–140.
8. И. В. Виденский, *Произведение Бляшке для гильбертова пространства с ядром Шварца–Пика.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **434** (2015), 68–81.

Videnskii I. V. An analog of the hyperbolic metric generated by Hilbert space with Schwarz–Pick kernel.

It is proved that a Hilbert function space on the set X with Schwarz–Pick kernel (this is a wider class than the class of Hilbert spaces with Nevanlinna–Pick kernel) generates the metric on the set X – an analog of the hyperbolic metric in the unit disk. For a sequence satisfying an abstract Blaschke condition, it is proved that the associated infinite Blaschke product converges uniformly on any fixed bounded set and in the strong operator topology of the multiplier space.

С.-Петербургский государственный университет
Университетский пр. 28
Петродворец
198504. С.-Петербург, Россия
E-mail: `ilya.viden@gmail.com`

Поступило 1 августа 2016 г.